
الله
بسم الله الرحمن الرحيم


obeikandl.com

# الإشارات والأنظمة

# التحليل باستخدام الطرق التحويلية وماتلاب

## الجزء الأول

تأليف

**M. J. Roberts**

أستاذ بقسم الكهرباء وهندسة الحاسب جامعة تينيسى

ترجمة

**د. تركي بن عبد العزيز التميم**

أستاذ علوم الحاسب المشارك

جامعة الملك سعود

**د. محمد إبراهيم العدوي**

أستاذ الاتصالات والإلكترونيات

جامعة حلوان – مصر

**د. حسن فؤاد محمد السيد**

أستاذ الهندسة الطبية – جامعة الملك سعود

جامعة حلوان - مصر



*فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر*

روبرتس ، ميخائيل ج.

الإشارات والأنظمة التحليل باستخدام الطرق التحويلية وماتلاب. / ميخائيل ج . روبرتس؛ تركي عبدالعزيز التميم؛ محمد ابراهيم العدوي؛ حسن فؤاد محمد السيد.- الرياض، ١٤٣٦هـ ٢مج.

١٠٤٤ص؛ ٢١×٢٨سم

ردمك: ٢-٣٥٩-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (مجموعة)

٨-٣٦٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (ج١)

١- لغة ماتلاب ٢- الرياضيات- معالجة البيانات أ. التميم (مترجم) ب. العدوي، محمد ابراهيم (مترجم) ج. السيد، حسن فؤاد (مترجم) د. العنوان

ديوي ٠٥٥.١٣٣ ١٤٣٦/٣٦٢٨

رقم الإيداع: ١٤٣٦/٣٦٢٨

ردمك: ٢-٣٥٩-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (مجموعة)

٨-٣٦٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (ج١)

هذه ترجمة عربية محكمة صادرة عن مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

Signals and Systems: Analysis Using Transform Methods and MATLAB
By: Michael J. Roberts
© The McGraw-Hill Companies., 2012

وقد وافق المجلس العلمي على نشرها في اجتماعه الثالث عشر للعام الدراسي ١٤٣٥/ ١٤٣٦هـ المعقود بتاريخ ٢٧/ ١١/ ١٤٣٥هـ الموافق ٢٢/ ٩/ ٢٠١٤م.





# مقدمة المترجمين

نتقدم بجزيل الشكر لمركز الترجمة بجامعة الملك سعود، الذي أخذ على عاتقه مسؤولية الإسهام في إثراء المكتبة العربية بالكتب الاختصاصية في المجالات المختلفة، وذلك من أجل النهوض بالأمة العربية فكرياً، وثقافياً، وعلمياً.

لقد وقع اختيارنا على هذا الكتاب لترجمته؛ لأنه يقدم موضوع مقرر الإشارات والأنظمة، الذي يتم تدريسه في كثير من التخصصات الهندسية، مثل: الاتصالات، والإلكترونيات، والحاسبات، وحتى التخصصات الميكانيكية، وبالذات تخصص الميكاترونيات. وكنتيجة لأهمية موضوع هذا الكتاب، رأينا ضرورة أن تشتمل المكتبة العربية على كتاب في هذا التخصُّص، حيث انه يغطي تقريباً معظم ما يحتاجه طلاب مرحلة البكالوريوس، والسنوات الأولى من مرحلة الماجستير، وهو يمثل مرجعاً يقتنيه الطالب للرجوع إليه في أي وقت يحتاجه، سواء في حياته العملية، أو في أبحاثه إذا استمر في المجال الأكاديمي. ونظراً لافتقار المكتبة العربية إلى وجود مثل هذه الكتب النوعية المتخصصة، فقد رأينا أن من واجبنا ترجمة هذا الكتاب، ليصبح مرجعاً باللغة العربية.

إن ترجمة الكتب العلمية إلى اللغة العربية مليئة بالمصاعب، حيث يجب الالتزام بالنص الأصلي على أن تكون الترجمة بلغة عربية سلسة وسليمة، وتعكس المفهوم العلمي، والمعنى الصحيح بصورة دقيقة ومفهومة. من أجل ذلك قام المترجمون ببذل كل جهد ممكن؛ لتحقيق جميع العناصر المذكورة آنفا"، سائلين الله السداد في ذلك لخير وفائدة والمهتمين بموضوعات هذا الكتاب. ولقد توخينا السلامة والسلاسة اللغوية للترجمة العربية وفي الوقت نفسه دأبنا جاهدين لعكس المفهوم العلمي، والمعنى الصحيح بشكل دقيق، وليكون مفهوماً للقارئ العربي.

لقد بذلنا كل جهد ممكن لتحقيق هذه العناصر مجتمعة، حيث تم الاتفاق بين المترجمين على توحيد المصطلحات العلمية طبقاً لما هو متعارف علية بالمكتبة العربية. ولقد تم التأكد من المصطلحات عن طريق المعلومات

المتوافرة على الشبكة العنكبوتية. ولقد تمت مراجعة تلك المصطلحات بدقة، وكذلك المعادلات، والأشكال الموجودة بالكتاب.

وفي النهاية نرجو من الله أن نكون قد وُفّقنا إلى ذلك. والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

**المترجمون**

يتقدم المترجمون بخالص الشكر والتقدير للمهندسة هديل محمد العدوي، لمجهودها في مراجعة وإعداد الرسومات والأشكال التي يحتويها الكتاب.

# استعراض الكتاب

**الحافز أو المحرك**

ألفت الطبعة الأولى لأنني أحببت الجمال الحسابي في تحليل الإشارات والأنظمة، وهذا لم يتغير. الحافز للطبعة الثانية هو تحسين الكتاب اعتمادا على خبرتي في استخدامه في التدريس، واستجابةً للنقد البناء من الطلاب والزملاء.

**المستمعون**

لقد تم إعداد هذا الكتاب ليغطي مقرراً في فصلين دراسيين متتابعين في أساسيات تحليل الإشارات والأنظمة خلال سنة للمبتدئين أو المتقدمين. يمكن استخدامه أيضاً (كما استخدمته أنا) ككتاب للمراجعة السريعة في فصل دراسي واحد لمستوى الماجستير للطرق التحويلية المطبقة على الأنظمة الخطية.

**التغيرات عن الطبعة الأولى**

لقد استخدمت الطبعة الأولى منذ كتابتها، مع كتابي الثاني، أساسيات الإشارات والأنظمة، في كل محاضراتي. كما استخدمت أيضاً في محاضراتي مسودة الطبعة الثانية، لاختبار تأثيرات الطرق المختلفة لتقديم موضوعات جديدة ولاكتشاف وتصحيح (آمل ذلك) كل أو معظم الأخطاء في كل من النص وحلول التمارين. لقد استقبلت أيضا آراء من المراجعين عند مراحل مختلفة من عملية الإعداد للطبعة الثانية. وعلى ذلك، واعتماداً على خبراتي والمقترحات من المراجعين والطلاب، قمت بعمل التغيرات التالية من الطبعة الأولى.

- بالنظر إلى الكتب الجيدة القبول في مجال الإشارات والأنظمة، يمكن أن نجد أن التدوين والترقيم كان بعيدا عن المثالية، أو القياسية. كل مؤلف له/لها طريقة التدوين المفضلة، وكل طريقة تكون مريحة لبعض الأنواع من التحليل، ولكنها ليست مريحة للأنواع الأخرى. لقد حاولت بقدر الإمكان تنظيم، أو ترشيد

عملية التدوين، مزيلاً كلما أمكن، التعقيدات والتشتيت في الرموز الجانبية. لقد وضعت هذه الرموز الجانبية لجعل الموضوعات أكثر دقة وغير مضللة، ولكن أدت في بعض الأحوال إلى إجهاد الطلاب، وارتباكهم في القراءة والدراسة في الكتاب. فقد قمت أيضا بتغيير الرموز المستخدمة في دوال التوافقات في الزمن المستمر، بحيث لا تلتبس بسهولة مع دوال توافقات الزمن المتقطع.

- فصل ٨ في الطبعة الأولى تم تناول دوال الارتباط وكثافة طيف القدرة والطاقة ولكن تم حذفه في هذه الطبعة. معظم المقررات الابتدائية في الإشارات والأنظمة لا تغطي هذا النوع من الموضوعات، وتتركه كي تتم تغطيته في مقررات عن الاحتمالات والعمليات العشوائية.
- تم نقل العديد من الملحقات في الطبعة الأولى المطبوعة إلى الموقع الإلكتروني للكتاب www.mhhe.com/roberts. إن هذا، بالإضافة إلى حذف الفصل ٨ في الطبعة الأولى، قد قلل بدرجة كبيرة من حجم الكتاب، الذي كان في الطبعة الأولى سميكاً وثقيلاً.
- لقد حاولت وضع الكتاب في صورة وحدات على قدر المستطاع، متوافقاً مع احتياجات التغطية التتابعية لبعض الموضوعات. نتيجة لذلك أصبحت الطبعة الثانية بها ١٦ فصلاً بدلاً من ١٢. لقد أصبحت تغطية الاستجابة الترددية، والمرشحات، وأنظمة الاتصالات، وتحليل فضاء الحالة في فصول منفردة الآن.
- الفصول العشرة الأولى هي في الغالب تقديم لطرق تحليل جديدة، وأساسيات نظرية وحسابية. تتعامل الفصول الستة الأخيرة في الغالب مع تطبيقات هذه الطرق على أنواع شائعة من الإشارات والأنظمة العملية.
- الطبعة الثانية بها أمثلة تستخدم ماتلاب أكثر من الطبعة الأولى، وأمثلة ماتلاب التي قدمت من قبل.
- بدلا من تقديم كل دوال الإشارة الجديدة في فصول لوصف لهذه الإشارات، فقد قمت بتقديم بعضها هناك، وأبقيت بعض الدوال المستنتجة إلى وقت الحاجة إليها التي تظهر طبيعياً في فصول متأخرة.
- في الفصل ٤ عن خواص ووصف الأنظمة، تمت إطالة شرح النماذج الرياضية للأنظمة.
- قمت كاستجابة لتعليقات المراجعين بتقديم الالتفاف convolution في الزمن المستمر أولاً، ويتبعه الالتفاف في الزمن المتقطع. على الرغم من أن الالتفاف في الزمن المستمر يشتمل على مفاهيم الحدود والنبضة في الزمن المستمر، والتي لا يشتمل عليها الالتفاف في الزمن المتقطع، فقد استشعر المراجعون أن تعود الطلاب الغالب على الأزمنة المستمرة قد يجعل أفضلية لهذا الترتيب.
- لقد تم وضع تأكيدات أكثر على أهمية مباديء التعامد في فهم الأساسيات لتتابع فورير، في كل من الزمن المستمر والمتقطع.

- تمت زيادة تغطية ثنائية تحويل لابلاس وتحويل زد Z.
- هناك تأكيدات أكثر على استخدام تحويل فورير المتقطع لتقريب الأنواع الأخرى من التحويلات وبعض طرق معالجة الإشارة الشائعة باستخدام الطرق العددية.
- تمت إضافة موضوعات عن تعديل الزاوية في الزمن المستمر.
- الدالة كومب comb المستخدمة في الطبعة الأولى والمعرفة كما يلي :

$$comb_{N0}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN_0] \quad \text{و} \quad comb(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$

والتي تم فيها تمثيل النبضة بـ $\delta(t)$ في الزمن المستمر وبـ $\delta[n]$ في الزمن المتقطع، قد تم استبدالها بدالة الصدمة الدورية. لقد تم تمثيل دالة الصدمة الدورية بـ $\delta_T(t)$ في الزمن المستمر وبـ $\delta_N[n]$ في الزمن المتقطع حيث كل من T و N هي دورات هذه الدوال على التوالي، ويتم تحديدها كما يلي :

$$\delta_N[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN) \quad \text{و} \quad \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

الدالة كومب في الزمن المستمر تعتبر دالة رائعة حسابياً، ولكنني وجدت من خبرتي في محاضراتي أن كونها محجمة، أو ضابطة للزمن، وتكون أيضاً ضابطة، أو محجمة لشدة الصدمة عند تغيير المتغير t إلى at، يربك الطلاب. تتميز دالة الصدمة الدورية بأن بها المسافة بين النبضات (الدورة الأساسية) تكون معامل رمز جانبي بدلاً من تحديدها بالتحجيم الزمني. عند تغيير الدورة الأساسية، فإن شدة الصدمة لا تتغير في الوقت نفسه ، كما يحدث في الدالة كومب. إن ذلك يفصل بكفاءة بين تحجيم الزمن وتحجيم شدة الصدمة في الزمن المستمر وهذا سيخفف من بعض الارتباك عند الطلاب، الذي يتم تحديه مبدئياً بتجريد بعض المفاهيم الأخرى مثل الالتفاف، وأخذ العينات، أو العيننة والتحويلات التكاملية. على الرغم من أن تحجيم الزمن، وشدة النبضة في الوقت نفسه لا يحدث في الزمن المتقطع، فقد غيرت أيضاً تدوينها لتتوافق مع الصدمة الدورية الجديدة في الزمن المستمر.

**نظرة عامة**

يبدأ الكتاب بالطرق الحسابية لوصف الإشارات والأنظمة، في كل من الأزمنة المستمرة والمتقطعة. لقد بدأت فكرة التحويل مع تتابع فورير في الزمن المستمر، ومن هذه القاعدة ننطلق إلى تحويل فورير كامتداد لتتابع فورير

للإشارات غير الدورية. بعد ذلك فعلنا الشيء نفسه مع الإشارات في الزمن المتقطع. لقد قدمنا تحويل لابلاس كتعميم لتحويل فورير في الزمن المستمر للإشارات غير المحددة، والأنظمة غير المستقرة وكأداة فعالة وقوية في تحليل الأنظمة بسبب ارتباطه الشديد بالقيم الذاتية، والدوال الذاتية للأنظمة الخطية في الزمن المستمر. باقي الكتاب تم تخصيصه للتطبيقات عن تحليل الاستجابة الترددية، وأنظمة الاتصالات، وأنظمة التغذية العكسية، والمرشحات التماثلية والرقمية وتحليل فراغ الحالة. لقد قمنا خلال الكتاب كله بتقديم أمثلة ودوال وعمليات ماتلاب؛ لتنفيذ الطرق المقدمة، ويتبع ذلك ملخص لكل فصل.

**ملخصات الفصول**

**الفصل ١**

الفصل ١ هو مقدمة للمفاهيم العامة المشتملة على تحليل الإشارات والأنظمة بدون أي صعوبات حسابية. الغرض من هذا الفصل هو تحفيز الطالب عن طريق توضيح انتشار الإشارات والأنظمة في الحياة اليومية، وأهمية فهم هذه الإشارات.

**الفصل ٢**

فصل ٢ عبارة عن توضيح لوصف الطرق الحسابية لوصف الأنواع المختلفة لإشارات الزمن المستمر. يبدأ الفصل بالدوال المعروفة، الجيبية والأسية وبعد ذلك يمتد مدى توضيح الإشارات المبينة للدوال لتشتمل على الدوال الأحادية في الزمن المستمر (دوال التبديل). مثلما هو الحال في بعض الكتب وليس كلها، فإن الكتب الدراسية للإشارات والأنظمة، يتم تحديد دوال الخطوة، والإشارة، ونبضة الوحدة، والانحدار. بالإضافة لهذه الدوال تم تحديد دوال المثلث الأحادية والنبضة الدورية الأحادية. النبضة الدورية الأحادية، مع الالتفاف، تحقق طريقة مدمجة خاصة للوصف الحسابي للدوال الدورية الاختيارية.

بعد تقديم إشارات الدوال الجديدة في الزمن المستمر، تمت تغطية الأنواع الشائعة للتحويلات، وتحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني، والتفاضل والتكامل وتطبيقها على دوال الإشارات. بعد ذلك تمت تغطية بعض الخواص للإشارات التي تجعلها غير متغيرة لتحويلات معينة، والزوجية، والفردية، والدورية، وبعض الآثار لهذه الخواص في تحليل الإشارات. الجزء الأخير نماذج على قدرة وطاقة الإشارة.

**الفصل ٣**

الفصل ٣ يتبع مسار مشابه للفصل ٢ فيما عدا تطبيقه على إشارات الزمن المتقطع بدلاً من إشارات الزمن المستمر. لقد قدمنا الدوال الجيبية والأسية في الزمن المتقطع مع التعليق على مشاكل تحديد الدورة في الدوال الجيبية

في الزمن المتقطع. إن ذلك يعتبر أول تعريض للطالب على بعض الآثار لعملية العينة. لقد تم تحديد بعض دوال إشارات في الزمن المستمر مشابهة للدوال الأحادية في الزمن المستمر. بعد ذلك تم استعراض تحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني، والفرق والتراكم لدوال إشارات الزمن المتقطع، مشيرا إلى الآثار الفريدة والمشاكل التي تحدث، خاصة مع التحجيم الزمني لدوال الزمن المتقطع. ينتهي الفصل بتحديد وشرح طاقة الإشارة وقدرتها للإشارات في الزمن المتقطع.

**الفصل ٤**

هذا الفصل يتعامل مع الوصف الحسابي للأنظمة. في البداية تمت تغطية الصور الأكثر شيوعاً لتصنيف الأنظمة، مثل التجانس، والتجميع، والخطية، والثبات الزمني، والسببية، والذاكرة، وعدم الخطية الساكنة والانعكاسية. لقد تم تقديم الأنواع المختلفة للأنظمة التي بها، أو ليست بها هذه الخواص عن طريق الأمثلة لإثبات الخواص المختلفة من الوصف الحسابي للأنظمة.

**الفصل ٥**

يقدم هذا الفصل مفاهيم استجابة النبضة والالتفاف كمكونات للتحليل النظامي لاستجابة الأنظمة الخطية الثابتة، أو غير المتغيرة زمنياً LTI. لقد تم تقديم الخواص الحسابية للالتفاف في الزمن المستمر والطرق البيانية، أو الرسومية لفهم ماذا يعني التكامل الالتفافي. لقد وضحنا أيضاً كيف أن خواص الالتفاف يمكن استخدامها لربط الأنظمة الجانبية الموصلة على التوالي، أو على التوازي في نظام واحد، وكيف ستكون استجابة الصدمة للنظام الكلي. بعد ذلك تم تقديم فكرة دالة العبور عن طريق حساب استجابة نظام LTI للإثارة الجيبية المركبة. هذا الجزء متبوع بتغطية مماثلة لاستجابة الصدمة والالتفاف في الزمن المتقطع.

**الفصل ٦**

هذا هو بداية تعريض الطالب لطرق التحويل. لقد بدأ الفصل بتقديم المفاهيم التي بها يمكن التعبير عن أي إشارة دورية في الزمن المستمر، التي لها فائدة هندسية، عن طريق الربط الخطي للدوال الجيبية الحقيقية والمركبة في الزمن المستمر. بعد ذلك تم استنتاج تتابع فورير بطريقة رسمية باستخدام فكرة التعامد لتوضيح من أين يأتي وصف الإشارة كدالة لعدد من التوافقات المتقطعة (الدالة التوافقية). لقد ذكرنا شروط درشليت Dirichlet conditions لنمكن الطالب من معرفة أن تتابع فورير في الزمن المستمر ينطبق على كل الإشارات العملية في الزمن المستمر، ولكن ليس كل الإشارات في الزمن المستمر التي يمكن تخيلها.

بعد ذلك تم استعراض خواص تتابع فورير. لقد حاولنا أن تكون رموز وخواص تتابع فورير مشابهة بقدر الإمكان، ومكافئة لخواص تحويل فورير الذي يأتي بعد ذلك. تشكل دالة التوافق "زوج من تتابع فورير" مع دالة الزمن. في الطبعة الأولى تم استخدام رموز لدالة التوافق، حيث تم استخدام الحروف الصغيرة لكميات النطاق الزمني والحروف الكبيرة للدوال التوافقية. لسوء الحظ فقد سبب ذلك بعض الغموض؛ لأن دوال توافق الزمن المستمر والمتقطع تبدو متشابهة أو هي نفسها. في هذه الطبعة غيرنا رموز دالة التوافق لإشارات الزمن المستمر لنجعل من السهل تمييزها. هناك جزء عن تقارب تتابع فورير موضحا ظاهرة جيبس Gibb's عند دوال الانفصال، أو عدم التواصل. إننا نشجع الطلاب على استخدام الجداول والخواص لإيجاد الدوال التوافقية، حيث هذا التدريب يجهز الطلاب لعملية مشابهة لإيجاد تحويل فورير وبعد ذلك تحويلات لابلاس وزد z.

الجزء الأساسي التالي في الفصل ٦ يمتد من تتابع فورير إلى تحويل فورير. لقد قدمنا هذا المفهوم عن طريق فحص ما يحدث لتتابع فورير مع تقارب دورة الإشارة إلى المالانهاية، حيث تم تحديد واستنتاج تحويل فورير في الزمن المستمر كتعميم لتتابع فورير في الزمن المستمر. بعد ذلك تم تغطية كل الخواص المهمة لتحويل فورير في الزمن المستمر. لقد اتخذنا مساراً عاماً إلى اتفاقين رمزيين مختلفين تتم رؤيتهما في كتب الإشارات والأنظمة، وأنظمة التحكم، ومعالجة الإشارات الرقمية، وأنظمة الاتصالات، والتطبيقات الأخرى لطرق فورير مثل: معالجة الصور وفورير الضوئي: إنه إما استخدام التردد الدوري، f، أو التردد الزاوي ω. لقد تم استخدام كل منهما للتأكيد على أن كليهما يتعلق بالآخر من خلال تغيير متغير. نعتقد أن ذلك يجهز الطالب، أو يعده بطريقة أفضل ليرى كل من الصورتين في الكتب الأخرى في كلياتهم، وفي أعمالهم المتخصصة.

**الفصل ٧**

يقدم هذا الفصل تتابع فورير في الزمن المتقطع discrete time Fourier series, DTFS، وتحويل فورير المتقطع discrete Fourier transform, DFT وتحويل فورير في الزمن المتقطع discrete time Fourier transform DTFT، حيث تم استنتاجهم وتحديدهم بطريقة مشابهة لما حدث في الفصل ٦. إن DTFS و DFT، متشابهان تقريباً. وتم التركيز على DFT نتيجة استخدامه بكثرة في المعالجة الرقمية للإشارات. كما ركزنا على الفروق المهمة الناتجة عن الفروق بين الإشارات في الزمن المستمر والزمن المتقطع، وبالذات المجموع المحدد المدى DFT على العكس من مدى المجموع غير المحدد في CTFS. لقد أشرنا أيضاً إلى أهمية حقيقة أن DFT يربط بين مجموعة محددة من الأعداد مع مجموعة محددة أخرى من الأعداد، مما يجعلها قابلة للحساب الرقمي المباشر بالآلة. لقد تم شرح تحويل فورير السريع كخواريزم عالي الفعالية لحساب DFT. كما هو الحال في الفصل ٦، فقد تم استخدام كل من صور التردد الدوري والزاوي، مما يؤكد العلاقة بينهما. لقد تم استخدام F و Ω في الترددات في الزمن المتقطع لتميزهما من f و ω، اللذين يتم

استخدامهما في الزمن المستمر. ولسوء الحظ، فإن بعض المؤلفين يعكسون هذه الرموز. إلا أن الاستخدام المقترح هنا يتوافق مع أغلب الكتب الدراسية عن الإشارات والأنظمة. وهنا مثال آخر عن عدم التوحيد للرموز في هذا المجال. والجزء الأخير المهم في هذا الفصل هو مقارنة الطرق المختلفة لفورير، حيث نؤكد خصوصاً على الازدواج بين العينة في نطاق معين، والتكرار الدوري في النطاق الآخر.

**الفصل ٨**

يقدم هذا الفصل تحويل لابلاس. لقد تم التعامل مع تحويل لابلاس من وجهتي نظر مختلفتين، كتعميم لتحويل فورير على فصيل أكبر من الإشارات وكنتيجة تنبع من إثارة نظام خطي غير متغير زمنياً بإشارة أسية مركبة. لقد بدأنا بتحديد تحويل لابلاس الثنائي مع شرح أهمية مناطق التقارب، وبعد ذلك تم تحديد تحويل لابلاس الأحادي، واستنتاج كل الخواص المهمة لهذا التحويل. لقد تم استعراض طريقة التحليل بالكسور الجزيئية بالكامل لحساب تحويل لابلاس العكسي، ثم أوضحنا أمثلة على حل المعادلات التفاضلية مع القيم الأولية باستخدام صورة تحويل لابلاس الأحادية.

**الفصل ٩**

نقدم في هذا الفصل تحويل z. يتوازى تقديم هذا الفصل مع ما حدث في تحويل لابلاس فيما عدا التطبيق على الإشارات والأنظمة في الزمن المتقطع. في البداية تم تحديد التحويل المزدوج مع شرح مناطق التقارب، وبعد ذلك تم تحديد التحويل الأحادي. لقد تم استنتاج كل الخواص المهمة، وأوضحنا التحويل العكسي باستخدام التحليل بالكسور الجزيئية وحل المعادلات الفرقية مع القيم الأولية، أو الابتدائية. لقد أوضحنا أيضاً العلاقة بين تحويل لابلاس وتحويل زد، وهي فكرة مهمة في تقريب أنظمة الزمن المستمر عن طريق أنظمة الزمن المتقطع في الفصل ١٥.

**الفصل ١٠**

إن هذا أول استعراض للتقابل بين إشارات الزمن المستمر وإشارات الزمن المتقطع الذي يتم عن طريق أخذ العينات، أو العينة. الجزء الأول يغطي كيف تتم العينة عموماً في الأنظمة الحقيقية باستخدام العينة والمسك ثم التحويل من تماثلي إلى رقمي. يبدأ الجزء الثاني بطرح سؤال عن عدد العينات الكافية لكي يتم توصيف إشارة الزمن المستمر. بعد ذلك تمت إجابة السؤال عن طريق استنتاج نظرية العينة. بعد ذلك تم شرح طرق الاستيفاء interpolation نظرياً وعملياً، والخواص الخاصة بالإشارات الدورية المحدودة المجال. لقد تم عمل تقدم في العلاقة بين CTFT لإشارات الزمن المستمر و DFT لمجموعة من العينات المحددة الطول المأخوذة منها. بعد ذلك أوضحنا كيف أن DFT يمكن استخدامه لتقريب CTFT لإشارة قدرة، أو إشارة دورية. الجزء المهم التالي لذلك يستكشف استخدام DFT في التقريب الرقمي لعمليات معالجة الإشارة الشائعة.

**الفصل ١١**

يغطي هذا الفصل المفاهيم المختلفة لاستخدام CTFT، و DTFT في تحليل الاستجابة الترددية. العناوين المهمة هي المرشحات، ومخططات بود Bode diagrams، والمرشحات العملية الفعالة، وغير الفعالة في الزمن المستمر، والمرشحات الأساسية في الزمن المتقطع.

**الفصل ١٢**

يغطي هذا الفصل المبادىء الأساسية لأنظمة اتصالات الزمن المستمر، بما في ذلك التعدد الترددي، التعديل وعكس التعديل المقداري الأحادي ومزدوج المجال الجانبي، والتعديل الزاوي. هناك أيضاً جزء مختصر عن التعديل المقداري وعكسه في أنظمة الزمن المتقطع.

**الفصل ١٣**

هذا الفصل مخصص لتطبيقات تحويل لابلاس بما في ذلك التعبير عن الأنظمة بالمخططات الصندوقية في النطاق الترددي المركب، واستقرار الأنظمة، والتوصيلات بين الأنظمة، وأنظمة التغذية العكسية بما في ذلك التتبع المكاني للجذر، واستجابة النظام للإشارات القياسية، وأخيراً البناء القياسي لأنظمة الزمن المستمر.

**الفصل ١٤**

هذا الفصل عن تطبيق تحويل زد z بما في ذلك تمثيل الأنظمة بالمخططات الصندوقية في النطاق الترددي المركب، واستقرار النظام، والتوصيلات البينية للأنظمة، وأنظمة التغذية المرتدة التي تشتمل على التتبع المكاني للجذر، واستجابة الأنظمة للإشارات القياسية، وأنظمة البيانات المتقطعة زمنياً (المعيننة) والبناء القياسي لأنظمة الزمن المتقطع.

**الفصل ١٥**

يغطي هذا الفصل التحليل والتصميم لبعض الأنواع الشائعة من المرشحات التماثلية والرقمية العملية. الأنواع التماثلية للمرشحات، هي: البترورث، والشيبيشيف بنوعيه I و II والبيضاوي (الكايور Cauer). الجزء الخاص بالمرشحات الرقمية يغطي الأنواع الأكثر شيوعاً لطرق محاكاة المرشحات التماثلية، بما في ذلك ثبات الصدمة والخطوة، والفروق المحددة، وتحويل زد z المتوافق، والتعويض المباشر، وتحويل زد ثنائي الخطية، واستجابة الصدمة المقطوعة والتصميم الرقمي بطريقة مكليلان McClellan.

**الفصل ١٦**

هذا الفصل يغطي التحليل بالحالة الفراغية في كل من أنظمة الأزمنة المستمرة والمتقطعة. هذه العناوين عبارة عن معادلات أنظمة وخرج، ودوال عبور أو نقل، وتحويلات لمتغيرات الحالة والقطرية.

**الملحقات**

هناك سبعة ملحقات عن معادلات رياضية مفيدة، وجداول للأربعة تحويلات فورير، وجداول لتحويل لابلاس، وجداول لتحويل زد z.

**الاستمرارية**

لقد تم هيكلة الكتاب بحيث يسهل تخطي بعض العناوين بدون فقد للاستمرارية. عناوين الزمن المستمر والزمن المتقطع تمت تغطيتها بالتبادل. والتحليل في الزمن المستمر يمكن تغطيته دون الرجوع إلى الأزمنة المتقطعة. أيضاً، فإن آخر ستة فصول يمكن حذفها في حالة الإعداد لمقرر مختصر.

**المراجعات والتحرير**

هذا الكتاب يدين بالكثير للمراجعين، وخاصة هؤلاء الذين أعطوا الوقت وقدموا النقد والمقترحات بالتحسين، إنني حقاً مدين لهم بالفضل. إنني أيضاً مدين بالفضل للعديد من الطلاب الذين حضروا محاضراتي على مدار العديد من السنوات. إنني أعتقد أن العلاقة بيننا أكثر تكافلية وحميمية مما يعتقدون. بمعنى، أنهم تعلموا مني تحليل الإشارات والأنظمة، وأنا تعلمت منهم كيف أدرس الإشارات والأنظمة لهم. إنني لا أستطيع أن أحصي كم مرة تم سؤالي العديد من الأسئلة المميزة من الطلاب التي تعكس ليس فقط أن الطلاب لم يكونوا يفهمون مفهوماً أو معني معين مني، ولكن أنني لم أكن أفهم هذا المعني جيداً كما كنت أعتقد قبل ذلك.

**طريقة الكتابة**

يعتقد كل مؤلف أنه وجد طريقة أفضل لعرض المادة العلمية التي يمكن للطلاب أن يستوعبوها، وأنا لا أختلف عن هؤلاء. لقد قمت بتدريس هذه المادة العلمية على مدار العديد من السنوات ومن خلال الخبرة في تصحيح الاختبارات وجدت ما يمكن للطلاب أن يستوعبوه بسهولة وما لا يمكن. لقد بذلت الساعات التي لا يمكن عدها في مكتبي في مقابلة الطلاب، كل على حدة، أشرح لهم هذه المفاهيم، ومن خلال هذه الخبرة، فقد وجدت ما يجب أن يقال في هذا الكتاب. من خلال كتابتي حاولت أن أتكلم ببساطة ومباشرة مع القارئ بطريقة حوارية مستقيمة، محاولاً أن أتجنب الرسميات إلى أقصى درجة ممكنة، ومتوقعاً للمفاهيم الخاطئة المعتادة ومحاولاً الكشف عنها. طرق التحويل ليست أفكاراً واضحة، ومع التعرض الأول لها، يمكن للطلاب أن يتعثروا في مستنقع محير من التجريدات، وفقدان الرؤية للهدف، الذي هو تحليل استجابة الأنظمة للإشارات. لقد حاولت (كما يفعل كل مؤلف)، أن أجد الربط السحري بين سهولة الوصول للهدف والصرامة الرياضية، نتيجة لأهمية كلٍ منهما. إنني أعتقد أن كتابتي واضحة ومباشرة، ولكنك أيها، القارىء، ستكون الحكم الأخير فيما إذا كان ذلك حقيقيا أم لا.

**التمارين**

كل فصل به مجموعة من التمارين التي يصاحبها الحلول ومجموعة أخرى من التمارين بدون حلول. الغرض من المجموعة الأولى أن تكون للتدريب، والمجموعة الثانية تكون تمارين أكثر تحدياً أو صعوبة.

**ملاحظات ختامية**

كما أوضحت في استعراض الطبعة الأولى، فإنني أرحب بأي نقد، أو تصحيح أو اقتراحات. كل التعليقات، بما في ذلك التعليقات التي لا أوافق عليها، والتعليقات التي لا تتوافق مع الآخرين، سيكون لها صدى بناءً على الطبعة القادمة لأنها بالتأكيد تشير إلى مشكلة. إذا كان هناك شيء لا يبدو لك صحيحاً، فإنه من المحتمل سيضايق الآخرين أيضا، وهدفي كمؤلف، أن أجد طريقة لحل هذه المشكلة. ولذلك فإنني أشجعك أن تكون مباشراً وواضحاً في أي ملاحظات عن أي شيء تعتقد أنه يجب تغييره ولا تتردد في ذكر أي خطأ قد تجده، من أتفه الأخطاء إلى أكثرها أهمية.

أود هنا أن أشكر المراجعين التاليين للمساعدة القيمة في إظهار الطبعة الثانية بصورة أفضل.

سكوت أكتن، جامعة فرجينيا

آلان أ. دسروتشرز، معهد رينسلير التقني

بروس إ. ديون، جامعة ولاية جراند فالي

هيون كون، جامعة أندروز

إرشن سيربدين، جامعة تكساس A&M

جيان شيو يانج، جامعة مينيسوتا

ميخائيل ج. روبرتس

أستاذ بقسم الكهرباء وهندسة الحاسب

جامعة تينيسي في كنوكسفيلي

mjr@utk.edu

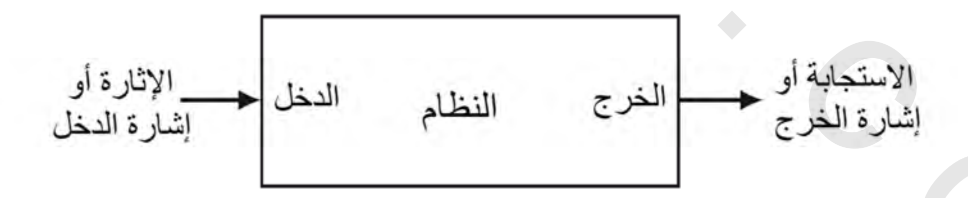
# المحتويات

# مقدمة

### (١,١)تعريف الإشارات والأنظمة

تتغير أي ظاهرة طبيعية زمنياً ويمكنها أن تعطي معلومات تعتبر إشارة. من أمثلة الإشارات الصوت البشري، ولغة الإشارة، وأكواد أو شفرات موريس، وإشارات المرور، والجهد على أسلاك التليفون، والمجال الكهربي المنبعث من مرسلات الراديو أو التليفزيون، والتغير في شدة الضوء في شعيرة ضوئية في شبكة التليفونات أو الحاسبات. والضوضاء تشبه الإشارة في أنها ظاهرة طبيعية تتغير زمنياً، ولكنها عادة لا تحمل معلومات مفيدة وتعتبر غير مرغوب فيها.

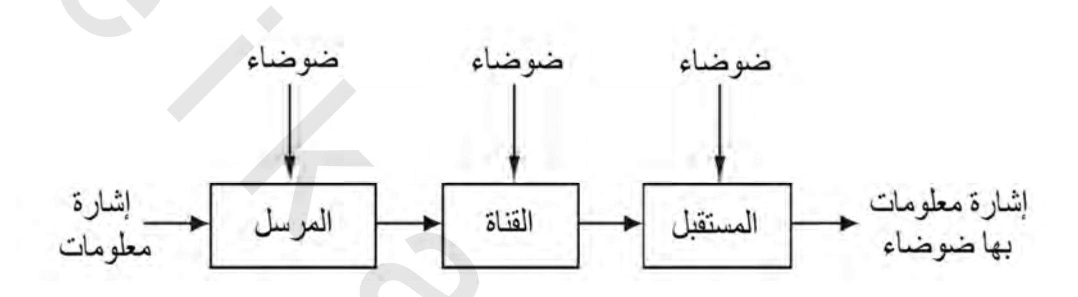
الإشارات يتم العمل عليها بواسطة الأنظمة. عند تطبيق واحد، أو أكثر من الإثارات، أو إشارات الدخول على واحد أو أكثر من مداخل النظام، فإن النظام ينتج واحداً، أو أكثر من الاستجابات، أو إشارات الخرج عند مخارج النظام. يبين شكل (١,١) مخطوطاً صندوقياً لنظام وحيد الدخل وحيد الخرج.




**شكل رقم (١,١) مخطط صندوقي لنظام وحيد الدخل وحيد الخرج**

يقوم المرسل في أي نظام للاتصالات بإنتاج إشارة، ويحاول المستقبل، والتقاطها القناة هي المسار الذي تأخذه الإشارة من المرسل حتى المستقبل. حتماً يكون هناك ضوضاء تتم إضافتها على المرسل، أو على القناة والمستقبل،

ويكون ذلك عند العديد من النقاط، كما في شكل (١,٢) المرسل، والقناة، والمستقبل، كلها عبارة عن مكونات للأنظمة الجانبية في النظام الكلي، أو العام. الأجهزة العلمية هي أنظمة تقيس أي ظاهرة طبيعية (الحرارة، والضغط، والسرعة، وإلخ) وتقوم بتحويلها إلى جهد، أو تيار، أو إشارة. أنظمة التحكم في الأبنية التجارية كما في شكل (١,٣)، وأنظمة التحكم في المصانع كما في شكل (١,٤)، وماكينات المزارع الحديثة كما في شكل (١,٥)، ونظام الملاحة في الطائرات، والتحكم في الإشعال وضخ الوقود في السيارات، وهكذا، كلها أنظمة تعمل على الإشارات.




**شكل رقم (١,٢) نظام اتصالات**



**شكل رقم (١,٣) مبانٍ إدارية حديثة**



**شكل رقم (١,٤) حجرة تحكم نموذجية في أحد المصانع**



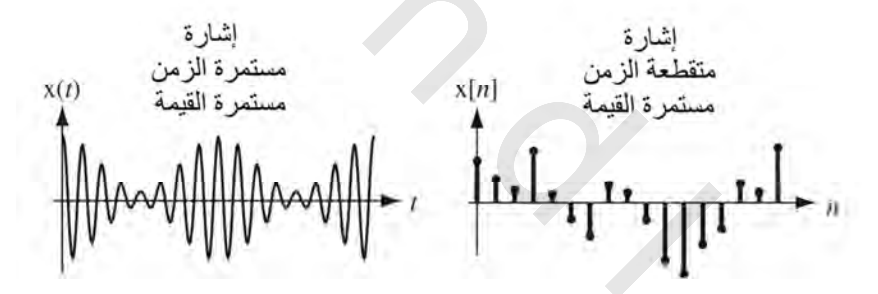
**شكل رقم (١,٥) جرار مزرعة حديثة بشاحنة مغلقة**

إن مصطلح النظام يشتمل على أشياء مثل سوق الأوراق المالية ، والحكومة ، والطقس ، والجسم البشري وما شابه ذلك ، فكلها تستجيب عند إثارتها. بعض الأنظمة تم تحليلها بالتفصيل ، والبعض يمكن تحليلها بالتقريب ، ولكن البعض يكون على درجة من التعقيد أو يكون صعب القياس بحيث أننا بصعوبة نعرف ما يكفي لفهمها.

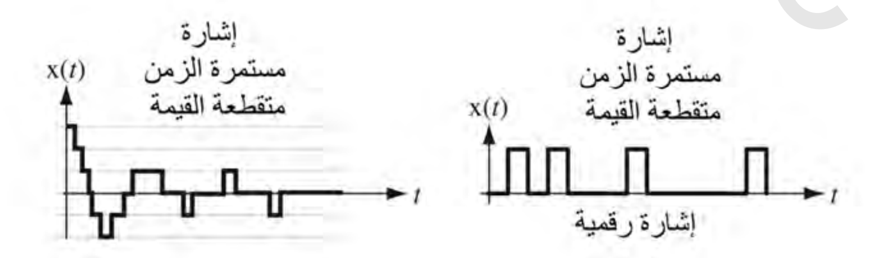
## (١,٢)أنواع الإشارات

هناك العديد من الأنواع العريضة من الإشارات : الزمن المستمر ، والزمن المتقطع ، والقيمة المستمرة ، والقيمة المتقطعة ، والعشوائية ، وغير العشوائية. إشارة الزمن المستمر تكون محددة عند كل لحظة في الزمن وفي خلال فترة زمنية معينة. اسم آخر شائع لبعض إشارات الزمن المستمر هو الإشارة التماثلية ، و تكون فيه تغيرات الإشارة مع الزمن مناظرة (متناسبة) لأحد الظواهر الطبيعية. كل الإشارات التماثلية تكون إشارات مستمرة الزمن ولكن ليس كل إشارات الزمن المستمر تكون إشارات تماثلية كما في الأشكال من شكل (١,٦) حتى شكل (١,٨).

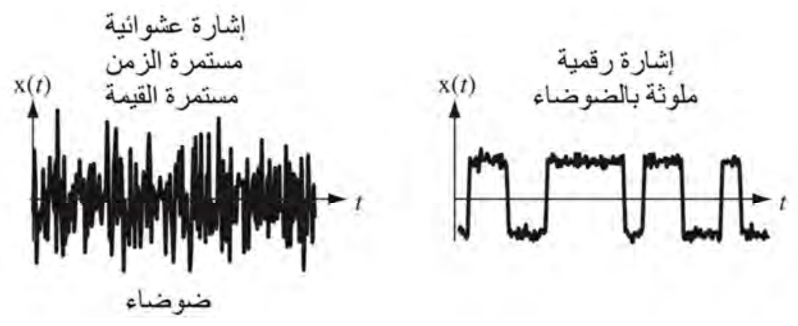
أخذ عينات من أي إشارة هو اكتساب قيم من إشارة الزمن المستمر عند نقاط ، أو لحظات متقطعة من الزمن. مجموعة العينات هذه تكون إشارة الزمن المتقطع. أي إشارة متقطعة الزمن يمكن الحصول عليها أيضاً عن طريق نظام متقطع بطبيعته ينتج قيم الإشارات عند أزمنة متقطعة كما في شكل (١,٦).




**شكل رقم (١,٦) أمثلة على إشارات الزمن المستمر والزمن المتقطع**




**شكل رقم (١,٧) أمثلة على إشارات الزمن المستمر والقيمة المتقطعة**



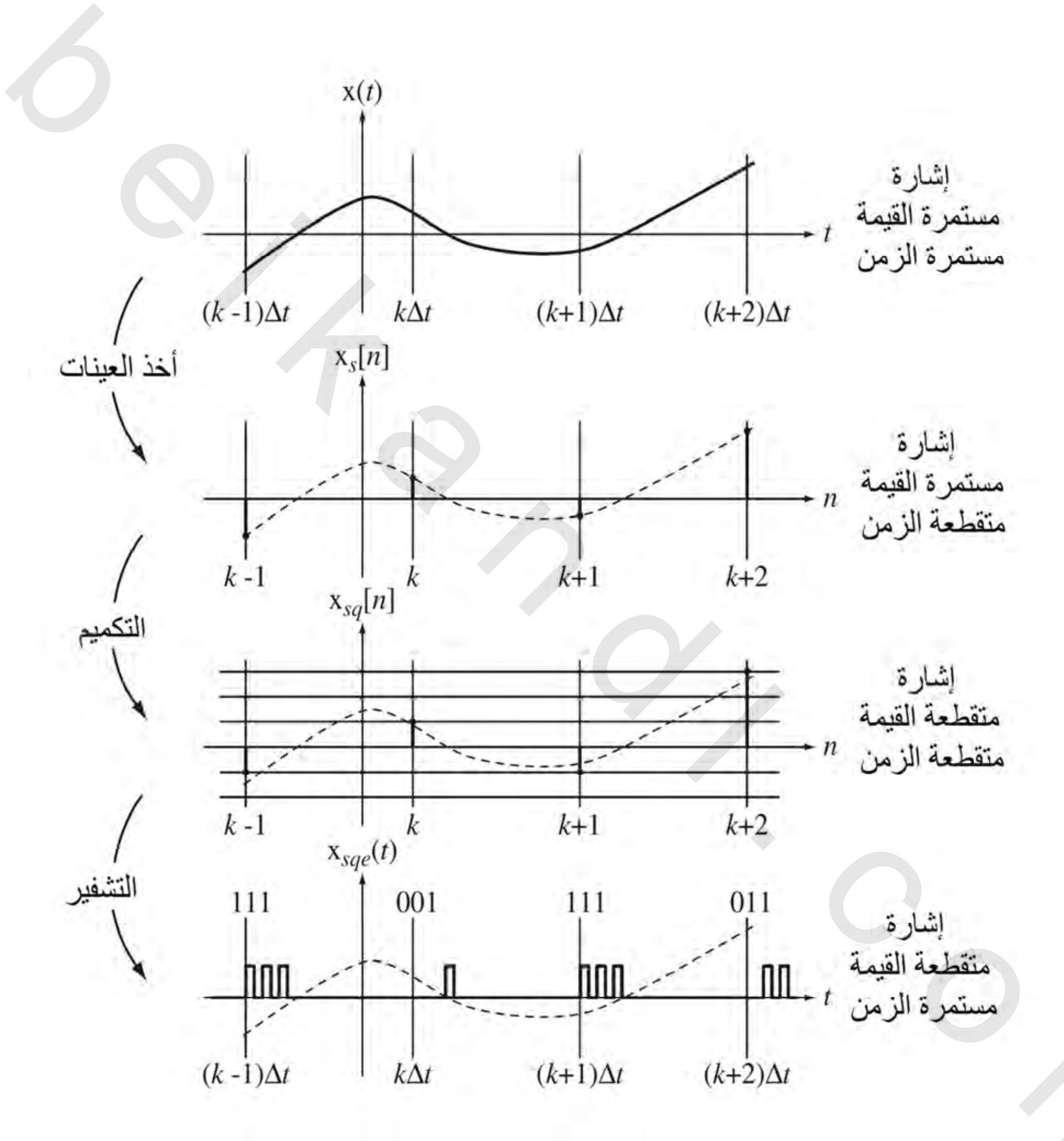

**شكل رقم (١,٨) أمثلة على الضوضاء، وإشارة رقمية ملوثة بالضوضاء**

الدالة المستمرة القيمة هي الدالة التي يمكن أن تأخذ أي قيمة خلال مدى معين مستمر أو متواصل من القيم. في هذا المدى المتواصل من القيم يمكن لأي قيمتين أن يكونا متقاربتين بأي درجة. الأرقام الحقيقية تشكل تواصلاً بامتداد لا نهائي. الأرقام الحقيقية بين الصفر والواحد تشكل تواصلاً بامتداد محدود. كل واحد منهما يكون مجموعة من عدد لا نهائي من الأرقام كما في شكل(١,٦) حتى شكل (١,٨).

الإشارة متقطعة القيمة يمكنها أن تأخذ قيماً من مجموعة محددة أو مقطعة فقط من القيم. في مجموعة من القيم المتقطعة يكون مقدار الفرق بين أي قيمتين متتاليتين أكبر من رقم موجب معين، ومجموعة الأرقام الصحيحة تعتبر مثالاً على ذلك. الإشارات متقطعة الزمن يتم إرسالها في العادة كإشارات رقمية، وهي تتابع من قيم الإشارة متقطعة الزمن في صورة أرقام مشفرة بطريقة معينة. إن مصطلح أو كلمة رقمي يتم استخدامها أحياناً بطريقة فضفاضة لتشير إلى الإشارات المتقطعة القيم التي لها اثنان فقط من القيم الممكنة. الأرقام في هذا النوع من الإشارات الرقمية يتم إرسالها عن طريق إشارات مستمرة الزمن. في هذه الحالة، تكون مصطلحات الزمن المستمر والتماثلي ليست مترادفة. الإشارة الرقمية من هذا النوع تكون إشارة مستمرة الزمن، ولكنها ليست تماثلية؛ لأن قيمها تتغير مع الزمن بطريقة ليست مكافئة مباشرة للظواهر الطبيعية كما في شكل (١,٦) حتى شكل (١,٨). الإشارة العشوائية لا يمكن التنبؤ بها بدقة، ولا يمكن وصفها بأي دالة حسابية، بينما الإشارة القطعية، أو المحددة فيمكن وصفها حسابياً. الاسم الشائع للإشارة العشوائية هو الضوضاء كما في شكل (١,٦) حتى شكل (١,٨).

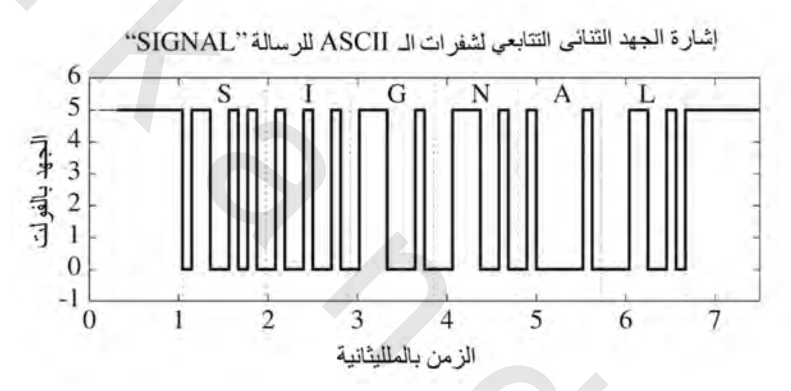
في المعالجة العملية للإشارات يكون من الشائع جداً اكتساب الإشارة للمعالجة بأخذ عينات منها عن طريق الحاسب، ثم تكميمها، ثم تشفيرها كما في شكل (١,٩) الإشارة الأصلية تكون مستمرة القيمة، مستمرة الزمن. في العينة يتم اكتساب قيم العينات عند أزمنة متقطعة وهذه القيم تشكل إشارة مستمرة القيم، متقطعة الزمن. عملية التكميم تقوم بتقريب قيمة كل عينة لأقرب عضو من مجموعة من القيم المتقطعة المحددة، منتجة إشارة متقطعة القيمة متقطعة الزمن. كل قيمة من قيم الإشارة في مجموعة القيم المحددة المتقطعة عند زمن محدد يتم تحويلها إلى تتابع

من النبضات المربعة التي تشفر هذه القيمة في صورة رقم ثنائي ، منتجاً إشارة متقطعة القيمة مستمرة الزمن ، تسمى في العادة الإشارة الرقمية. هذه الخطوات الموضحة في شكل (١،٩) يتم في العادة تنفيذها عن طريق أداة ، أو جهاز يسمى المحول التماثلي الرقميanalog to digital converter, ADC.

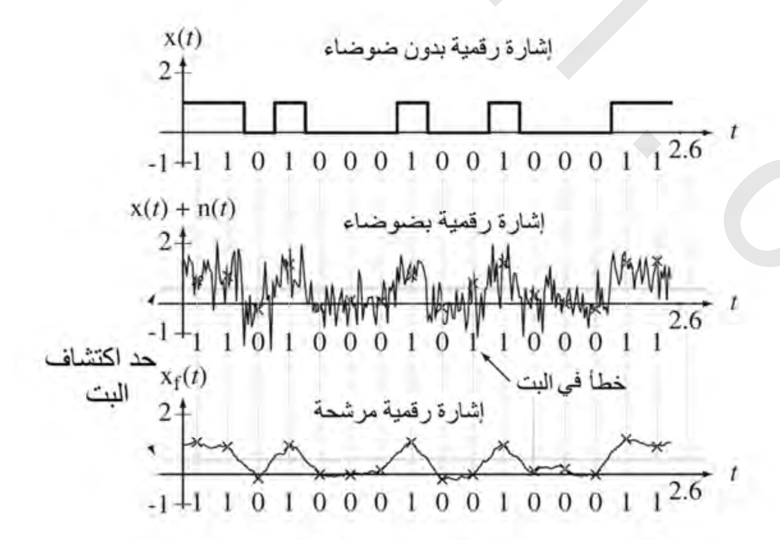



**شكل رقم (١،٩) أخذ العينات، والتكميم، والتشفير لإشارة لتوضيح الأنواع المختلفة من الإشارة**

استخدام شائع للإشارات الثنائية هو لإرسال الرسائل النصية باستخدام الكود الأمريكي القياسي لتبادل المعلومات ASCII. يتم تشفير الحروف الهجائية، والأرقام من صفر حتى تسعة، وأحرف التشكيل والعديد من أحرف التحكم غير المكتوبة، والتي مجموعها 128 حرفاً، كلها في تتابع من سبعة بتات ثنائية. يتم إرسال السبعة بتات بالتتابع، مسبوقة ببت للبداية متبوعة ببت واحدة، أو اثنين للتوقف وذلك بغرض تحقيق التزامن. نموذجياً، في التوصيلات السلكية المباشرة بين الأجهزة الرقمية، يتم تمثيل هذه البتات بجهود عالية (من 2 حتى 5 فولت) بالنسبة للواحد الرقمي، وجهود منخفضة (حوالي صفر) للصفر الرقمي. في التراسل غير المتزامن باستخدام بت بداية واحدة وبت واحدة للتوقف، أو النهاية، فإن إشارة الرسالة، كفولت مع الزمن يمكن أن تكون كما هو مبين في شكل (١,١٠).




**شكل رقم (١,١٠) إشارة الجهد لتتابع ثنائي غير متزامن بشفرات ASCII للكلمة** SIGNAL



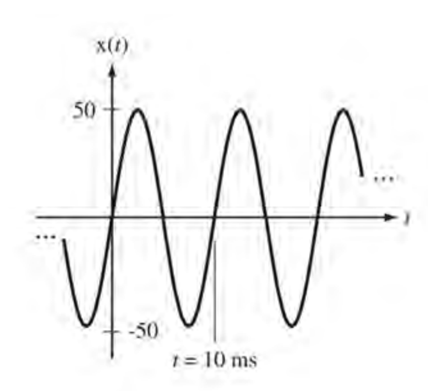

**شكل رقم (١,١١) استخدام مرشح لتقليل معدل الخطأ في البتات في الإشارة الرقمية**

الإشارات الرقمية تكون مهمة في تحليل الإشارات نتيجة انتشار الأنظمة الرقمية. تكون الإشارات عموما الرقمية محصنة أفضل ضد الضوضاء عن الإشارات التماثلية. في اتصالات الإشارات الرقمية يمكن الكشف عن البتات بنقاء عالٍ حتى في وجود الضوضاء الكبيرة. في العادة يتم الكشف عن قيم البتات في سيل متدفق من البتات عن طريق مقارنة قيمة الإشارة عند زمن محدد مسبقاً لهذه البت مع حد فاصل معين. إذا كانت قيمة الإشارة أعلى من الحد الفاصل فإنه يتم اعتبارها واحداً رقمياً1، وإذا كانت تحت الحد الفاصل فإنه يتم اعتبارها صفراً رقمياً 0 في شكل (١,١١)، الإكسات x's تحدد قيمة الإشارة عند زمن الكشف، وعند تطبيق هذه الطريقة على الإشارات الرقمية الملوثة بالضوضاء، فإن واحدة من البتات تم اكتشافها خطأ. ولكن عند معالجة الإشارة عن طريق مرشح، فإن كل البتات يتم الكشف عنها بدون خطأ. الإشارة الرقمية المرشحة لا تبدو نظيفة أو خالية من الضوضاء بالمقارنة مع الإشارة الرقمية الخالية أصلا من الضوضاء، ولكن البتات ما زالت يمكن الكشف عنها باحتمالية خطأ منخفضة جداً. وهذا هو السبب الأساسي في أن الإشارات الرقمية يكون لها حصانة أفضل ضد الضوضاء عن الإشارات التماثلية. مقدمة عن تحليل وتصميم المرشحات تم تقديمها في الفصول ١١ و ١٥.

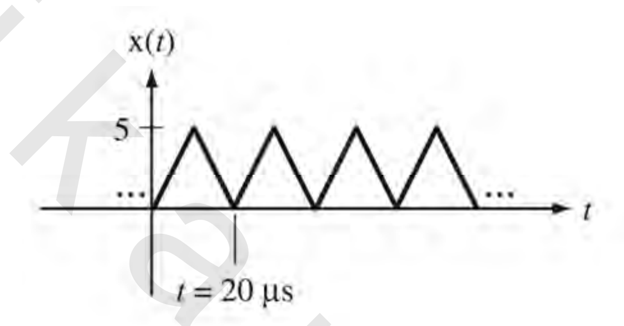
سنعتبر كلاً من الإشارات المستمرة الزمن والمتقطعة الزمن، ولكننا (في الغالب) سنهمل تأثيرات تكميم الإشارة وسنعتبر أن كل الإشارات ستكون مستمرة القيمة. أيضا، فإننا لن نعتبر تحليل الإشارات العشوائية مباشرة، على الرغم من أن الإشارات العشوائية سيتم استخدامها أحيانا في التوضيح.

الإشارات الأولى التي سندرسها هي إشارات مستمرة الزمن. يمكن وصف بعض الإشارات المستمرة في الزمن عن طريق دوال مستمرة زمنياً، فمثلاً يمكن وصف الإشارة $x(t)$ بالدالة $x(t)=50\sin(200\pi t)$في الزمن المستمر $t$، وهذا يعتبر وصفاً دقيقاً للإشارة عند كل لحظة في الزمن. يمكن أيضاً وصف الإشارة بيانياً كما في شكل (١,١٢).

هناك العديد من الإشارات المستمرة زمنياً التي ليس من السهل وصفها حسابياً مثل: الإشارة الموضحة في شكل (١,١٣). الأشكال الموجية كالموضحة في شكل (١,١٣) تحدث في العديد من الأجهزة وأنظمة الاتصالات. باستخدام التحديد لبعض دوال الإشارات وعملية تسمى الالتفاف convolution يمكن وصف هذه الإشارة بصورة مدمجة، وتحليلها والتعامل معها حسابياً. الإشارات المستمرة زمنياً التي يمكن وصفها بدوال حسابية يمكن تحويلها إلى نطاق آخر يسمى النطاق الترددي من خلال تحويل فورير في الزمن المستمر. التحويل في هذا السياق يعني تحويل الإشارة إلى النطاق الترددي، وهذا يعتبر أداة مهمة في تحليل الإشارات، تسمح بأن تكون خواص، أو مميزات معينة للإشارات أكثر وضوحاً وأكثر سهولة للتعامل معها عن حالتها في التطاق الزمني. (في النطاق الترددي، يتم وصف الإشارات بما تحتويه من ترددات). بدون التحليل في النطاق الترددي، فإن تحليل وتصميم العديد من الأنظمة من الممكن أن يكون أكثر صعوبة.

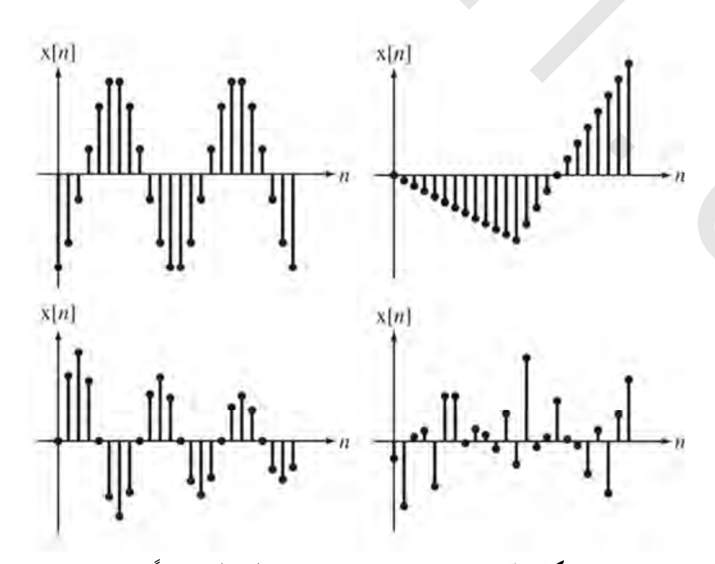



شكل رقم (١,١٢) إشارة مستمرة زمنياً موصوفة بدالة حسابية




شكل رقم (١,١٣) إشارة ثانية مستمرة زمنياً

الإشارات المقطعة زمنياً يتم تحديدها عند نقاط متقطعة في الزمن. ويبين شكل (١,١٤) بعض الإشارات المقطعة زمنياً.




شكل رقم (١,١٤) بعض الإشارات المقطعة زمنياً

كل الإشارات التي تم فرضها حتى الآن تم وصفها عن طريق دوال حسابية. هناك فصيل مهم من الإشارات وهو الإشارات التي تكون دوال في الفراغ بدلاً من الزمن مثل الصور. تعتمد معظم نظريات الإشارات، والمعلومات التي تحتويها، وكيفية معالجتها عن طريق الأنظمة في هذا الكتاب على الإشارات التي تمثل تغيرات في ظواهر طبيعية مع الزمن. ولكن هذه النظريات والطرق يمكن تطبيقها أيضاً، بعد تعديلات بسيطة، في معالجة الصور. يتم وصف الإشارات الزمنية عن طريق تغيرات في الظواهر الطبيعية كدالة في متغير مستقل واحد وهو الزمن. الإشارات المساحية، أو الصور، يتم وصفها عن طريق تغيرات في الظواهر الطبيعية كدالة في اثنين من المتغيرات المساحية المستقلة المتعامدة، يتم الإشارة إليها عادة بالمتغيرين x و y. الظواهر الطبيعية الأكثر شيوعاً هي الضوء، أو أي شيء يؤثر على نقل أو انعكاس الضوء، ولكن طرق معالجة الصور يمكن تطبيقها أيضاً على أي شيء يمكن وصفه بدالة حسابية من متغيرين مستقلين.




**شكل رقم (١,١٥) مثال على معالجة الصور من أجل الكشف عن أو استخلاص المعلومات**

**(صورة أصلية بأشعة إكس ونسخة معالجة منها تم عملها عن طريق مكتبة أنظمة التصوير، والروبوتات، والذكاء بقسم الكهرباء وهندسة الحاسب بجامعة تينيسي في كنوكسفيل).**

تاريخيا، فإن تطبيقات طرق معالجة الصور قد تأخرت وظهرت بعد تطبيقات طرق معالجة الإشارات نتيجة أن كمية المعلومات التي يجب معالجتها لتجميع المعلومات من أي صورة تكون أكبر بكثير من كمية المعلومات المطلوب معالجتها لتجميع معلومات من الإشارات الزمنية، ولكن الآن أصبحت تقنيات معالجة الصور وسيلة عملية في العديد من المواقف حيث تتم هذه المعالجة عن طريق الحاسب. بعض عمليات معالجة الصور البسيطة يمكن إجراؤها مباشرة عن طريق الطرق الضوئية، وهذه بالطبع يتم تنفيذها بسرعات عالية (بسرعة الضوء!). ولكن مثل هذه الطرق الضوئية المباشرة تكون محدودة جداً في مرونتها بالمقارنة بطرق المعالجة الرقمية على الحاسبات.

شكل(١.١٥) يبين صورتين، على اليسار صورة بأشعة إكس غير معالجة لحقيبة تمر عند نقطة اختبار في أحد المطارات. توجد على اليمين الصورة نفسها بعد معالجتها عن طريق بعض عمليات الترشيح على الصورة للكشف عن وجود أسلحة. هذا الكتاب لن يتطرق لمعالجة الصور بأي عمق ولكن سيتم استخدام بعض الأمثلة على معالجة الصور لتوضيح بعض مفاهيم معالجة الإشارة.

إن فهم كيفية حمل الإشارات للمعلومات وكيف أن الأنظمة تعالج هذه الإشارات يعتبر أساسا للعديد من المجالات الهندسية. طرق تحليل الإشارات التي تتم معالجتها عن طريق الأنظمة تكون موضوعات هذا الكتاب. يمكن اعتبار هذه الموضوعات ككتاب في الرياضيات التطبيقية أكثر منها موضوعات تغطي بناء بعض الأجهزة المفيدة، ولذلك فإن فهم هذه الموضوعات يكون في غاية الأهمية للتصميم الناجح لهذه الأجهزة المفيدة. الموضوعات التالية تعرض البناء من التعريفات والمفاهيم الأساسية حتى المدى الكامل لطرق التحليل في الأزمنة المستمرة والمقطعة لهذه الإشارات في الأنظمة.

## (١,٣) أمثلة على الأنظمة

هناك العديد من الأنواع المختلفة للإشارات والأنظمة، وفيما يلي سنشرح بعض الأمثلة القليلة عن الأنظمة. سيكون الشرح هنا محدوداً على الموضوعات الوصفية للأنظمة مع بعض التوضيحات لسلوك هذه الأنظمة تحت بعض الظروف المعينة. وسنعود مرة أخرى لهذه الأنظمة في الفصل ٤ ونشرح بطريقة أكثر تفصيلاً موضوعات نمذجة الأنظمة.

### النظام الميكانيكي

رجل يقفز بالحبل من على جسر على أحد الأنهار، هل سيبتل أم لا؟ إن الإجابة تعتمد على العديد من العوامل التي منها :

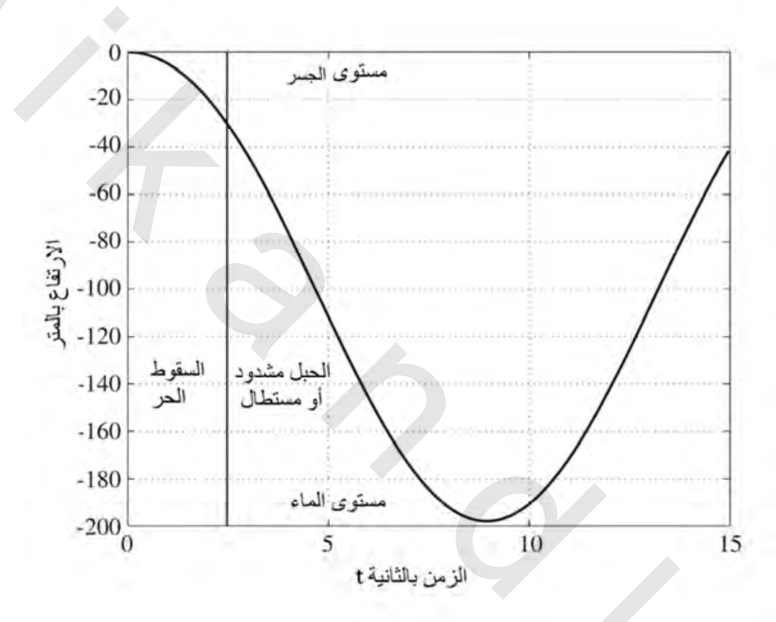
١- طول الرجل ووزنه.
٢- إرتفاع الجسر فوق الماء.
٣- طول ومرونة حبل القفز.

عندما يقفز الرجل من على الجسر فإنه يسقط سقوطا حراً حتى يمتد حبل القفز إلى أقصى طول له بحيث لا يمكن أن يمتد، أو يستطيل بعده. بعد ذلك تتغير ديناميكية النظام نتيجة وجود قوة أخرى تؤثر على الرجل، وهي مقاومة حبل القفز للاستطالة، وأنه لم يعد الآن في حالة السقوط الحر. يمكننا أن نكتب ونحل معادلة تفاضلية للحركة ونحدد إلى أي مدى سيسقط الرجل إلى أسفل قبل أن يجذبه الحبل مرة أخرى إلى أعلى. المعادلة التفاضلية

للحركة تعتبر نموذجاً رياضياً لهذا النظام الميكانيكي. إذا كان وزن الرجل 80 كيلو جراماً وطوله1.8 متر، وإذا كان الجسر يبعد 200 متر فوق سطح الماء وطول حبل القفز (غير المستطيل أو المشدود) 30 متر وثابت الزنبرك هو 11 نيوتين/المتر، فإن حبل القفز سيصل لأقصى استطالة له عند t=2.47s. معادلة الحركة بعد أن يبدأ الحبل في الاستطالة ستكون :

$$x(t) = -16.85\sin(0.3708t) - 95.25\cos(0.3708t) + 101.3, \quad t > 2.47$$ المعادلة رقم (١,١)

يبين شكل (١,١٦) حركة هذا الرجل، أو النظام مع الزمن خلال أول 15 ثانية. من هذا الرسم يبدو أن الرجل سيكون قريباً من البلل بالماء ولكنه لن يبتل.




**شكل رقم (١,١٦) الموضع الرأسي للرجل مع الزمن (مستوى الجسر هو الصفر)**

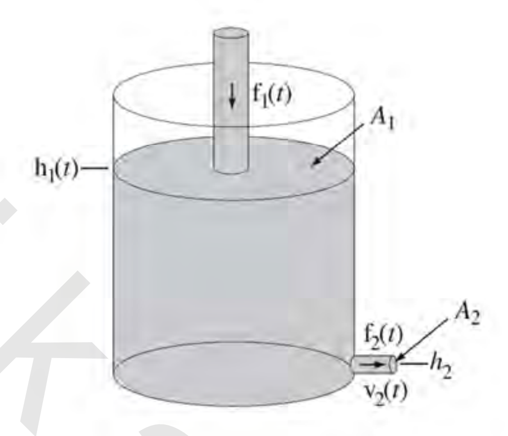
**نظام مائع أو سائل**

يمكن أيضا نمذجة نظام مائع بمعادلة تفاضلية. افترض وجود خزان اسطواني للماء تتم تغذيته من خلال تدفق للماء الداخل، مع فتحة في أسفل الخزان لتخريج الماء كما في شكل (١,١٧).

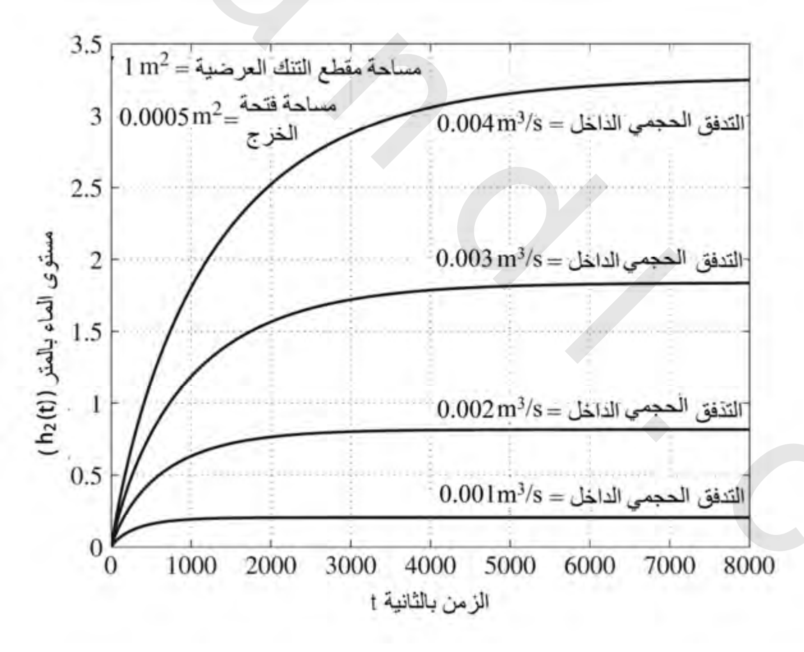
التدفق الخارج من الفتحة السفلى يعتمد على ارتفاع الماء في الخزان. تغير ارتفاع الماء في الخزان يعتمد على التدفق الداخل للماء والتدفق الخارج من الخزان. معدل تغير حجم الماء في الخزان هو الفرق بين حجم التدفق الداخل وحجم التدفق الخارج، وحجم الماء في الخزان يساوي مساحة مقطع الخزان في ارتفاع الماء فيه. يمكن تجميع كل هذه المعاملات في معادلة تفاضلية واحدة لمستوى الماء h1(t) كما يلي :

$$A_1 \frac{d}{dt}\big(h_1(t)\big) + A_2\sqrt{2g[h_1(t) - h_2]} = f_1(t)$$ المعادلة رقم (١,٢)

مستوى الماء في الخزان تم رسمه في شكل (١,١٨) مع الزمن لأربعة أحجام تدفق مع افتراض أن الخزان كان في البداية فارغاً.




**شكل رقم (١,١٧) خزان للماء بفتحة من أسفل ويتم ملؤه من أعلى**




**شكل رقم (١,١٨) مستوى الماء في الخزان لأربعة تدفقات مختلفة للماء الداخل مع فرض أن الخزان فارغ في البداية**

مع تدفق الماء الداخل، يرتفع مستوى الماء في الخزان، وهذا يزيد من تدفق الماء الخارج. مستوى الماء في الخزان يرتفع حتى يصبح التدفق الخارج يساوي التدفق الداخل، وعند هذا الوقت يظل مستوى الماء ثابتاً. لاحظ أنه عندما يزداد التدفق الداخل بمقدار الضعف، فإن المستوى النهائي للماء يزداد أربع مرات. أي أن مستوى الماء في

الخزان يتناسب مع مربع التدفق الحجمي الداخل. هذه العلاقة تكون نتيجة حقيقة أن المعادلة التفاضلية تكون غير خطية.

## نظام متقطع زمنياً

يمكن تصميم الأزمنة المتقطعة زمنياً بأكثر من طريقة. المثال العملي الأكثر شيوعاً على الأنظمة المقطعة زمنياً هو الحاسب. يتم التحكم في الحاسب عن طريق نبضات ساعة تحدد التوقيت لكل العمليات. العديد من الأشياء تحدث داخل الحاسب على مستوى الدوائر التكاملية بين نبضات الساعة ، ولكن ما يهم المستخدم هو ما يحدث عند لحظات حدوث نبضات الساعة.

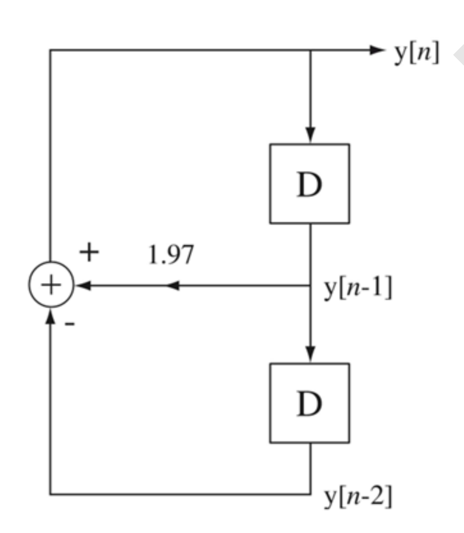
يمكننا أن نحاكي تأثير نظام متقطع زمنياً عن طريق برنامج على الحاسب كالتالي :

```
yn=1;   yn1=0;
while 1,
yn2=yn1;     yn1=yn;     yn=1. 97*yn1-yn2;
end
```

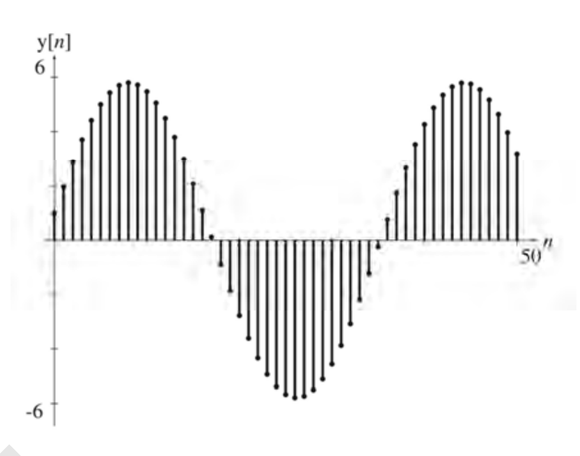
هذا البرنامج (المكتوب للحاسب بلغة ماتلاب) يحاكي نظاماً متقطعاً زمنياً مع إشارة الخرج yالتي تم وصفها بالمعادلة الفرقية التالية :

$$y[n] = 1.97y[n-1] - y[n-2]$$ المعادلة رقم (١,٣)

مع اعتبار القيم الابتدائية y[0]=1 و y[-1]=0. قيمة y عند أي فهرس أو قيمة زمنية محددة n تساوي مجموع القيم السابقة لل y عند الزمن n-1 مضروبة بالقيمة 1. 97 ، مطروحاً منها قيمة y السابقة لهذه القيمة عند الزمن n-2. يمكن رسم عمل هذا النظام كما هو موضح في شكل (١- ١٩).




**شكل رقم (١,١٩) مثال على نظام متقطع زمنياً**




**شكل رقم (١,٢٠) الإشارة الناتجة من النظام المتقطع زمنياً في شكل رقم (١,١٩)**

في شكل (١- ١٩) المربعان المحتويان على الحرف D يمثلان تأخيراً لوحدة زمن، والسهم المجاور للرقم 1.97 هو مكبر يضرب الإشارة الداخلة بالثابت 1.97 منتجاً الإشارة الخارجة. الدائرة وإشارة الجمع بداخلها تمثل نقطة تجميع، حيث تجمع الإشارتين الداخلتين لها (واحدة منهما تم عكسها أولا) لتعطي الإشارة الخارجة منها. الخمسون قيمة الأولى من الإشارة الناتجة من هذا النظام تم توضيحها في شكل (١- ٢٠).

النظام الموجود في شكل (١- ١٩) يمكن بناؤه باستخدام مكونات بنائية محددة. التأخير في الزمن المتقطع يمكن تنفيذه باستخدام مسجل إزاحة. الضرب في القيمة الثابتة يمكن عمله باستخدام مكبر أو باستخدام دائرة ضرب رقمي. يمكن عمل الجمع أيضاً باستخدام مكبر عمليات، أو باستخدام مجمع رقمي.

### أنظمة التغذية العكسية

جانب آخر من الجوانب المهمة في الأنظمة هو استخدام التغذية العكسية لتحسين أداء هذه الأنظمة. في أنظمة التغذية العكسية، يوجد شيء يقوم بملاحظة خرج النظام ومن الممكن تغيير إشارة دخل النظام لتحسين هذه الاستجابة. من الأمثلة الشهيرة على ذلك منظم الحرارة، أو الثرموستات في المنزل الذي يتحكم في متى يفتح، أو يغلق مكيف الهواء. الثرموستات به حساس للحرارة، عندما ترتفع درجة الحرارة داخل الثرموستات عن المستوى الموضوع عن طريق صاحب المنزل، يغلق مفتاح داخل الثرموستات ويشغل مكيف الهواء. عندما تنخفض درجة الحرارة داخل الثرموستات تحت المستوى الموضوع عن طريق صاحب المنزل بكمية قليلة، فإن المفتاح يفتح مغلقاً مكيف الهواء. جزء من النظام (حساس الحرارة) يقوم بحس الشيء الذي يقوم النظام بمحاولة التحكم فيه (درجة الحرارة) ويقوم بتغذية الإشارة مرة أخرى إلى الجهاز الذي يقوم فعلاً بعملية التحكم (مكيف الهواء). في هذا المثال، إشارة التغذية العكسية، هي ببساطة غلق، أو فتح المفتاح.

التغذية العكسية تعتبر مفهوماً مهماً ومفيداً، وأنظمة التغذية العكسية توجد في كل مكان. لننظر إلى أحد الأشياء التي يعرفها كل واحد وهي، الصمام العائم في صندوق طرد المرحاض (التواليت). إنه يحس مستوى الماء في الصندوق، وعندما يصل مستوى الماء إلى المستوى المطلوب، فإنه يوقف تدفق الماء في الصندوق. الكرة العائمة هي الحساس والصمام الموصلة عليه هو آلية التغذية العكسية التي تتحكم في مستوى الماء.

إذا كانت كل الصمامات في صناديق طرد المراحيض من النوع نفسه ولا يتم تغيرها مع الزمن، وإذا كان ضغط الماء الداخل إلى الصمام معروفاً وثابتاً، وإذا كانت هذه الصمامات تستخدم في كل صناديق الماء، فإنه من الممكن استبدال صمامات العوامات باستخدام مؤقت يقوم يغلق تدفق الماء عندما يصل الماء إلى المستوى المطلوب، حيث إن الماء سيصل إلى المستوى المطلوب عند الزمن نفسه. ولكن صمامات الماء تتغير مع الزمن وضغط الماء يتغير، كما أن المراحيض المختلفة يكون بها صناديق مختلفة الحجم والشكل. لذلك، فإنه لكي يتم العمل بكفاءة تحت هذه الظروف المتغيرة، فإن نظام تعبئة الصندوق يجب ضبطه عن طريق حس مستوى الماء وغلق الصمام عندما يصل الماء إلى المستوى المطلوب. إن القابلية للضبط مع الظروف المتغيرة هي من المميزات العظيمة لطرق التغذية العكسية.

هناك العديد من الأمثلة التي لا حصر لها على استخدام التغذية العكسية :

١- عملية الصب في كأس الليمون تحتوي على التغذية العكسية. إن الشخص الذي يقوم بعملية الصب يلاحظ مستوى اليمونادة في الكأس ويوقف عملية الصب عندما يصل إلى المستوى المطلوب.

٢- يقوم الأساتذة بعمل اختبارات للطلاب لتبليغهم بمستوى أدائهم. إن هذا يعتبر تغذية عكسية لتمكين الطلاب من معرفة جودة أدائهم في المقرر بحيث يستطيع الطالب أن يضبط طريقته، أو عاداته في المذاكرة، لكي يصل إلى التقدير المطلوب. إنه أيضاً تغذية عكسية تتيح للأستاذ أن يعرف كيفية أداء الطلاب وتعلمهم.

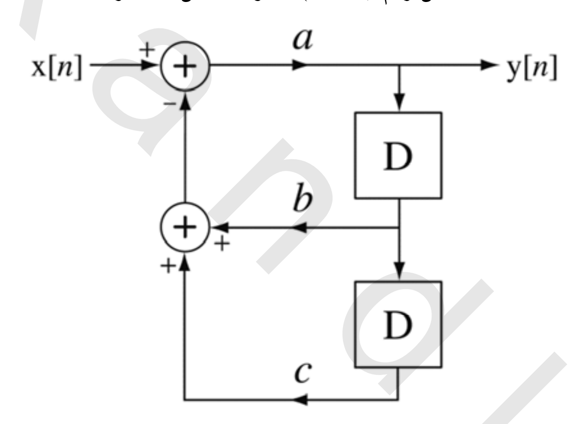
٣- عملية قيادة السيارة تشتمل على تغذية عكسية. إن السائق يحس بالسرعة واتجاه السيارة، والاقتراب من السيارات الأخرى، وعلامات الحارة التي يسير فيها على الطريق، ويطبق باستمرار الأفعال المصححة عن طريق دواسة السرعة، والفرامل، وعجلة القيادة للحفاظ على سرعة وموضع آمنين.

٤- بدون التغذية العكسية، من الممكن للطائرة المحاربة F-117 أن تتحطم نتيجة عدم الثبات في الديناميكية الهوائية. الحاسبات المتوافرة تحس بالسرعة، والارتفاع، والالتفاف، والرماية والانحراف للطائرة وتضبط باستمرار الأسطح للحفاظ على المسار المطلوب للطائرة كما في شكل (١,٢١).

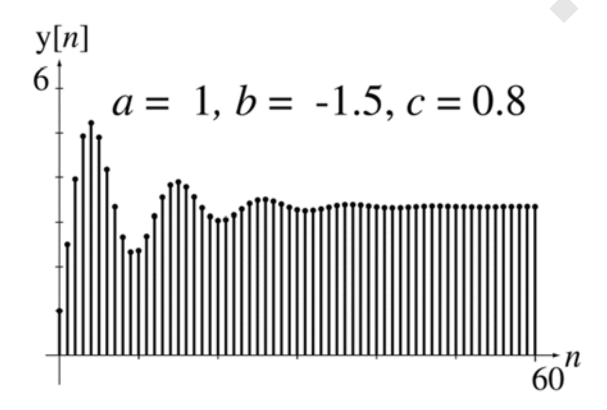
يتم استخدام التغذية العكسية في أنظمة الزمن المستمر وأنظمة الزمن المتقطع. النظام في شكل (١,٢٢) يمثل نظام تغذية عكسية في الزمن المتقطع. استجابة النظام y[n] تمثل "التغذية العكسية" إلى وصلة التجميع العليا بعد تأخيرها مرتين وضربها في بعض الثوابت.



**شكل رقم (١,٢١) طائرة التسلل المحاربة F-117**




**شكل رقم (١,٢٢) نظام تغذية عكسية في الزمن المتقطع**



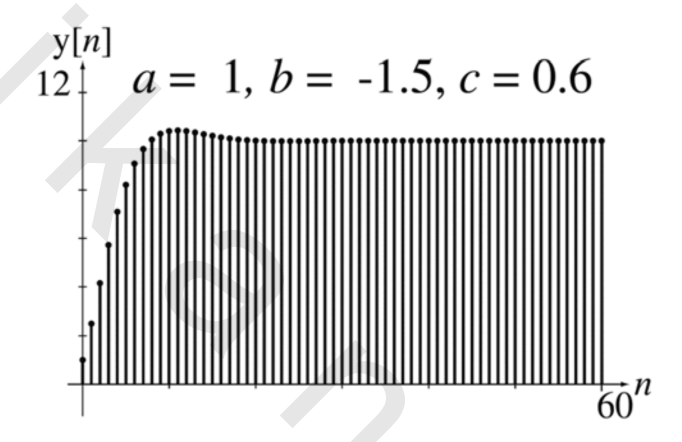

**شكل رقم (١,٢٣) استجابة نظام في الزمن المتقطع مع b=-1.5 و c=0.8**

افترض أن هذا النظام مستقر في البداية، مما يعني أن كل الإشارات خلال النظام تكون صفراً قبل اللحظة الزمنية n=0. لتوضيح تأثير التغذية العكسية نفترض أن b=-1.5، و c=0.8 ونفترض أن إشارة الدخل x[n] تتغير من 0 حتى 1 وتظل عند القيمة 1 مع كل الأزمنة n≥0. شكل (١,٢٣) يوضح الاستجابة y[n] للنظام.

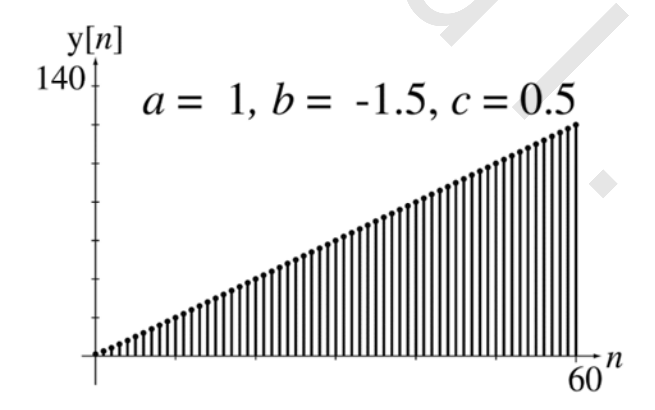
الآن نفترض أن c=0.6 وسنترك b كما هي. في هذه الحالة ستكون الاستجابة كما في شكل (١,٢٤).

الآن نفترض أن c=0.5 وسنتركb كما هي. في هذه الحالة ستكون الاستجابة كما في شكل (١,٢٥).

الاستجابة في شكل (١,٢٥) ستزداد إلى ما لانهاية. هذا النظام الأخير يعتبر غير مستقر، حيث إن إشارة الدخل المحددة تنتج استجابة غير محددة. وعلى ذلك فإن التغذية العكسية يمكن أن تنتج نظاماً غير مستقر.



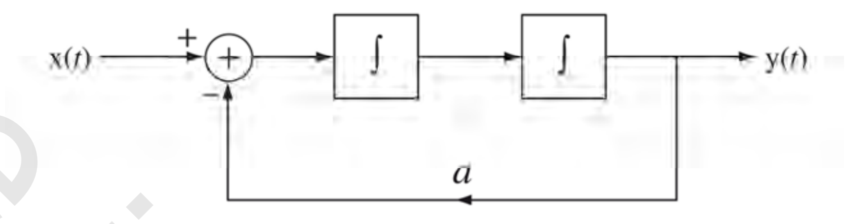

**شكل رقم (١,٢٤) استجابة نظام الزمن المتقطع مع b=-1.5 و c=0.6**




**شكل رقم (١,٢٥) استجابة نظام الزمن المتقطع مع b=-1.5 و c=0.5**

النظام الموضح في شكل (١,٢٦) يعتبر مثالاً على نظام التغذية العكسية في الزمن المستمر. لقد تم وصفه بالمعادلة التفاضلية y//(t)+ay(t)=x(t).

$$y_h(t) = K_{h1}sin(\sqrt{a}t) + K_{h2}cos(\sqrt{a}t)$$ المعادلة رقم (١,٤)

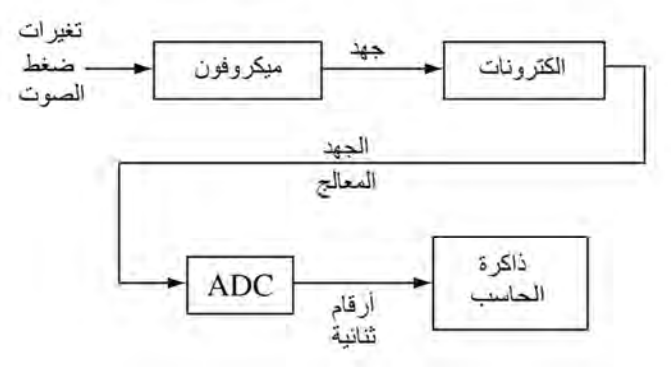



**شكل رقم (١,٢٦) نظام تغذية عكسية في الزمن المستمر**

إذا كانت الاستجابة x(t) تساوي صفر والاستجابة الابتدائية y(t0)لا تساوي صفراً، أو التفاضل الابتدائي للاستجابة y(t) لا يساوي صفراً وتم السماح للنظام أن يعمل تحت هذه الظروف بعد t=t0 فإن y(t) ستتردد جيبياً إلى ما لانهاية. هذا النظام يعتبر مذبذباً بمقدار ثابت. وعلى ذلك فإن التغذية العكسية يمكنها أن تسبب التذبذب اللانهائي.

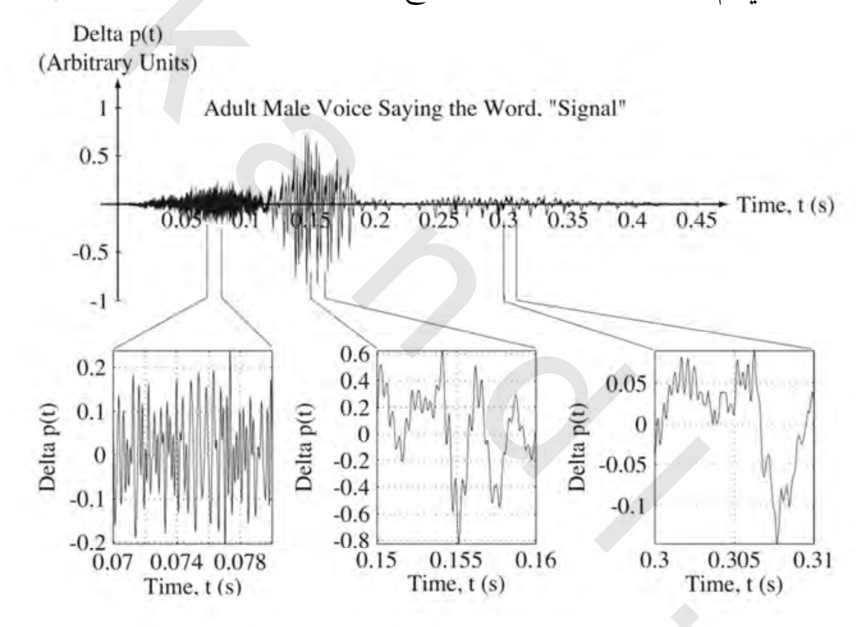
## (١,٤)مثال معروف عن الإشارات والأنظمة

كمثال على الإشارات والأنظمة، دعنا ننظر إلى إشارة ونظام معروفين لكل واحد منا، إنه الصوت، والنظام الذي ينتج أو يقيس الصوت. إن الصوت هو ما تحسه الأذن.الأذن البشرية حساسة لموجات الصوت الضغطية ما بين 15 هرتز وحتى حوالي20 كيلوهرتز مع بعض التغيرات في الحساسية خلال هذا المدى فيما يلي سنرى بعض الأشكال لتغيرات ضغط الهواء التي تنتج بعض الأصوات المعروفة. هذه الأصوات تم تسجيلها باستخدام نظام يتكون من ميكروفون يقوم بتحويل تغيرات ضغط الهواء إلى إشارة جهد مستمرة زمنياً، ودائرة إلكترونية تقوم بمعالجة إشارة الجهد المستمرة زمنياً ومحول تماثلي رقميADC يقوم بتحويل إشارة الجهد المستمرة زمنياً إلى إشارة رقمية في صورة تتابع من الأرقام الثنائية التي يتم تسجيلها بعد ذلك في ذاكرة الحاسب كما في شكل (١,٢٧).




**شكل رقم (١,٢٧) نظام تسجيل الصوت**

افترض تغيرات الضغط الصوتي الموضحة في شكل (١,٢٨). إشارة الضغط المستمرة زمنياً التي تنتج صوت الكلمة "سجنال signal" التي تم نطقها عن طريق شخص بالغ ذكر (هو المؤلف).

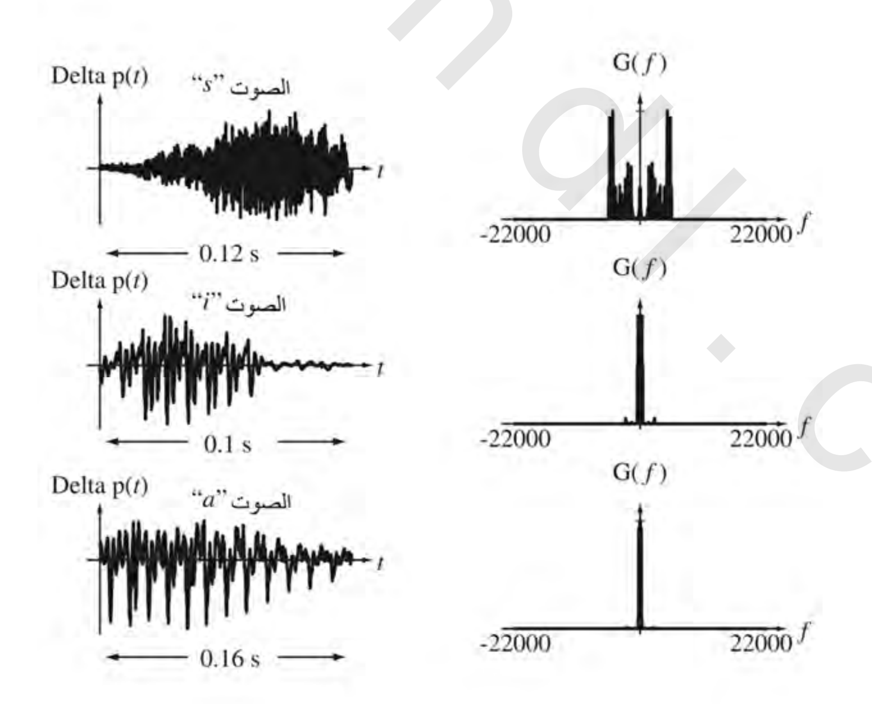



**شكل رقم (١,٢٨) الكلمة "سجنال signal" منطوقة بصوت شخص بالغ ذكر**

تحليل الصوت يعتبر موضوعاً كبيراً، ولكن بعض الأشياء عن العلاقة بين مخطط تغير ضغط الهواء وما يسمعه البشر مثل الكلمة "سجنال signal" يمكن توضيحها بالنظر إلى هذا المخطط. في هذا المخطط يمكن تحديد ثلاث دفعات للإشارة، الدفعة 1# وهي من صفر حتى 12 .0 ثانية، والدفعة الثانية من 12 .0 ثانية حتى حوالي19 .0 ثانية، والدفعة الثالثة من حوالي22 .0 ثانية حتى 4 .0 ثانية. الدفعة 1# هي الحرف sفي الكلمة "سجنال signal". الدفعة 2# هي الصوت i. المنطقة بين الدفعة 2# والدفعة 3# هي صوت السكون الثنائيgnفي الكلمة "سجنال signal". الدفعة 3#

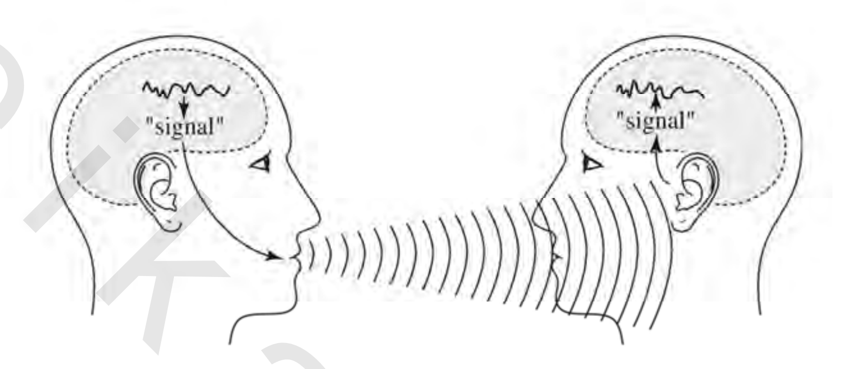
هي الصوت a المنتهي بالصوت الساكن l والوقف. l ليست سكون توقف مفاجئ كما هو الحال في السواكن الأخرى، حيث إن الصوت يحاول الهبوط، أو النزول التدريجي بدلا من التوقف السريع. تغيرات ضغط الهواء تكون في العادة أسرع للصوت s عنها للصوت i أو الصوت a. في تحليل الصوت من الممكن أن نقول إن به "محتويات ترددية عالية" أكثر. في فترة النفخ في الصوت s تبدو تغيرات ضغط الصوت عشوائية تقريباً. الصوتان i و a يكونان مختلفين في أنهما يتغيران ببطء كبير، وهما أكثر انتظاماً أو يمكن توقعهما (على الرغم من عدم إمكانية توقعهما بالضبط). الصوتان i و a يتشكلان عن طريق تغيرات في الأحبال الصوتية، ولذلك فإنهما يعرضان سلوكاً ترددياً تقريباً. يمكننا أن نصف ذلك بالقول بأن الصوتين i و aيكونا أصواتاً نغمية أو منطوقة بينما الصوت s ليس منطوقاً. النغمية هنا تعني أن هذه الأصوات لها الجودة الأساسية للنغمة المنفردة أو التردد المنفرد. هذا الوصف ليس دقيقاً حسابياً ولكنه يكون مفيداً.

طريقة أخرى للنظر للإشارة هي في النطاق الترددي، والذي ذكر فيما قبل، عن طريق فحص الترددات، أو التناغمات الموجودة في هذه الإشارة. طريقة شائعة لتوضيح تغيرات طاقة الإشارة مع التردد هي كثافة طيف القدرة، وهي عبارة عن شكل يوضح كثافة قدرة الإشارة مع التردد. شكل (١,٢٩) يوضح الثلاث دفعات s و i و a من الكلمة "سجنال signal" وكثافة طيف القدرة المصاحب لها، وهي الدالة G(f).




**شكل رقم (١,٢٩) ثلاثة أصوات في الكلمة "سجنال signal" وكثافة طيف القدرة المصاحب لكل منها**

كثافة طيف القدرة عبارة عن أداة حسابية لتحليل الإشارات. إنه لا يحتوي على أي معلومات جديدة، ولكنه أحيانا يمكن أن يكشف عن أشياء يكون من الصعب رؤيتها بالطرق الأخرى. في هذه الحالة، نرى أن كثافة طيف القدرة للصوت s موزعة بطريقة أوسع على التردد، بينما كثافة طيف القدرة للصوتين i و a موزعتان بطريقة ضيقة وفي نطاق الترددات المنخفضة. هناك طاقة أكثر في الصوت s عند الترددات الأعلى عنها في الأصوات i و a. الصوت s له حافة أو هسهسة بسبب وجود الترددات العالية في هذا الصوت.




**شكل رقم (١,٣٠) الاتصالات بين شخصين تشتمل على إشارات وأنظمة لمعالجة هذه الإشارات**

الإشارة في شكل (١,٢٨) تحمل معلومات. افترض ما يحدث أثناء المحادثة عندما يقوم شخص بنطق كلمة "سجنال signal" وشخص آخر يسمعها كما في شكل (١,٣٠). في البداية يفكر المتكلم في مفهوم الإشارة، حيث يقوم مخه بسرعة بتحويل هذا المفهوم إلى الكلمة "سجنال signal". بعد ذلك يرسل المخ نبضة عصبية إلى أحباله الصوتية والحجاب الحاجز لتوليد حركة الهواء وحركة اللسان والشفتان لإنتاج صوت الكلمة "سجنال signal". هذا الصوت ينتشر خلال الهواء بين المتكلم والمستمع. يصطدم الصوت بطبلة أذن المستمع حيث تتحول هذه الاهتزازات إلى نبضات عصبية، حيث يقوم مخ المستمع بتحويل هذه النبضات إلى صوت، ثم إلى الكلمة، ثم إلى مفهوم الكلمة. هذه المحادثة تم إنجازها بنظام على درجة عالية من التعقيد.

كيف عرف مخ المستمع أن النموذج المركب أو المعقد في شكل (١,٢٨) هو الكلمة "سجنال signal" ؟ إن المستمع لا يعنيه تفاصيل ذبذبات ضغط الهواء ولكنه بدلا من ذلك يستمع إلى الأصوات التي تنتج من تغير ضغط الهواء. تقوم طبلة الأذن والمخ بتحويل هذه النماذج المعقدة من ضغط الهواء إلى القليل من الخواص البسيطة. هذا التحويل يشبه ما نفعله عندما نقوم بتحويل الإشارة إلى النطاق الترددي. عملية التعرف على صوت عن طريق تحويله إلى مجموعة صغيرة من الخواص تقلل كمية المعلومات التي سيقوم المخ بمعالجتها. معالجة الإشارة وتحليلها بالمعنى التقني تعمل الشيء نفسه ولكن بطريقة حسابية أكثر دقة.

توجد مشكلتان شائعتان في تحليل الإشارات والأنظمة وهما الضوضاء والتداخل. الضوضاء هي إشارة عشوائية غير مرغوب فيها. التداخل هو إشارة غير عشوائية أو محددة ولكنها غير مرغوب فيها. كل من الضوضاء والتداخل يحاولان حجب أو إخفاء المعلومات الموجودة في الإشارة. شكل (١,٣١) يبين أمثلة على الإشارة من شكل (١,٢٨) مع إضافة مستويات مختلفة من الضوضاء.

مع زيادة طاقة الضوضاء يكون هناك تراجع تدريجي في وضوح الإشارة، وعند مستوى معين من الضوضاء تصبح الإشارة غير واضحة وغير مفهومة. هناك مقياس لجودة الإشارة المستقبلة المفسودة بالضوضاء وهي نسبة طاقة الإشارة إلى طاقة الضوضاء، وتعرف عادة بنسبة الإشارة للضوضاء signal to noise ratio, SNR. في كل مثال في شكل (١,٣١) تم تحديد نسبة الإشارة للضوضاء.

الأصوات ليست هي فقط بالطبع المثلة للإشارات. أي ظاهرة طبيعية يمكن قياسها أو ملاحظتها تعتبر إشارة. أيضاً، على الرغم من أن معظم الإشارات التي سنعتبرها هنا في هذا الكتاب ستكون دوالاً في الزمن، إلا أن أي إشارة يمكن أن تكون دالة في متغير مستقل آخر، مثل التردد، والطول الموجي، والمسافة، وهكذا. شكل (١,٣٢) و شكل (١,٣٣) توضح أنواع أخرى من الإشارات.



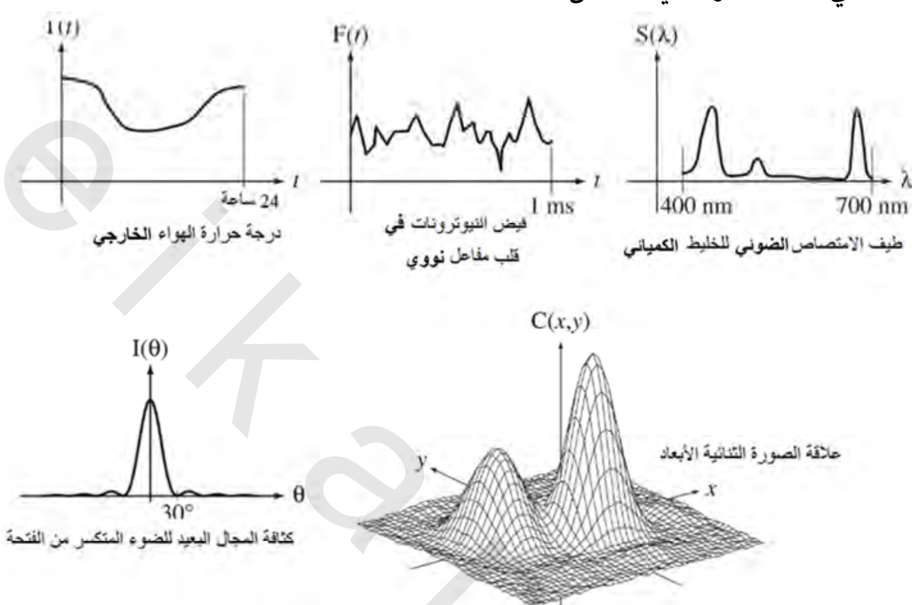

**شكل رقم (١,٣١) صوت الكلمة "سجنال signal" مع إضافة مستويات مختلفة من الضوضاء**

كما أن الصوت ليس هو الإشارة الوحيدة، فإن المحادثة بين شخصين ليست هي النظام الوحيد. من الأمثلة الأخرى على الأنظمة ما يلي:

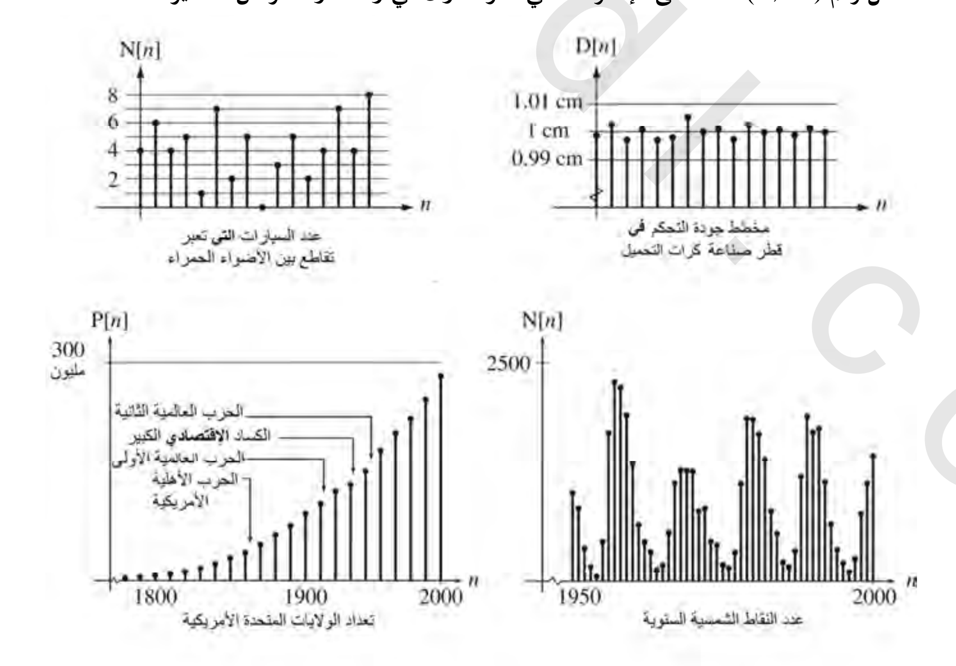
١- نظام التعليق في السيارة حيث يتم إثارة السيارة من سطح الطريق ويكون موضع هيكل السيارة بالنسبة للطريق هو استجابة هذا النظام.

٢- نظام وعاء خلط الكيماويات حيث يكون تدفق الكيماويات الداخلة هي دخل النظام وإشارة خرج النظام هي الكيماويات المخلوطة.

٣- نظام التحكم في جو أو وسط الأبنية، حيث تكون درجة الحرارة في الخارج هي إشارة الدخل والاستجابة هي درجة الحرارة في الداخل.




**شكل رقم (١,٣٢) أمثلة على الإشارات التي تكون دوال في واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة المستمرة**




**شكل رقم (١,٣٣) أمثلة على الإشارات التي تكون دوال في متغير متقطع مستقل**

٤- نظام الميكروسكوب الطيفي الكيميائي الذي يقوم فيه الضوء الأبيض بإثارة العينة والاستجابة هي طيف الضوء المرسل.

٥- نظام شبكة التليفونات الذي تكون فيه الأصوات والبيانات هي إشارات الدخل وإعادة إنتاج هذه الأصوات والبيانات عند المسافات البعيدة هي إشارة الخرج.

٦- نظام جو الأرض، الذي تتم إثارته عن طريق الطاقة الشمسية والاستجابة هي حرارة المحيط، والرياح، والسحاب، والرطوبة، وهكذا. بمعنى آخر فإن الطقس يمثل الاستجابة.

٧- نظام الازدواج الحراري تتم إثارته بسبب التدرج الحراري خلال طوله وتكون الاستجابة هي فرق الجهد الناتج عند إحدى النهايات.

٨- نظام البوق، أو الناي تتم إثارته بسبب الاهتزازات التي ينفذها الشخص بشفتيه وموضع الفتحات، وتكون الاستجابة هي النغمة الناتجة.

هذه القائمة لا نهاية لها، وأي ظاهرة طبيعية يمكن التفكير فيها كنظام، لأننا عندما نثيرها بطاقة طبيعية، فإنها تعطي استجابة طبيعية.

## (١,٥) استخدام ماتلاب

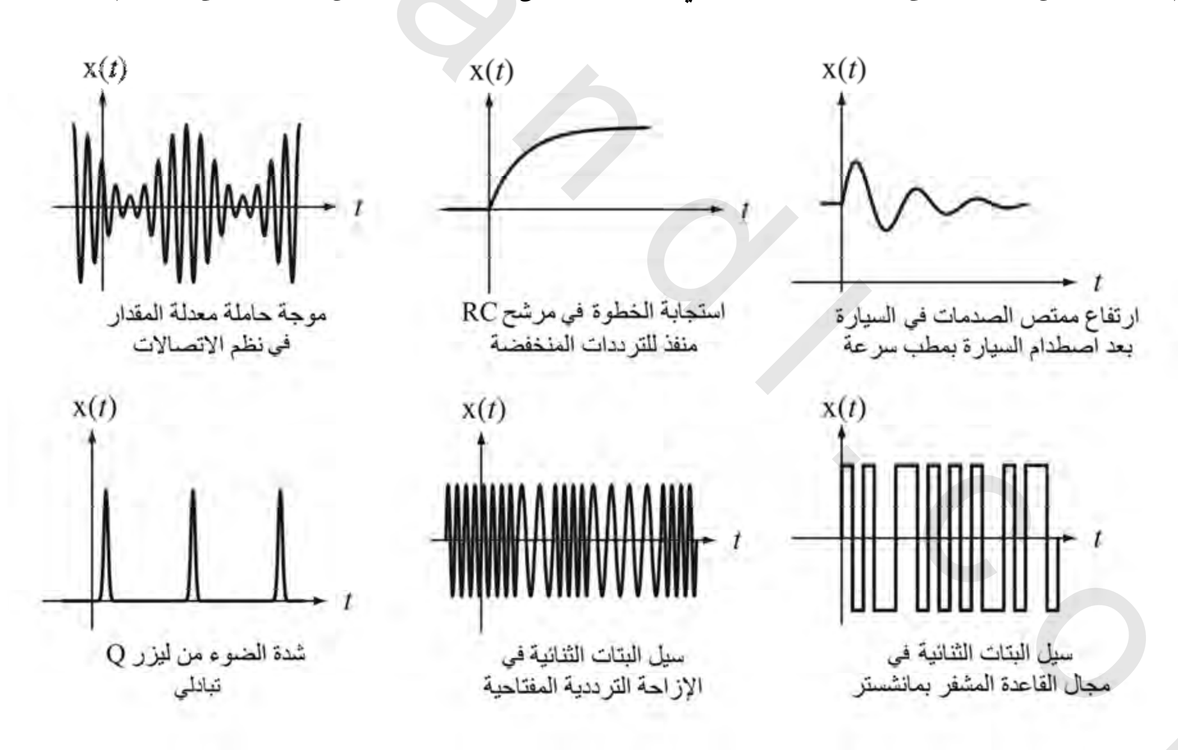
خلال كل هذا الكتاب، سيتم تقديم أمثلة توضح كيفية عمل تحليل الإشارات والأنظمة باستخدام ماتلاب. ماتلاب هو أداة حسابية عالية المستوى تكون متاحة على العديد من الحاسبات. إنها مفيدة جداً في معالجة الإشارات وتحليل الأنظمة. هناك مقدمة عن ماتلاب في الملحق أ على الويب.



# الوصف الرياضي للإشارات المستمرة زمنياً

## (٢,١) المقدمة والأهداف

على مدار السنين، قام محللو الإشارات والأنظمة بملاحظة العديد من الإشارات وتوصلوا إلى أن الإشارات يمكن تصنيفها إلى مجموعات متشابهة في السلوك. شكل (٢,١) يبين بعض الأمثلة على هذه الإشارات.




شكل رقم (٢,١) أمثلة على الإشارات

يتم وصف الإشارات عن طريق دوال حسابية في تحليل الإشارات والأنظمة. بعض الدوال التي تصف الإشارات الحقيقية يجب أن تكون شائعة، أسية أو جيبية مثلا، وتحدث هذه الدوال عادة في تحليل الإشارات والأنظمة. مجموعة من هذه الدوال تم تعريفها لكي تصف التأثيرات على إشارات عمليات التبديل التي تحدث عادة في الأنظمة. بعض الدوال الأخرى تظهر في عملية التطوير لطرق تحليل بعض الأنظمة المعينة، التي سيتم تقديمها في فصول لاحقة. هذه الدوال تم اختيارها بعناية بحيث تكون متعلقة ببعضها ببساطة، وأن تكون من السهل تغييرها عن طريق مجموعة جيدة الاختيار من عمليات الإزاحة و/أو التحجيم. إنها عبارة عن نماذج أولية من الدوال، والتي بها تعريفات مبسطة، ومن السهل تذكرها بسهولة. أنواع التشابهات والنماذج التي تحدث عادة في الإشارات الحقيقية سيتم تحديدها، وسيتم استكشاف تأثيراتها على تحليل الإشارات.

**أهداف الفصل**

١- تحديد بعض الدوال الحسابية التي يمكن استخدامها لوصف الإشارات.

٢- تطوير طرق لإزاحة هذه الدوال، وتحجيمها، وتجميعها لتمثل الإشارات الحقيقية.

٣- التعرف على بعض التشابهات، والنماذج؛ لتبسيط تحليل الإشارات والأنظمة.

## (٢,٢) رموز الدوال

الدالة عبارة عن مقابلة بين معاملات هذه الدالة، التي تقع في نطاقها، والقيمة المسترجعة عن طريق هذه الدالة، والتي تقع في مداها. أشهر الدوال تكون على الصورة $g(x)$ حيث المعامل $x$ هو رقم حقيقي والقيمة المسترجعة عن طريق الدالة $g$ تكون أيضاً رقماً حقيقياً. ولكن النطاق و/أو المدى لأي دالة من الممكن أن يكون أرقاماً مركبة، أو أرقاماً صحيحية، أو أنواعاً من اختيارات أخرى من القيم المسموحة.

سيظهر لنا في هذا الكتاب خمسة أنواع من الدوال كالتالي:

١- النطاق — الأرقام الحقيقية، والمدى — الأرقام الحقيقية

٢- النطاق — الأرقام الصحيحة، والمدى الأرقام الحقيقية

٣- النطاق — الأرقام الصحيحة، والمدى الأرقام المركبة

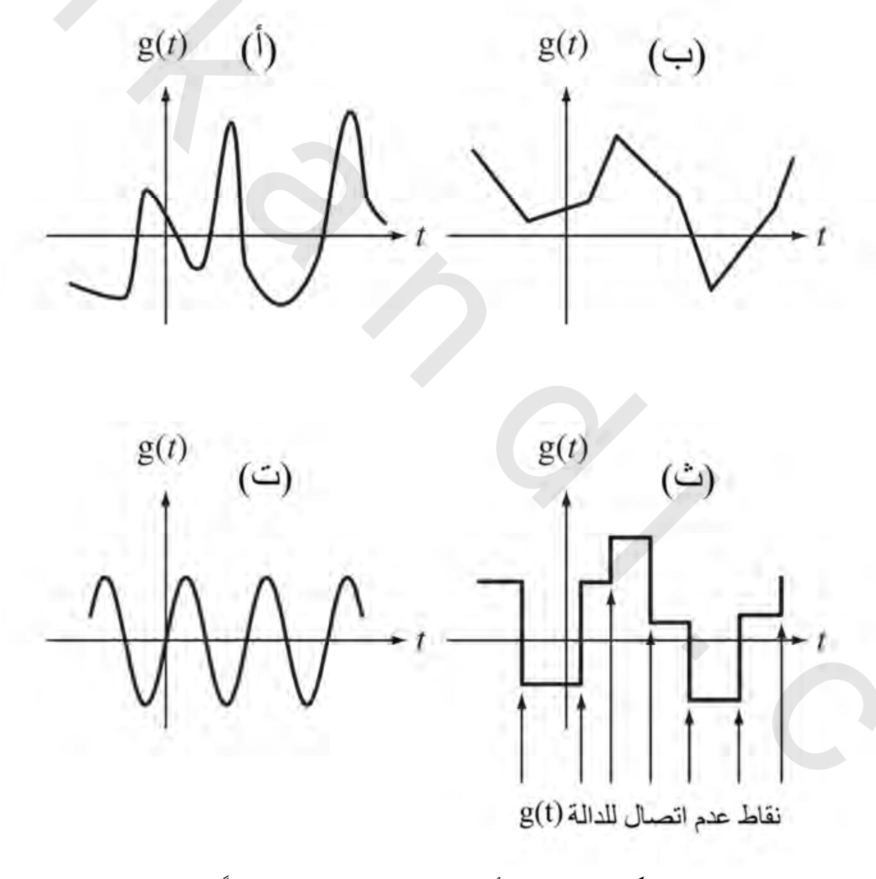
٤- النطاق — الأرقام الحقيقية، والمدى الأرقام المركبة

٥- النطاق — الأرقام المركبة، والمدى الأرقام المركبة

بالنسبة للدوال التي يكون نطاقها إما أرقاماً حقيقية، أو أرقاماً مركبة، فإن المعاملات سيتم وضعها بين قوسين عاديين (.). بالنسبة للدوال التي نطاقها أرقام صحيحة، فإن المعاملات سيتم وضعها بين قوسين مربعين [.]. هذه الأنواع من الدوال سيتم شرحها بالتفصيل عند تقديمها.

### (٢,٣) دوال الإشارات المستمرة زمنياً

إذا كان المتغير المستقل لأي دالة هو الزمن t وكان نطاق الدالة هو الأرقام الحقيقية، وإذا كانت الدالة g(t) لها قيمة محددة عند كل قيمة للزمن t، فإن الدالة في هذه الحالة تسمى دالة مستمرة زمنياً. شكل (٢- ٢) يبين بعض الدوال المستمرة زمنياً.




**شكل رقم (٢,٢) أمثلة على الدوال المستمرة زمنياً**

شكل (٢,٢د) يبين دالة بها عدم اتصال، حيث عند نقطة عدم الاتصال تكون قيمة نهاية الدالة عند الاقتراب من هذه النقطة من الناحية الأعلى لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند الاقتراب من النقطة نفسها من أسفل. إذا كانت القيمة $t=t_0$ تمثل نقطة عدم اتصال لدالة g(t) فإن:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(t_0+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to 0} g(t_0-\varepsilon)$$

كل الدوال الأربع، (أ) حتى (د) في شكل (٢,٢) تمثل دوال مستمرة زمنياً لأن قيمها تكون محددة لكل القيم الحقيقية للزمن t. لذلك فإن التعبيرات "مستمرة" و "مستمرة زمنياً" تعني أشياء مختلفة. كل الدوال المستمرة في الزمن تكون دوال دوال مستمرة زمنياً، ولكن ليس كل الدوال المستمرة زمنياً تكون دوال مستمرة في الزمن.

### الأسس المركبة والجيوب

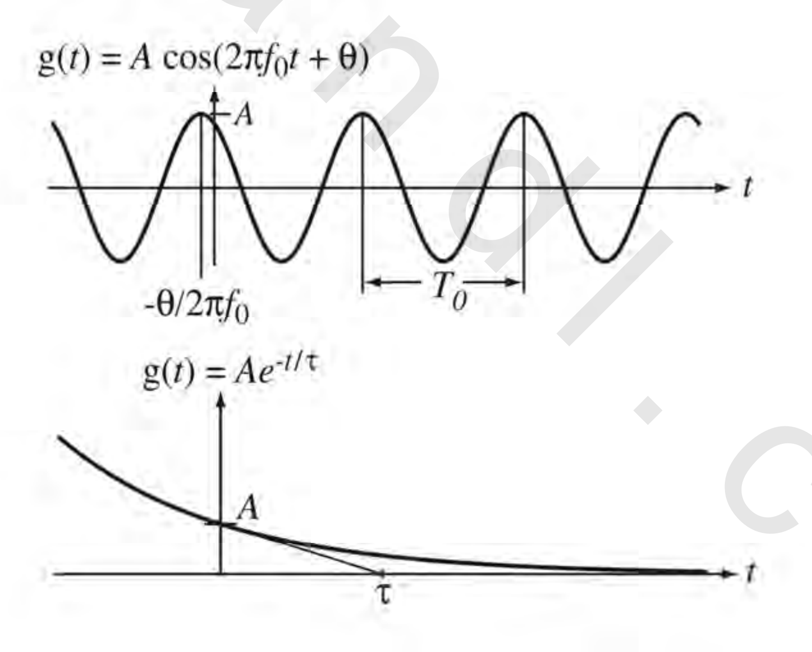
الجيوب ذات القيمة الحقيقية والدوال الأسية يجب أن تكون معروفة مبدئيا. في الدالة :

$$g(t) = Acos\left(\frac{2\pi t}{T_0}+\theta\right) = Acos(2\pi f_0 t+\theta) = Acos(\omega_0 t+\theta)$$

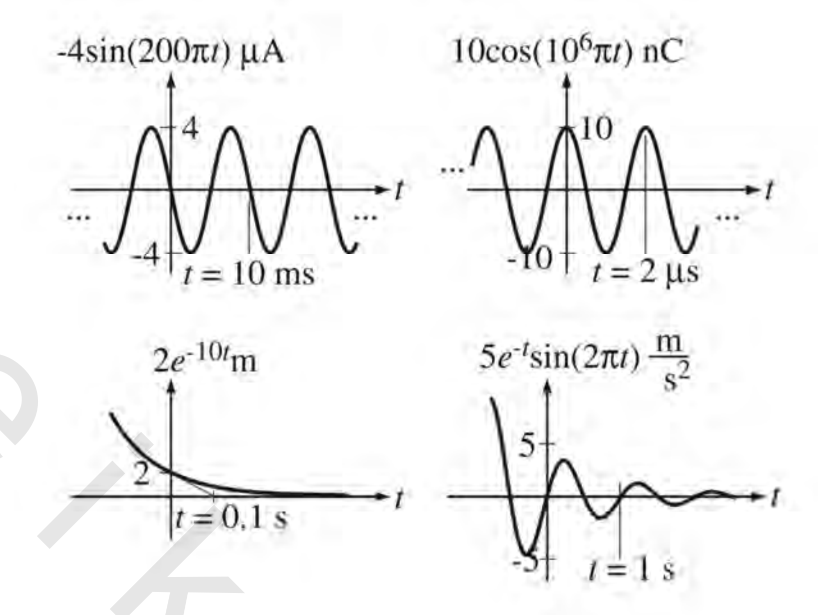
و

$$g(t) = Ae^{(\sigma_0+j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[\cos(\omega_0 t) + jsin(\omega_0 t)]$$

تكون A هي المقدار، و $T_0$ هي الفترة أو الدورة الأساسية، و $f_0$ هي التردد الدوري الأساسي، و $\omega_0$ هي التردد الزاوي الأساسي للجيب، و t هو الزمن و $\sigma_0$ هي معدل الاضمحلال للدالة الأسية (وهي مقلوب ثابتها الزمني τ) كما في شكل (٢,٣) وشكل (٢,٤). كل هذه المعاملات يمكن أن تكون أي رقم حقيقي.




**شكل رقم (٢,٣) دالة جيبية حقيقية ودالة أسية حقيقية بمعاملات موضحة تخطيطياً.**




**شكل رقم (٢،٤) أمثلة على إشارات موصوفة بجيوب، وجيوب تمام وأسس حقيقية**

في الشكل (٢- ٤) توضح الوحدات أي نوع من الإشارات الطبيعية يتم وصفها. من المعتاد جداً في تحليل الأنظمة، عندما يتم تتبع إشارة واحدة فقط خلال أحد الأنظمة، فإن الوحدات يتم إهمالها بغرض الإيجاز، أو الاختصار.

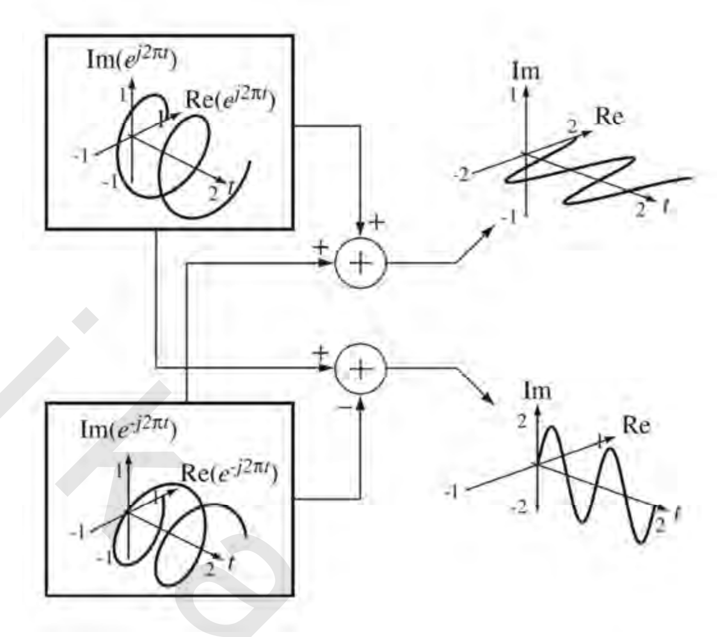
الأسس (exp) والجيوب (sin و cos) تعتبر من الدوال الضمنية، أو الجوهرية في ماتلاب. تعرف المعاملات لدوال sin و cos بالراديان، أو الزاوية القطرية وليس بالدرجات:

```
>> [exp(1),sin(pi/2),cos(pi)]
ans =
2.7183 1.0000 -1.0000
```

(pi في ماتلاب هي الرمز π).

الجيوب والأسس شائعة جداً في تحليل الإشارات والأنظمة نتيجة أن معظم أنظمة الزمن المستمر يمكن وصفها، على الأقل بالتقريب، عن طريق معادلات تفاضلية اعتيادية، وخطية، وذات معاملات ثابتة، التي تكون دالتها الذاتية عبارة عن أسس مركبة، أي قوى مركبة من e، والتي هي قاعدة الخواريزم الطبيعي. الدالة الذاتية eigenfunction تعني "الدالة المميزة"، وهذه الدوال المميزة لها علاقات مهمة خاصة مع المعادلة التفاضلية. إذا كان الأس e حقيقياً، فإنه في هذه الحالة تكون الأسس المركبة هي نفسها مثل الأسس الحقيقية. من خلال معادلة أويلر Euler، $e^{jx}=\cos(x)+j\sin(x)$ والعلاقات $\cos(x)=(1/2)(e^{jx}+e^{-jx})$ و $\sin(x)=(1/2)(e^{jx}-e^{-jx})$، فإننا نرى أن الأسس المركبة

والجيوب ذات القيمة الحقيقية تكون مرتبطة بدرجة كبيرة. إذا كان في أي دالة على الصورة $e^{jx}$ ، x عبارة عن متغير مستقل له قيمة حقيقية ، فإن هذه الحالة الخاصة من الأس المركب تسمى الجيب المركب كما في شكل (٢،٥).




**شكل رقم (٢،٥) العلاقة بين الجيوب الحقيقية والمركبة**

في تحليل الإشارات والأنظمة ، يتم التعبير عن الجيوب إما بالتردد الدوري f على الصورة $A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ ، أو بالتردد الزاوي القطري ω على الصورة $A\cos(\omega_0 t+\theta)$. مميزات الصورة f هي كما يلي :

١- الدورة الأساسية $T_0$ والتردد الدوري الأساسي $f_0$ يكون كل منهما معكوس الآخر ببساطة.

٢- في تحليل أنظمة الاتصالات ، يتم في العادة استخدام المحلل الطيفي ، ويتم عادة معايرة تدريج عرضه بالهرتز Hz ، ولذلك فإن f تكون هي المتغير المباشر الذي تتم ملاحظته.

٣- تحديد تحويل فورير في الفصل ٦ وبعض التحويلات الأخرى وعلاقات هذه التحويلات تكون أبسط على الصورة f عنها على الصورة ω.

مميزات استخدام الصورة ω هي كما يلي :

١- التردد الرنيني للأنظمة الحقيقية ، معبراً عنها مباشرة بدلالة المعاملات الطبيعية ، يتم التعبير عنها في الصورة ω ببساطة عنها في الصورة f. التردد الرنيني لمذبذب LC تتم كتابته كالتالي : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = (2\pi f_0)^2$ وتردد نصف الطاقة الركني لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة يمكن كتابته كالتالي : $\omega_c=1/RC=2\pi f_c$.

٢- تحويل لابلاس في الفصل ٨ يتم تحديده في صورة تكون ببساطة أكثر متعلقة بالصورة ω عنها بالصورة f.

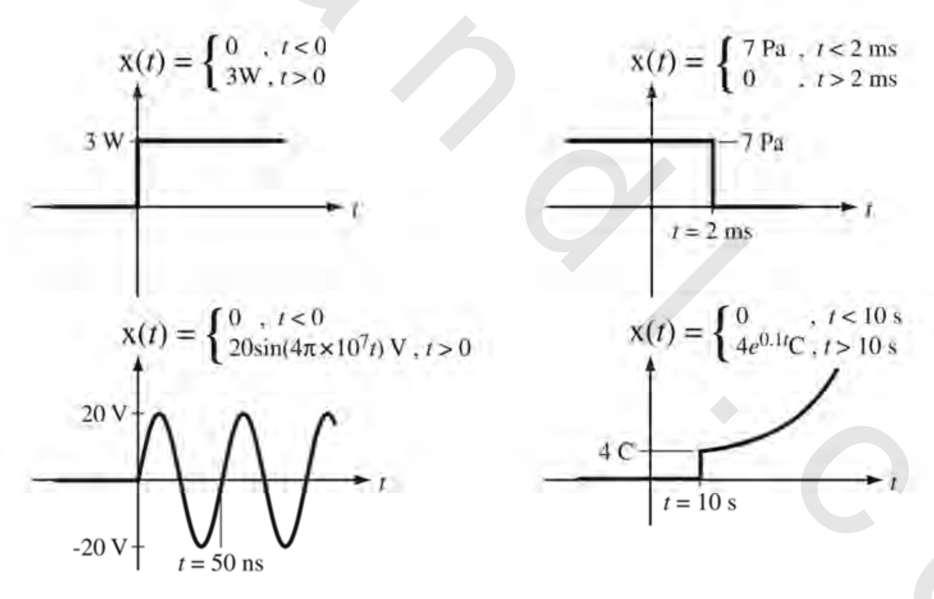
٣- بعض تحويلات فورير تكون أكثر بساطة في الصورة ω.

٤- استخدام ω في بعض التعبيرات يجعل هذه التعبيرات أكثر اندماجاً. فمثلاً $A\cos(\omega_0 t+\theta)$ تكون أكثر اندماجا عن الصورة $A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$.

الجيوب والأسس تكون مهمة في الإشارات والأنظمة نتيجة أنها تظهر طبيعياً في حلول المعادلات التفاضلية التي تصف ديناميكية النظام في العادة. كما سنرى عند دراسة تتابع فورير وتحويل فورير، حتى ولو كانت الإشارات ليست جيبية، فإن معظم هذه الإشارات يمكن التعير عنها كمجموع خطي من هذه الجيوب.

**الدوال التي بها نقاط عدم اتصال**

الجيوب وجيوب التمام والأسس المستمرة زمنياً كلها تكون مستمرة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة في الزمن، ولكن العديد من الأنواع الأخرى من الدوال المهمة التي تحدث في الأنظمة العلمية لا تكون مستمرة، أو قابلة للتفاضل عند كل مكان. عملية شائعة في الأنظمة هي جعل أي إشارة تعمل أو لا تعمل عند أي لحظة كما في شكل (٢- ٦).




**شكل رقم (٢,٦) أمثلة على الإشارات التى تتحول من إيقاف لتشغيل عند لحظة معينة**

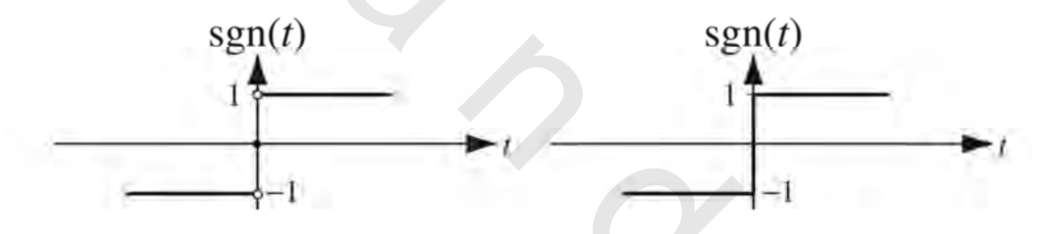
الوصف الوظيفي للإشارات في شكل (٢,٦) كامل ودقيق ولكنه في صورة معقدة. يمكن وصف الإشارات من هذا النوع حسابيا بطريقة أفضل عن طريق ضرب أي دالة تكون مستمرة وقابلة للتفاضل عند كل الأزمنة بدالة أخرى تتحول من صفر لواحد أو من واحد لصفر عند زمن محدد.

في تحليل الإشارات والأنظمة يمكن استخدام دوال متفردة، أو مميزة تكون مرتبطة ببعضها بعضاً من خلال التكاملات والتفاضلات، في الوصف الحسابي للإشارات التي لها عدم اتصال أو تفاضلات غير متصلة. هذه الدوال، والدوال جيدة الصلة بها من خلال بعض عمليات الأنظمة الشائعة ستكون هي موضوع هذا الجزء. عند اعتبار الدوال المتفردة سنحاول مد، وتعديل، و/أو تعميم بعض المفاهيم والعمليات الحسابية الأساسية، لكي تسمح لنا بأن نحلل بكفاءة الإشارات، والأنظمة الحقيقية. سننشر مفهوم ما هو التفاضل، وسنتعلم أيضاً كيف نستخدم أي كيان حسابي مهم، والنبضة، التي تكون مشابهة أكثر للدالة، ولكنها ليست دالة بالمعنى العادي.

**دالة الإشارة signum function**

للمعادلات التي لا تساوي الصفر، فإن دالة الإشارة يكون لها مقدار يساوي الواحد وإشارة تكون هي إشارة الإشارة المذكورة نفسها كمعامل، كالتالي وكما هو موضح في شكل (٢,٧):

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٢,١)




**شكل رقم (٢,٧) دالة الإشارة**

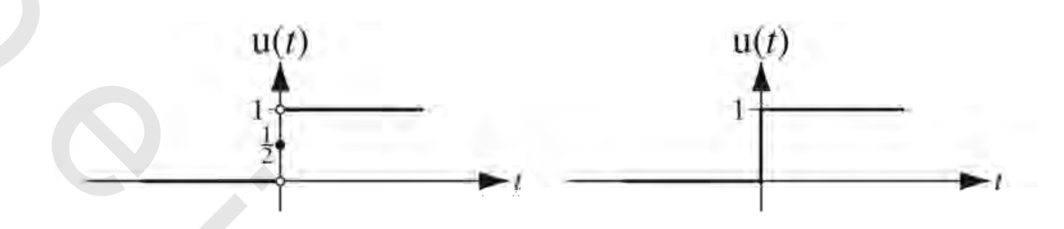
المخطط الموجود على اليسار في شكل (٢,٧) يبين التحديد الحسابي الدقيق لهذه الدالة. المخطط الأيمن هو طريقة شائعة للتعبير عن الدالة للأغراض الهندسية. لا توجد إشارة عملية يمكن أن تتغير بصورة متقطعة، أو غير مستمرة، ولذلك فإذا تم عمل تقريب لدالة الإشارة، وتم توليدها عن طريق مولد إشارة ورؤيتها على مبين الذبذبات، أو الأسولوسكوب، فإنها ستبدو كما في المخطط الأيمن. دالة الإشارة دالة ضمنية في ماتلاب وتسمى الدالة sign.

**دالة وحدة الخطوة Unit step**

يتم تحديد دالة الوحدة كما يلي:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٢,٢)

شكل (٢,٨) يبين دالة وحدة الخطوة. إنها تسمى وحدة الخطوة ؛ لأن الخطوة يكون ارتفاعها وحدة واحدة بوحدات النظام المستخدم لوصف الإشارة.




**شكل رقم (٢,٨) دالة وحدة الخطوة**

بعض المؤلفين يعرف دالة وحدة الخطوة كما يلي :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & for & t > 0 \\ 0 & for & t \le 0 \end{cases}$$

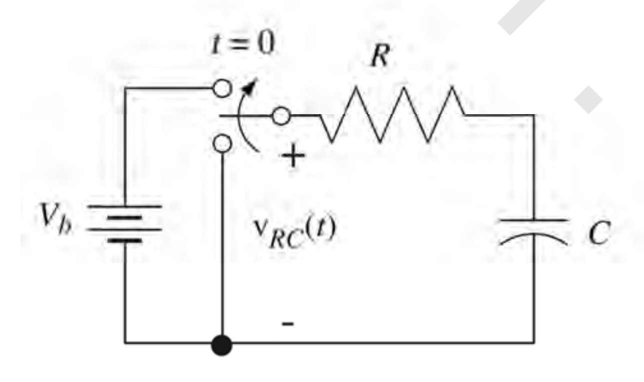
أو

$$u(t) = \begin{cases} 1 & for & t > 0 \\ 0 & for & t < 0 \end{cases}$$

أو

$$u(t) = \begin{cases} 1 & for & t \ge 0 \\ 0 & for & t < 0 \end{cases}$$

في التعريف الأوسط تكون القيمة عند t=0 غير محددة. وحدة الخطوة المعرفة بهذه التعريفات يكون لها التأثيرات نفسها على أي نظام طبيعي.




**شكل رقم (٢,٩) دالة بها مفتاح تأثيره يعبر عن وحدة الخطوة**

دالة الخطوة يمكنها أن تمثل حدثاً شائعاً في الأنظمة الطبيعية الحقيقية، إنه الانتقال السريع من حالة معينة لحالة أخرى. في الدائرة المبينة في شكل (٢,٩) ينتقل المفتاح من موضع لآخر عند الزمن t=0. الجهد المطبق على دائرة RC يكون $v_{RC}=V_b u(t)$، ويكون التيار خلال المقاومة والمكثف يساوي:

$$i(t) = (\frac{V_b}{R})e^{-t/RC}u(t)$$

والجهد على المكثف سيكون $v(t) = V_b\left(1 - e^{-t/RC}\right)u(t)$.

هناك دالة ضمنية في ماتلاب تسمى heaviside تعود بالقيمة واحد للمعاملات الموجبة والقيمة صفر للمعاملات السالبة وقيمة غير محدد NaN للمعاملات الصفرية. ثابت ماتلاب NaN يعني "ليس رقم" أو "Not a Number" وهو يعني أيضاً قيمة غير محددة. هناك بعض المشكلات العملية مع استخدام هذه الدالة في الحسابات الرقمية حيث إن القيمة غير المحددة من الممكن أن تنهي البرامج، أو تتسبب في أن البرنامج يؤول إلى قيم لا فائدة منها.

من الممكن أن ننتج الدالة الخاصة بنا في ماتلاب بحيث يمكن النداء على هذه الدوال من قبل المستخدم مثل: الدوال الضمنية cos و sin و exp وإلخ. تتحدد دوال ماتلاب عن طريق تخليق ملف يسمى ملف إم m file، وهو ملف يكون اسمه له الامتداد ".m". يمكننا تخليق ملف يعطي وتر المثلث القائم الزاوية بمعلومية طول كل من الضلعين الآخرين فيه:

%دالة لتوليد طول وتر مثلث قائم الزاوية بمعلومية طول الضلعين الآخرين

%

a % طول أحد الضلعين هو

b % طول الضلع الآخر هو

c % طول الوتر هو

%الدالة هي function c=hyp(a,b) %

```
Function c=hyp(a,b)
   c=sqrt(a^2+b^2);
```

التسعة خطوط الأولى في هذا المثال، التي تبدأ بالحرف % تمثل تعليقات، بمعنى أوامر غير قابلة للتنفيذ، ولكنها تشرح كيفية استخدام الدالة. الأمر الأول القابل للتنفيذ يجب أن يبدأ بالكلمة المفتاحية function، وباقي الخط الأول يكون كما يلي:

```
result=name (arg1, arg2, …)
```

حيث result ستحتوي القيمة العائدة من الدالة، التي من الممكن أن تكون كمية قياسية، أو متجه، أو مصفوفة (أو حتى مصفوفة خلية أو هيكل، والتي هي خارج نطاق هذا الكتاب)، و name هو اسم الدالة، و arg1، و arg2، وهي المعاملات التي يتم تمريرها للدالة. المعاملات يمكن أن تكون أيضاً كميات قياسية أو متجهات، أو مصفوفات (أو خلية متجهات أو هيكل). اسم الملف الذي سيحتوي تحديد الدالة يجب أن يكون على الصورة name.m.

فيما يلي سنعرض قائمة أوامر لدالة ماتلاب لتنفيذ دالة خطوة الوحدة في الحسابات الرقمية : صفر في المائة
دالة وحدة الخطوة التي تعطي صفراً عندما تكون قيم معاملات الدخل أقل من الصفر ، في المئة
وتعطي ½ لقيم المعاملات التي تساوي صفر ، في المئة
وتعطي واحد عندما تكون قيم المعاملات أكبر من الصفر ،
هذه الدالة تستخدم دالة الإشارة sign لتنفيذ دالة وحدة الخطوة ، ولذلك فإن القيمة عند t=0 تكون محددة ٪
وهذا يتجنب استخدام قيم غير محددة أثناء تنفيذ أي برنامج يستخدم هذه الدالة %

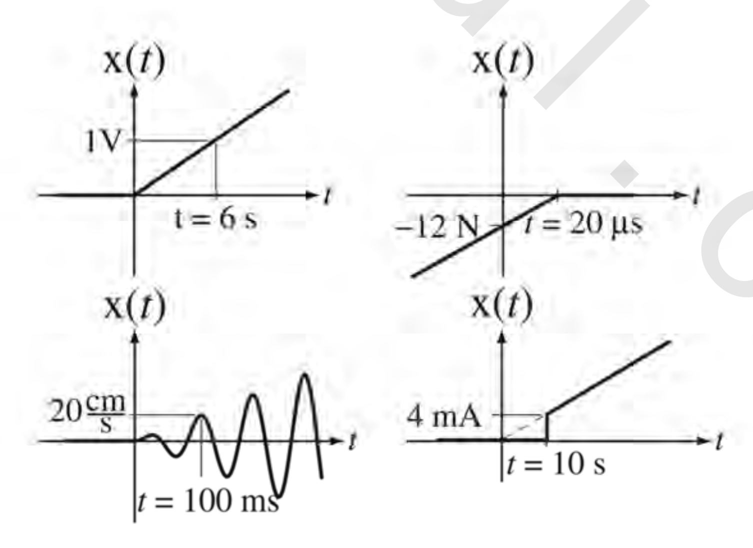
```
%
% function y = us(x)
Function y = us(x)
     Y = (sign(x)+1)/2   ;
```

هذه الدالة يجب تخزينها في ملف اسمه "us.m".

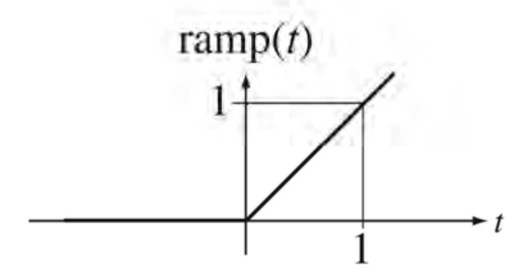
**دالة انحدار الوحدة**

نوع آخر من الإشارات التي تحدث عادة في الأنظمة هي الإشارة التي تبدأ عند زمن معين وتتغير خطيا بعد هذا الزمن ، أو أنها تتغير خطيا قبل زمن معين وتنتهي عند هذا الزمن كما في شكل (٢,١٠). الإشارات من هذا النوع يمكن وصفها باستخدام الدالة ramp. الدالة الانحدارية في شكل (٢,١١) هي تكامل دالة الخطوة. إنها تسمى دالة وحدة الانحدار لأنها ، لقيم t الموجبة ، يكون ميلها هو مقدار الوحدة لكل وحدة زمن.

$$ramp(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda = tu(t)$$ المعادلة رقم (٢,٣)

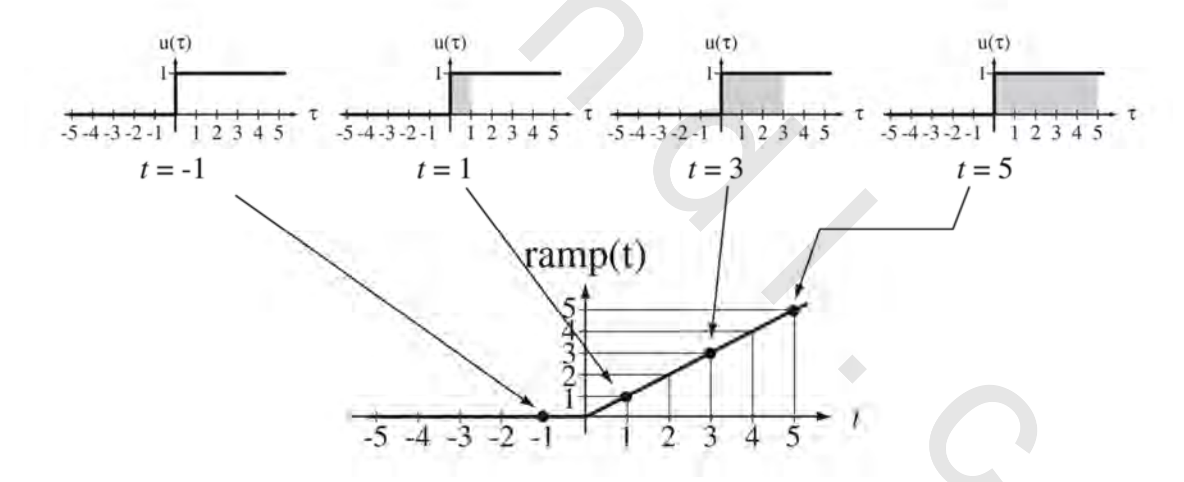



**شكل رقم (٢,١٠) دوال تتغير خطياً قبل أو بعد زمن معين، أو مضروبة في دوال تتغير خطياً قبل أو بعد زمن معين**




**شكل رقم (٢,١١) دالة وحدة الانحدار**

يحدد الانحدار بالدالة $ramp(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$. في هذه الدالة، الرمز τ هو المتغير المستقل لدالة وحدة الخطوة وهو متغير التكامل. ولكن t هي المتغير المستقل لدالة الانحدار. هذه المعادلة تقول، "لإيجاد قيمة دالة الانحدار عند أي قيمة للزمن t، فإننا نبدأ بقيمة τ عند سالب ما لانهاية ونتحرك بزيادة τ حتى τ=t، بينما يتم تراكم المساحة تحت دالة وحدة الخطوة. المساحة المتراكمة الكلية من τ=-∞ حتى τ=t هي قيمة دالة الانحدار عند الزمن t كما في شكل (٢,١٢). لقيم t الأقل من الصفر، لن تكون هناك مساحة متراكمة. لقيم t الأكبر من الصفر، فإن المساحة المتراكمة تساوي t لأنها مساحة مستطيل عرضه t وارتفاعه واحد.




**شكل رقم (٢,١٢) العلاقة التكاملية بين وحدة الخطوة ووحدة الانحدار**

بعض المؤلفين يفضلون استخدام التعبير t u(t) بدلاً من ramp(t)، وحيث إنهما متساويان، فإن استخدام أيهما يكون صحيحاً ويكون قانونياً كالآخر. فيما يلي ملف إم ماتلاب لدالة الانحدار:

دالة ماتلاب لحساب دالة الانحدار التي تعطي صفراً لقيم المعاملات الأقل من أو تساوي صفر في المائة.

وتساوي قيمة المعامل نفسه لقيم المعاملات الأكبر من أو تساوي الصفر في %.

وتستخدم دالة الوحدة us(x) %

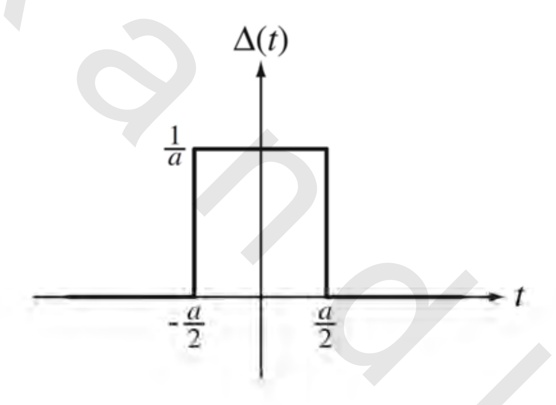
```
%
% function y = ramp(x)
%
function y = ramp(x)
      y =x.*us(x)     ;
```

**دالة وحدة النبضة unit impulse**

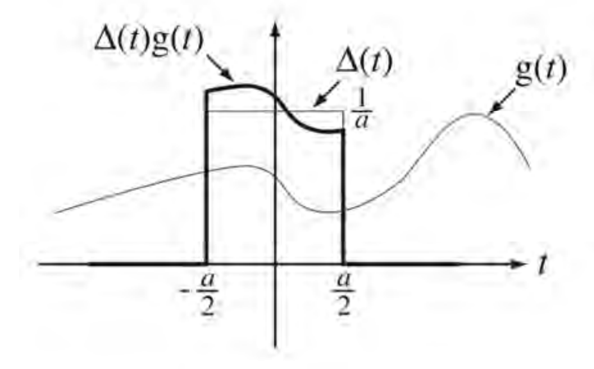
قبل تحديد وحدة النبضة سنستكشف أولاً فكرة مهمة. افترض نبضة مستطيلة مساحتها تساوي الوحدة تحدد كما يلي، وكما في شكل (٢،١٣):

$$\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & |t| \le a/2 \\ 0 & |t| > a/2 \end{cases}$$

دع هذه الدالة تضرب في الدالة g(t) المحددة والمستمرة عند الزمن t=0 ونوجد المساحة A تحت حاصل ضرب الدالتين $A = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t)g(t)dt$ كما في شكل (٢- ١٤).




**شكل رقم (٢,١٣) نبضة مستطيلة مساحتها تساوي الوحدة وعرضها a**




**شكل رقم (٢,١٤) حاصل ضرب نبضة مستطيلة مساحتها الوحدة متمركزة عند t=0 ودالة g(t) محددة ومستمرة عند t=0**

باستخدام التعريف Δ(t) يمكننا إعادة كتابة التكامل كما يلي :

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} g(t)\,dt$$

الدالة g(t) تكون مستمرة عند t=0، ولذلك فإنه يمكن التعبير عنها بتتابع ماكلورين McLaurin كما يلي :

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} t^m = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m + \cdots$$

وبالتالي يصبح التكامل كما يلي :

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \left[g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m + \cdots\right] dt$$

كل القوى الفردية للزمن t لا تشارك في التكامل لأنها مأخوذة على الحدود المتماثلة حول t=0. بتنفيذ هذا التكامل نحصل على :

$$A = \frac{1}{a}\left[a g(0) + \left(\frac{a^3}{12}\right)\frac{g''(0)}{2!} + \left(\frac{a^5}{80}\right)\frac{g^{(4)}(0)}{4!} + \cdots\right]$$

بأخذ حدود هذا التكامل مع اقتراب a من الصفر نحصل على :

$$\lim_{a\to 0} A = g(0)$$

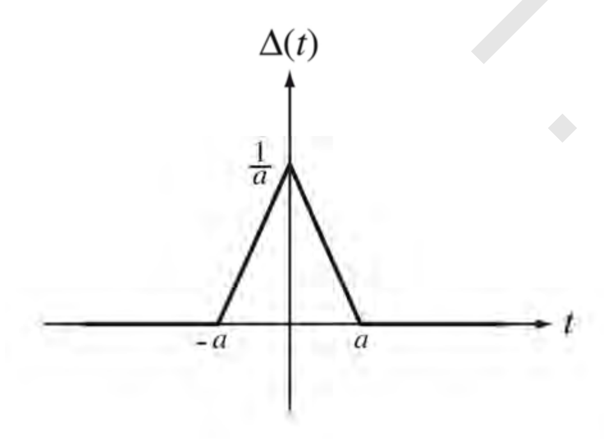
عند الحد مع اقتراب a من الصفر، فإن الدالة Δ(t) تستخلص قيمة أي دالة مستمرة محددة g(t) عند الزمن t=0، عندما يتم تكامل حاصل ضرب كل من Δ(t) و g(t) على المدى الزمني الذي يشتمل على الزمن t=0.

الآن سنحاول مع تعريفات مختلفة للدالة Δ(t). افترض التعريف التالي الآن كما في شكل (٢,١٥) :

$$\Delta(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{|t|}{a}\right), & |t| \le a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

إذا افترضنا الجدل السابق نفسه فسنحصل على المساحة التالية :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t) g(t) dt = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{|t|}{a}\right) g(t) dt$$




**شكل رقم (٢,١٥) نبضة مثلثة مساحتها الوحدة ونصف عرض قاعدتها يساوي a**

بأخذ الحد مع اقتراب a من الصفر، فإننا نحصل مرة أخرى على g(0)، وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها مع التعريف السابق لـ Δ(t). التعريفان السابقان لـ Δ(t) لهما نفس التأثير عند الحدود عندما تقترب a من الصفر (وليس قبل ذلك). إن شكل الدالة لا يكون هو المهم عند الحدود، ولكن مساحتها تكون هي المهمة. في أي من الحالتين فإن Δ(t) تكون دالة مساحتها تساوي الواحد، دون الاعتماد على قيمة a. (مع اقتراب a من الصفر فإن هذه الدوال لا يكون لها شكل بالمعنى الأولي؛ لأنه لا يوجد زمن يتم فيه بناء هذا الشكل). هناك العديد من التعريفات الأخرى لـ Δ(t) التي يمكن استخدامها التأثير نفسه تماما عند الحدود.

وحدة النبضة δ(t) يمكن تعريفها الآن بشكل مطلق عن طريق الخاصية بأنه عند ضربها في أي دالة g(t) مستمرة ومحددة عند الزمن t=0 وتكامل هذا الضرب على فترة زمنية تشتمل على الزمن t=0، فإن نتيجة التكامل تكون g(0) كما يلي:

$$g(0) = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t) g(t) dt, \quad \alpha < 0 < \beta$$

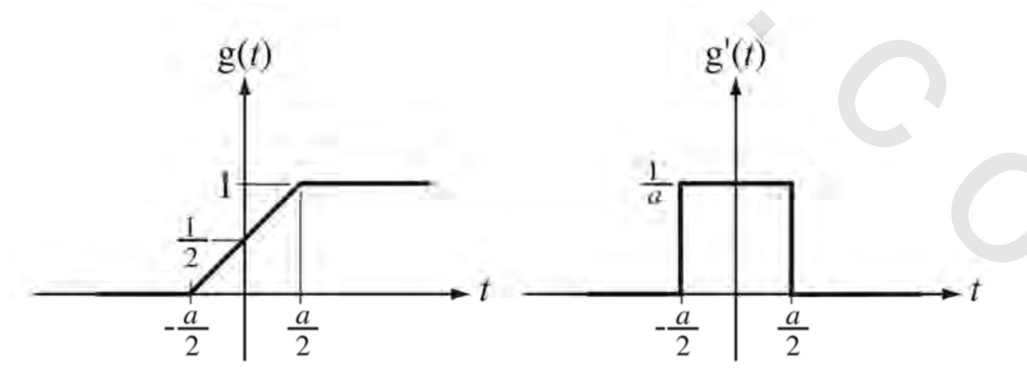
أو بمعنى آخر فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt = \lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t) g(t) dt$$ المعادلة رقم (٢,٤)

حيث Δ(t) هي واحدة من العديد من الدوال التي تكون لها الخواص السابق ذكرها. إن الرمز δ(t) يعتبر رمزاً مبسطاً ومريحاً يتجنب الاستمرار في إجراء الحدود عند استخدام الصدمات.

**النبضة، ووحدة الخطوة، والتفاضلات العامة**

واحدة من طرق تقديم وحدة النبضة هي عن طريق تعريفها بأنها تفاضل دالة وحدة الخطوة، وبالتحديد، فإن تفاضل وحدة الخطوة u(t) يكون غير معرف عند t=0. ولكن افترض أي دالة g(t) في الزمن وتفاضلها الزمني g'(t) كما هو موضح في شكل (٢,١٦):




**شكل رقم (٢,١٦) الدوال التى تقترب من وحدة الخطوة ووحدة النبضة**

تفاضل الدالة g(t) يوجد عند كل الأزمنة t ما عدا عند الزمن t=-a/2 والزمن t=+a/2. مع اقتراب a من الصفر، فإن الدالة g(t) تقترب من وحدة الخطوة. عند الحدود نفسها ، فإن العرض المختلف عن الصفر للدالة g'(t) يقترب من الصفر، بينما تظل مساحتها كما هي تساوي الواحد. وعلى ذلك، فإن g'(t) تكون نبضة قصيرة الزمن مساحتها تساوي دائماً الواحد، وهو ما حصلنا عليه مع التعريف نفسها الابتدائي السابق لـ Δ(t)، ونفس الآثار المترتبة عليه. إن الحد الذي نحصل عليه مع اقتراب a من الصفر للدالة g'(t) يسمى التفاضل العام للدالة u(t). ولذلك فإن وحدة النبضة هي التفاضل العام لوحدة الخطوة.

التفاضل العام لأي دالة g(t) مع عدم اتصال عند t=0 يمكن كتابته كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \underbrace{\frac{d}{dt}(g(t))_{t\neq t_0} + \lim_{\varepsilon\to 0}[g(t+\varepsilon)-g(t-\varepsilon)]}_{\text{حجم عدم الاتصال}}\,\delta(t-t_0), \quad \varepsilon > 0$$

وحدة الخطوة تساوي تكامل وحدة النبضة :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda$$

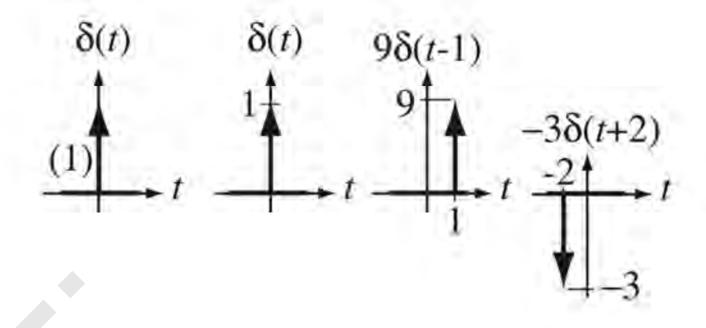
تفاضل وحدة الخطوة u(t) تكون صفراً في كل الأوقات ماعدا t=0، وعلى ذلك فإن وحدة النبضة تكون صفراً في كل الأماكن ماعدا عند t=0. حيث إن وحدة الخطوة تساوي تكامل وحدة النبضة، فإن التكامل المحدود لوحدة النبضة على مدى يشتمل على t=0 يجب أن تكون قيمته تساوي الواحد. هاتان الحقيقتان تستخدمان عادة في تعريف وحدة النبضة كما يلي :

$$\delta(t) = 0, \ t \neq 0 \ \ and \ \ \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & otherwis \end{cases}$$ المعادلة رقم (٢,٥)

تسمى المساحة تحت النبضة بالشدة، أو أحياناً يطلق عليها الوزن. أي نبضة بمساحة تساوي الواحد تسمى وحدة النبضة. التعريق الدقيق وخواص النبضة يتطلبان الغوص، أو التعمق في النظرية العامة للدوال. سيكون من الكافي هنا أن نفترض أن وحدة النبضة تكون ببساطة نبضة ذات مساحة تساوي الواحد وفترة زمنية صغيرة جداً بحيث يكون أي تصغير لهذه الفترة أكثر من ذلك لن يحدث أي تغيير مهم في أي إشارة في النظام يتم تطبيق النبضة عليها.

لا يمكن رسم النبضة بالطريقة نفسها مثل الدوال الأخرى؛ لأن قيمتها تكون غير معرفة عندما يكون معاملها يساوي صفراً. العرف السائد لرسم النبضة هو استخدام السهم الرأسي. أحياناً تتم كتابة شدة النبضة بجوار السهم

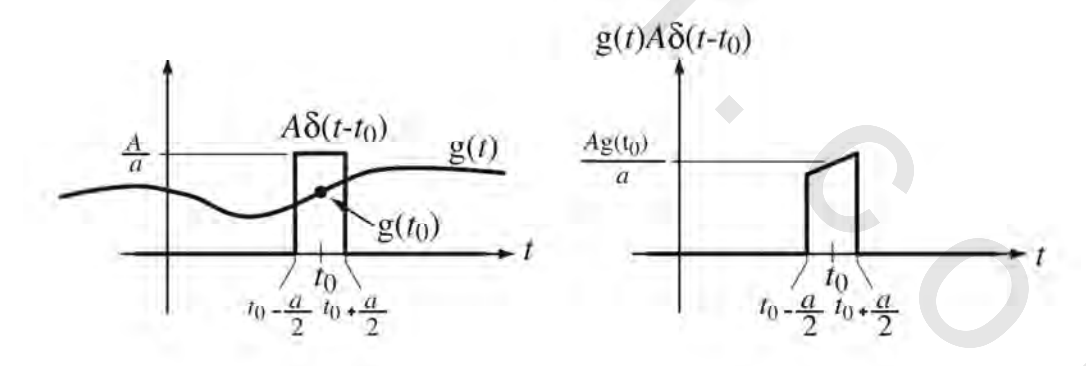
بين قوسين، وأحياناً يكون ارتفاع السهم مبيناً لشدة النبضة. شكل (٢,١٧) يوضح بعض الطرق للتعبير عن النبضة بيانيا أو من خلال الرسم.




**شكل رقم (٢,١٧) التعبير البياني أو مخطط الصدمات**

**خاصية التكافؤ للنبضة**

واحدة من العمليات الحسابية الشائعة في تحليل الإشارات والأنظمة هي ضرب النبضة مع دالة أخرى مثل، $g(t)A\delta(t-t_0)$. افترض أن النبضة $A\delta(t-t_0)$ هي الحد لنبضة مساحتها A متمركزة عند $t=t_0$، وعرضها و a، عندما تقترب a من الصفر كما في شكل (٢,١٨). حاصل الضرب هو النبضة التي يكون ارتفاعها عند نقطة المنتصف يساوي $Ag(t_0)/a$ والتي عرضها يساوي a. مع اقتراب a من الصفر، فإن النبضة تصبح نبضة وشدة هذه النبضة يساوي $Ag(t_0)$. لذلك يمكننا كتابة ما يلي:




**شكل رقم (٢,١٨) حاصل ضرب دالة g(t) ودالة مستطيلة يصبح نبضة مع اقتراب العرض من الصفر**

$$g(t)A\delta(t-t_0)=g(t_0)A\delta(t-t_0)$$ المعادلة رقم (٢,٦)

إن هذا يسمى أحياناً بخاصية التكافؤ للنبضة.

**خاصية أخذ العينة (العيننة) للنبضة**

خاصية أخرى مهمة لوحدة النبضة يتم استنتاجها من خاصية التكافؤ وهي خاصية العيننة.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0)$$ المعادلة رقم (٢,٧)

تبعاً لخاصية التكافؤ، فإن حاصل الضرب $g(t)\delta(t-t_0)$ يساوي $g(t_0)\delta(t-t_0)$. وحيث إن $t_0$ هي قيمة خاصة من t، فإنها تكون ثابتاً وكذلك تكون قيمة $g(t_0)$ ثابتاً أيضاً، وبالتالي فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt}_{=1} = g(t_0)$$

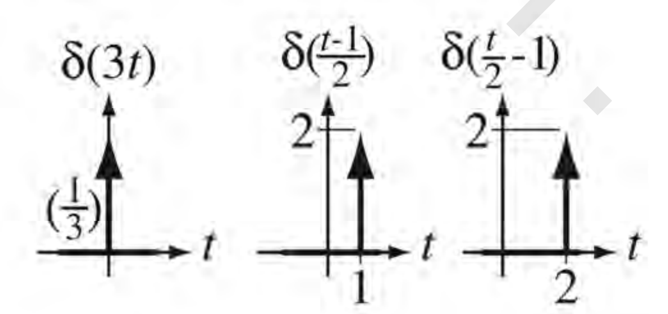
المعادلة (٢,٧) تسمى خاصية العيننة للنبضة؛ لأنه في التكامل الذي من هذا النوع يتم أخذ عينة من قيمة الدالة g(t) عند الزمن $t=t_0$. (الاسم القديم لها كان خاصية الغربلة، حيث إن النبضة تقوم بغربلة قيمة الدالة g(t) عند الزمن $t=t_0$).

**خاصية التحجيم للنبضة**

خاصية أخرى مهمة للنبضة هي خاصية التحجيم المعرفة كما يلي:

$$\delta(a(t-t_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(t-t_0)$$ المعادلة رقم (٢,٨)

وهذه يمكن إثباتها من خلال تغير المتغيرات في تعريف التكامل وفص افتراض القيم الموجبة والسالبة للقيمة a (انظر التمرين ٢٩). شكل (٢,١٩) يوضح بعض التأثيرات لخاصية التحجيم للنبضة.




**شكل رقم (٢,١٩) أمثلة على تأثيرات خاصية التحجيم للنبضة**

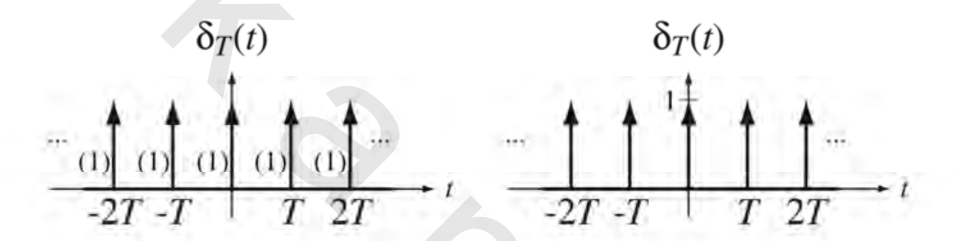
هناك دالة في ماتلاب تسمى dirac تعطي وحدة النبضة بمعنى محدود. إنها تعطي صفراً لكل المعاملات التي لا تساوي الصفر وتعطي inf للمعامل الذي يساوي الصفر. إن ذلك لا يكون مفيداً في الحسابات الرقمية، ولكنه

يفيد في التحليل الرمزي. إن النبضة المستمرة زمنياً ليست دالة عادية. أحياناً يمكن كتابة دالة ماتلاب يمكن استخدامها، في نوع معين من الحسابات، لتحاكي النبضة وتعطي نتائج رقمية مفيدة. ولكن يجب عمل ذلك بحرص شديد، واعتماد على الفهم الكامل لخواص النبضة. لن نقدم دالة ماتلاب هنا للنبضة المستمرة زمنياً نتيجة هذا التعقيد.

### وحدة النبضة الدورية أو تتابع الصدمات

واحدة أخرى من الدوال المهمة العامة هي النبضة الدورية، أو تتابع الصدمات كما في شكل (٢,٢٠)، الذي هو عبارة عن تتابع لا نهائي من الصدمات المنتظم المسافات والمعرف كما يلي:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$ المعادلة رقم (٢,٩)




**شكل رقم (٢,٢٠) النبضة الدورية**

يمكننا استنتاج خاصية تحجيم للنبضة الدورية. من التعريف التالي:

$$\delta_T\big(a(t - t_0)\big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\big(a(t - t_0) - kT\big)$$

باستخدام خاصية التحجيم للنبضة يمكننا كتابة:

$$\delta_T\big(a(t - t_0)\big) = \left(\frac{1}{|a|}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - kT/a)$$

حيث يمكن التعرف على المجموع على أنه نبضة دورية دورتها تساوي T/a كما يلي:

$$\delta_T\big(a(t - t_0)\big) = \left(\frac{1}{|a|}\right) \delta_{T/a}(t - t_0)$$

يمكن النظر للنبضة والنبضة الدورية على أنهما يبدوان نظريات تجريدية وغير حقيقية. ستظهر النبضة بعد ذلك في عملية أساسية في تحليل الأنظمة الخطية، وهي الالتفاف التكاملي. على الرغم من أنه، كواقع، فإنه يستحيل توليد النبضة الحقيقية، إلا أن النبضة الحسابية والنبضة الدورية مفيدتان جدا في تحليل الإشارات والأنظمة. باستخدامهما مع عملية الالتفاف، فإنه يمكننا التعبير حسابياً، وبترميز مدمج، عن العديد من الإشارات التي من الممكن أن يكون التعبير عنها ثقيلاً أو متعباً بأي طريقة أخرى.

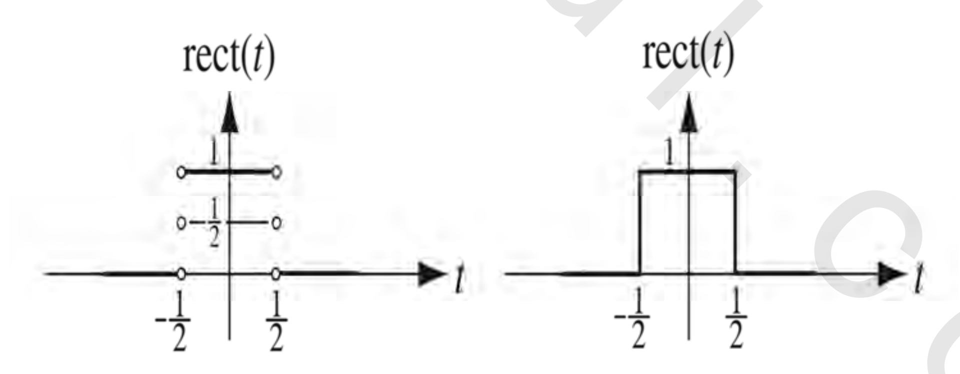
### الترميز المنسق للدوال الأحادية

وحدة الخطوة، ووحدة النبضة، ووحدة الانحدار تمثل أهم الأعضاء في الدوال الأحادية. في بعض مطبوعات الإشارات والأنظمة يتم بيان هذه الدوال بالرمز المنسق $u_k(t)$ والذي فيه قيمة k تحدد الدالة. فمثلا، $u_0(t)=\delta(t)$، و $u_{-1}(t)=u(t)$، و $u_{-2}(t)=ramp(t)$. في هذا الترميز فإن الرقم الجانبي يبين كم مرة يتم تفاضل النبضة للحصول على الدالة المطلوبة والإشارة السالبة الجانبية تدل على إجراء التكامل بدلا من التفاضل. unit doublet $u_1(t)$ أو واحدة الاثنين تعرف على أنها التفاضل العام لوحدة النبضة، و unit triplet $u_2(t)$ أو الواحد من ثلاثة تعرف على أنها التفاضل العام لواحد الاثنين، وهكذا. على الرغم من أن دالة الواحد من اثنين والواحد من ثلاثة والتفاضلات العامة الأعلى تكون أقل في الجانب العملي عن وحدة النبضة، إلا أنها تكون مفيدة أحياناً في نظريات الإشارات والأنظمة.

### دالة وحدة المستطيل

نوع من الإشارات شائع الحدوث جداً في الأنظمة وهو الإشارة التي تبدأ عند زمن معين، ثم تنتهي عند زمن آخر. من المريح أن نعرف دالة وحدة المستطيل كما في شكل (٢,٢١) لاستخدامها في وصف هذا النوع من الإشارات كما يلي:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ \frac{1}{2} & |t| = 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٢,١٠)




**شكل رقم (٢,٢١) دالة وحدة المستطيل**

إنها دالة وحدة مستطيل لأن عرضها، وارتفاعها، ومساحتها كلها تساوي آحاداً. إن استخدام دالة المستطيل يقصر من عملية الترميز عند وصف بعض الإشارات. يمكن التفكير في دالة وحدة المستطيل على أنها دالة

"بوابة gate". عند ضربها في دالة أخرى، فإن حاصل الضرب يكون صفراً خارج النطاق الذي لا تساوي فيه صفراً وتساوي الدالة الأخرى في داخل النطاق الذي لا تكون فيه الدالة المستطيلة تساوي صفراً. أي أن دالة المستطيل تفتح البوابة لتسمح بمرور الدالة الأخرى، وبعد ذلك تغلق البوابة مرة أخرى. جدول (٢،١) يعرض ملخصاً لهذه الدوال والنبضة والنبضة الدورية التي وصفها فيما سبق.

دالة وحدة المستطيل، باستخدام دالة وحدة الخطوة us(x) ٪

```
%
% function y = rect(x)
%
 function y = rect(x)
      y = us(x+0.5) – us(x-0.5);
```

**جدول ٢،١ ملخص لدوال إشارات الزمن المستمر، والنبضة، والنبضة الدورية**

| | |
|---|---|
| الجيب Sin | $\sin(\omega_0 t)$ أو $\sin(2\pi f_0 t)$ |
| جيب التمام Cosine | $\cos(\omega_0 t)$ أو $\cos(2\pi f_0 t)$ |
| الأس Exponential | $e^{st}$ |
| وحدة الخطوة Unit step | u(t) |
| الإشارة Signum | sgn(t) |
| وحدة الانحدار Unit ramp | ramp(t)=t u(t) |
| وحدة النبضة Unit impulse | $\delta(t)$ |
| النبضة الدورية Periodic impulse | $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ |
| وحدة المستطيل Unit rectangle | rect(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2) |

## (٢،٤) تراكيب الدوال

الرمز القياسي لدالة في الزمن المستمر هو g(t) الذي تكون فيه g اسم الدالة وكل شيء داخل القوسين (.) يسمى معاملات الدالة. تتم كتابة المعاملات بدلالة المتغير المستقل. في حالة الدالة g(t)، تكون t هي المتغير المستقل والتعبير هو من أبسط التعبيرات الممكنة بدلالة t، وهو المتغير t نفسه. أي دالة g(t) تعطى أو تعود بالقيمة g عند كل قيمة للمتغير t. في الدالة $g(t)=2+4t^2$، لأي قيمة للمتغير t هناك قيمة مقابلة للدالة g. إذا كانت t تساوي 1، فإن g تساوي 6 ويمكن الرمز لذلك كما يلي: g(1)=6.

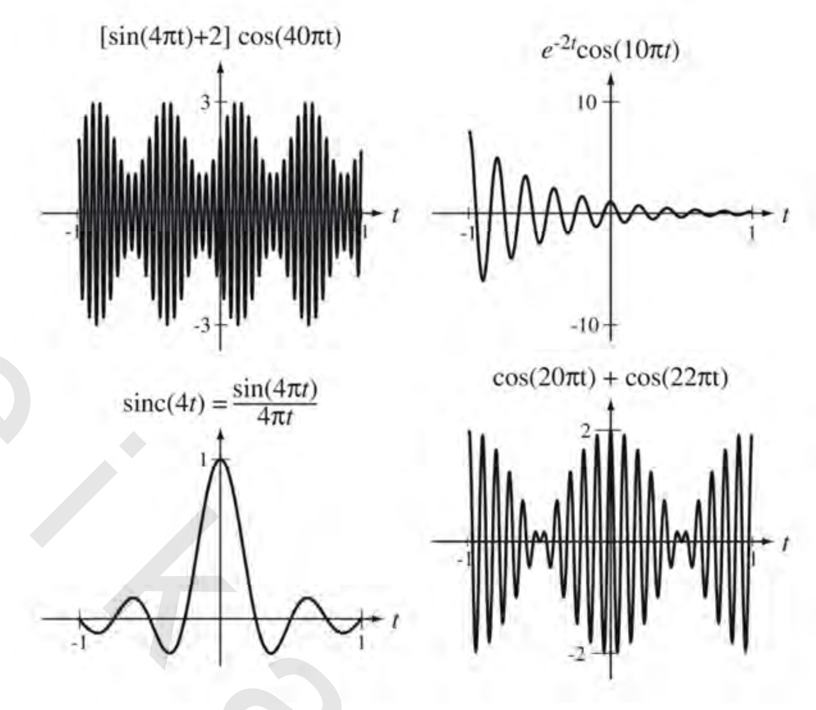
ليس بالضرورة أن تكون معاملات الدالة ببساطة هي المتغير المستقل. إذا كانت $g(t)=5e^{-2t}$، فما هي قيمة g(t+3)؟ إننا نستبدل t بـ t+3 في كل مكان على جانبي الدالة $g(t)=5e^{-2t}$ لنحصل على $g(t+3)=5e^{-2(t+3)}$. لاحظ أننا لم نحصل على $5e^{-2t+3}$ حيث t كانت مضروبة في 2- في الأس e، ولذلك فإن كل التعبير (t+3) يجب ضربه أيضاً في 2- في

الأس الجديد e. أي شيء يتم إجراؤه على t في الدالة $g(t)$ يجب إجراؤه على كل التعبير expression المشتمل على t في أي دالة أخرى g(expression). إذا كانت $g(t)=3+t^2-2t^3$ فإن $g(2t)=3+(2t)^2-2(2t)^3=3+4t^2-16t^3$ ، و $g(1-t)=3+(1-t)^2-2(1-t)^3=2+4t-5t^2+2t^3$. إذا كانت $g(t)=10\cos(20\pi t)$ فإن $g(t/4)=10\cos(20\pi t/4)=10\cos(5\pi t)$ ، و $g(e^t)=10\cos(20\pi e^t)$. وإذا كانت $g(t)=5e^{-10t}$ فإن $g(2x)=5e^{-20x}$ ، و $g(z-1)=5e^{10}e^{-10z}$.

في ماتلاب، عند النداء على أي دالة عن طريق تمرير المعاملات إليها، فإن ماتلاب يقوم بتقييم المعاملات، وبعد ذلك يحسب قيمة الدالة. في معظم الدوال، إذا كان المعامل عبارة عن متجه، أو مصفوفة، فإن ماتلاب يعود بقيمة لكل عنصر في المتجه، أو المصفوفة. لذلك فإن دوال ماتلاب تقوم بعمل ما وصفناه مسبقاً بالضبط على المعاملات التي تكون دالة في المتغير المستقل: إنها تستقبل أرقاماً وتعطي أرقاماً أخرى.

```
>> exp(1:5)
ans =
2.7183 7.3891 20.0855 54.5982 148.4132
>> us(-1:0.5:1)
ans =
0 0 0.5000 1.0000 1.0000
>> rect([-0.8:0.4:0.8]')
ans =
        0
        1
        1
        1
        0
```

في بعض الأحوال يمكن لدالة حسابية واحدة أن تصف إشارة معينة بالكامل. ولكن في العادة لاتكون دالة واحدة كافية للوصف الدقيق لبعض الإشارات. هناك عملية تسمح بالتنوع في التعبير الحسابي عن الإشارات وهي ربط أو تجميع اثنين، أو أكثر من الدوال. هذا الربط بين الدوال من الممكن أن يكون في صورة جمع، أو فروق، أو ضرب و/أو حواصل قسمة دوال. شكل (٢،٢٢) يبين بعض الأمثلة على المجاميع، والضرب، وحاصل قسمة الدوال. (الدالة sinc سيتم تعريفها في الفصل ٦).




**شكل رقم (٢,٢٢) أمثلة على المجاميع، والضرب، وحاصل القسمة للدوال**

**مثال ٢,١**

**رسم تجميعات الدوال بماتلاب**

باستخدام ماتلاب، ارسم تجميعات الدوال التالية:

$$x_1(t) = e^{-t}\sin(20\pi t) + e^{-t/2}\sin(19\pi t)$$
$$x_2(t) = rect(t)\cos(20\pi t)$$

برنامج لرسم بعض الأمثلة على تجميعات الدوال المستمرة زمنياً %

متجه النقاط الزمنية لرسم $x_1$ ٪ ;t = 0:1/240:6

توليد قيم $x_1$ للرسم ٪

```
x1 = exp(-t).*sin(20*pi*t) + exp(-t/2).*sin(19*pi*t)   ;
```

الرسم في النصف الأعلى من نافذة الرسم ٪ subplot(2,1,1) ;

رسم المخطط بالخطوط السوداء ٪ p = plot(t, x1, 'k') ;

ضبط عرض الخط على ٢ ٪ set(p, 'LineWidth', 2) ;

عنوان المحور الأفقي والرأسي ٪

```
xlabel('\itt', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
ylabel('x_1({\itt})', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ; grid on ;
```

متجه النقاط الزمنية لرسم x2 ٪ t=-2:1/240:2 ;

توليد قيم x2 للرسم ٪

```
x2 = rect(t).*cos(20*pi*t) ;
```

الرسم في النصف الأسفل من نافذة الشكل ٪ subplot(2,1,2) ;

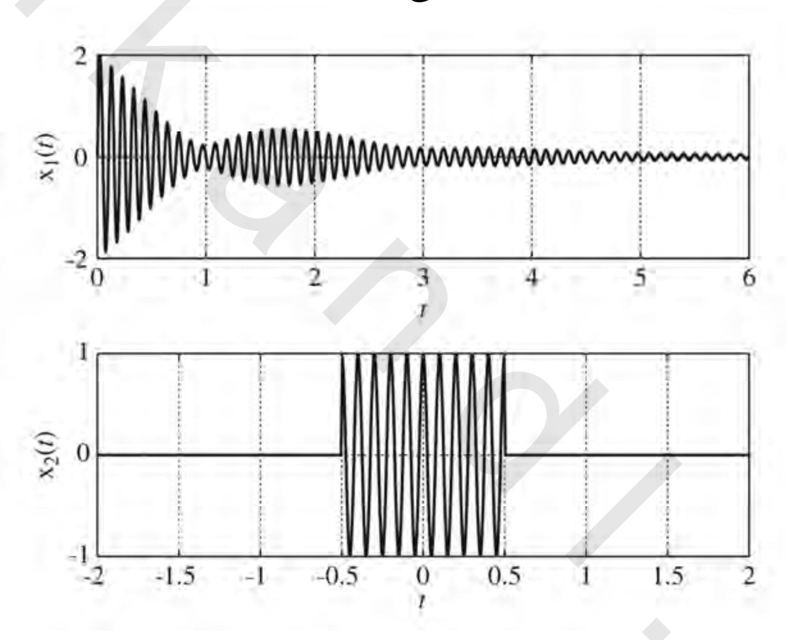
عرض الرسم بخطوط سوداء ٪ p = plot(t, x2, 'k');

تثبيت عرض الخط على ٢ ٪ set(p, 'LineWidth', 2) ;

عنوان المحور الأفقي والرأسي ٪

```
xlabel('\itt', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
ylabel('x_2({\itt})', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ; grid on ;
```

شكل رقم (٢,٢٣) يبين الأشكال الناتجة من هذا البرنامج.



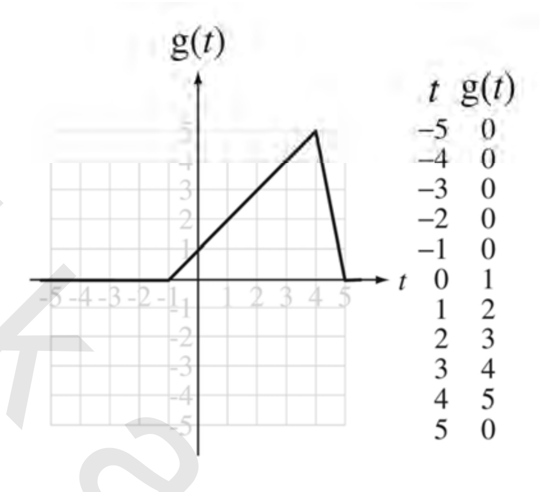

**شكل رقم (٢,٢٣) نتائج الرسم بماتلاب**

## (٢,٥) الإزاحة والتحجيم

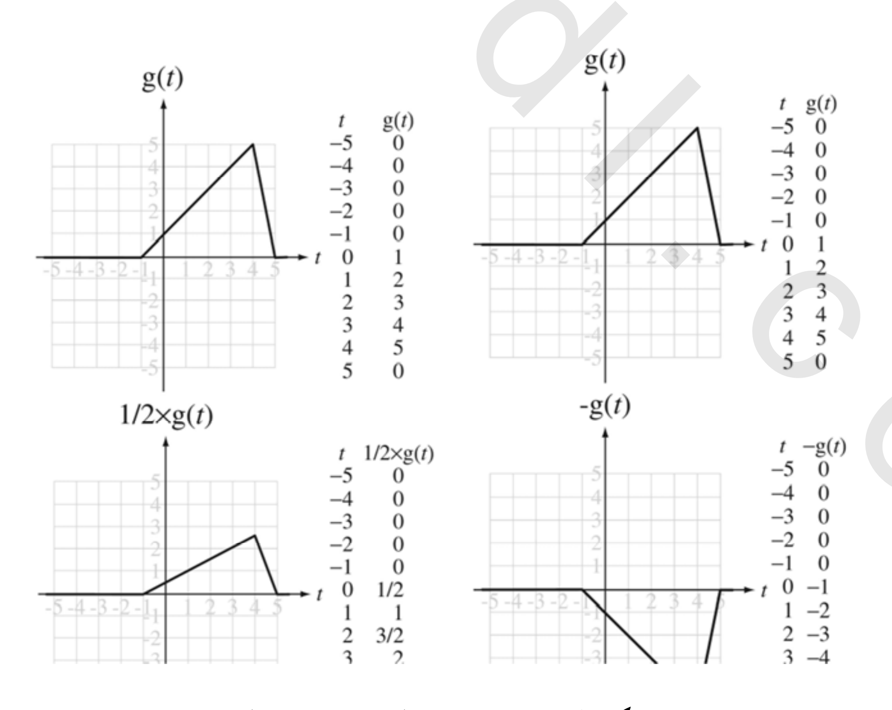
من المهم أن نكون قادرين على وصف الإشارات تحليليا وبيانيا وأن نكون قادرين على ربط هذين النوعين المختلفين من الوصف مع بعضهما بعضاً. افترض الدالة g(t) المعرفة كما في شكل (٢,٢٤) مع بعض القيم المختارة في الجدول الذي على يمين الشكل. لكي نكمل وصف الدالة سنفترض g(t)=0 لكل |t|>5.

**تحجيم المقدار**

افترض عملية ضرب دالة في ثابت. يمكن توضيح ذلك بالرمز g(t)→Ag(t). لذلك فإن g(t)→Ag(t) ستضرب الدالة g(t) عند كل قيمة للزمن t في الثابت A. إن هذا يسمى تحجيم المقدار amplitude scaling. شكل (٢,٢٥) يبين مثالين على تحجيم المقدار للدالة g(t) المعرفة في شكل (٢,٢٤).




**شكل رقم (٢,٢٤) التعريف البياني لدالة g(t)**




**شكل رقم (٢,٢٥) يبين مثالين على تحجيم المقدار**

معامل تحجيم المقدار السالب يقوم بقلب الدالة عمودياً. إذا كان معامل التحجيم يساوي - ١ كما في هذا المثال، فإن الانقلاب سيكون هو التأثير الوحيد. إذا كان معامل التحجيم يساوي أي معامل آخر A وكانت A سالبة، فإن التحجيم المقداري يمكن النظر إليه على أنه اثنان من العمليات المتتابعة $g(t)\to -g(t)\to |A|(-g(t))$، وهي الانقلاب المصحوب بالتحجيم المقداري الموجب. التحجيم المقداري يؤثر مباشرة على المتغير التابع g. الجزءان التاليان يقدمان تأثيرات تغيير المتغير المستقل t.

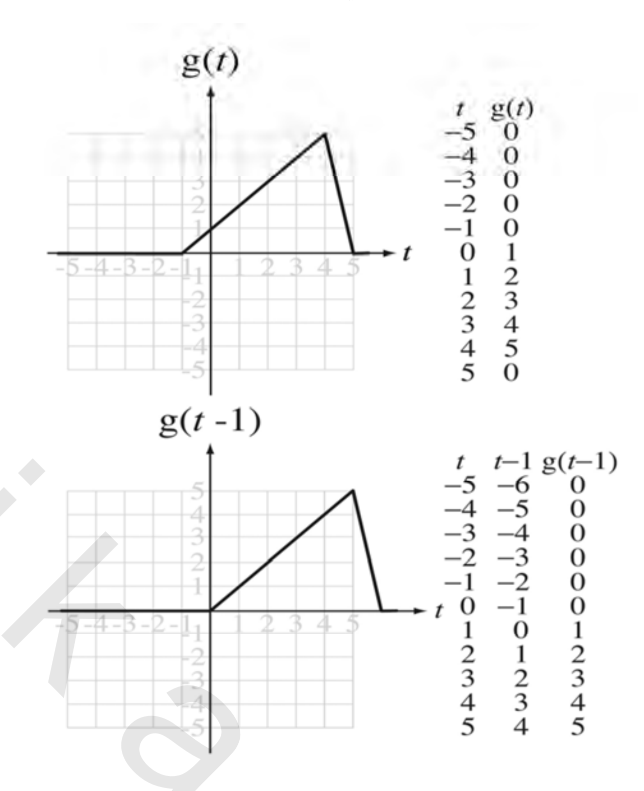
**الإزاحة الزمنية**

إذا كان الرسم الموضح في الشكل (٢,٢٤) يعرف g(t)، فما هو شكل g(t-1) ؟ يمكننا أن نفهم هذا التأثير عن طريق رسم قيمة الدالة g(t-1) عند عدد من النقاط كما في شكل (٢,٢٦). يجب أن يكون من الواضح بعد فحص الأشكال والداول التي تستبدل t بـ t-1 بأنها تزيح الدالة وحدة واحدة ناحية اليمين كما في شكل (٢,٢٦). التغيير $t\to t-1$ يمكن وصفه عن طريق القول "لكل قيمة للزمن t، ننظر للخلف وحدة زمنية واحدة، ونحصل على قيمة g عند هذا الزمن، ونستخدمها كقيمة لـ g(t-1) عند الزمن t ". إن هذا يسمى الإزاحة الزمنية، أو الانتقال الزمني.

يمكننا أن نلخص الإزاحة الزمنية عن طريق القول بأن التغيير في المتغير المستقل $t\to t-t_0$ حيث $t_0$ هي أي ثابت، يكون له تأثير إزاحة g(t) ناحية اليمين بمقدار $t_0$ من الوحدات. (إن ذلك يتوافق مع التفسير المقبول عن الأرقام السالبة، إذا كانت $t_0$ سالبة، فإن الإزاحة تكون ناحية اليسار بمقدار $|t_0|$ من الوحدات ).

شكل (٢,٢٧) يبين بعض الإزاحات الزمنية والتحجيم المقداري لدالة وحدة الخطوة. الدالة المستطيلة تساوي الفرق بين دالتي وحدة الخطوة وهما مزاحتان زمنياً في اتجاهين متعاكسين $rect(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2)$.

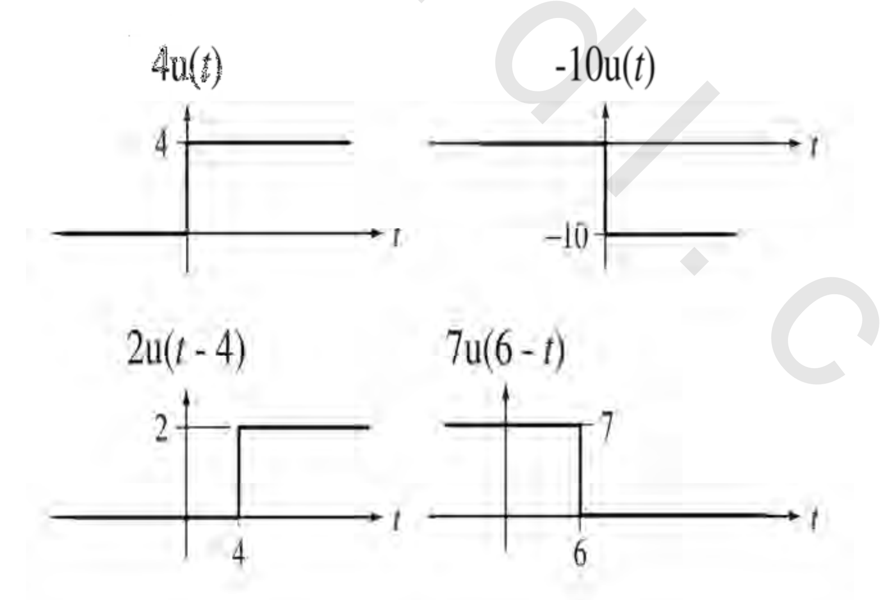
الإزاحة الزمنية تتم عن طريق تغيير في المتغير المستقل. هذا النوع من التغيير يمكن أن يحدث على أي متغير مستقل، وليس بالضرورة أن يكون الزمن. الأمثلة التي قدمناها هنا كانت تستخدم الزمن، ولكن المتغير المستقل يمكن أن يكون بعداً مساحياً. في هذه الحالة يمكننا أن نطلق عليه الإزاحة الفراغية. بعد ذلك، وفي الفصول عن التحويلات، سنعرض دوالّ في متغير مستقل وهو التردد، وهذا التغير سيطلق عليه الإزاحة الترددية. إن المفهوم الحسابي يكون هو نفسه بصرف النظر عن الإسم المستخدم للمتغير المستقل.




| t | g(t) |
|---|---|
| −5 | 0 |
| −4 | 0 |
| −3 | 0 |
| −2 | 0 |
| −1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 0 |

| t | t−1 | g(t−1) |
|---|---|---|
| −5 | −6 | 0 |
| −4 | −5 | 0 |
| −3 | −4 | 0 |
| −2 | −3 | 0 |
| −1 | −2 | 0 |
| 0 | −1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 4 |
| 5 | 4 | 5 |

**شكل رقم (٢,٢٦) شكل g(t-1) كعلاقة مع g(t) موضحا الإزاحة الزمنية**




**شكل (٢,٢٧) التحجيم المقداري والإزاحة الزمنية لدالة وحدة الخطوة**

التحجيم المقداري والإزاحة الزمنية يحدثان في العديد من الأنظمة الطبيعية العملية. في نظام المحادثة العادي يكون هناك تأخير بسبب الانتشار، وزمن الانتشار هو الزمن اللازم للموجة الصوتية لكي تنتقل من فم الشخص المتكلم إلى أذن الشخص المستمع. إذا كانت هذه المسافة تساوي 2 متر وسرعة الصوت هي 330 متر في الثانية، فإن زمن التأخير بسبب الانتشار الموجي تكون حوالي 6 ميللي ثانية، وهذا التأخير لا يمكن ملاحظته. ولكن افترض شخصاً يلاحظ سائقاً يصطدم بكومة من على مسافة مقدارها 100 متر. في البداية سيستشعر الملاحظ صورة السائق وهو يصطدم بالكومة. سيكون هناك تأخير قليل نتيجة سرعة الضوء من سائق الكومة حتى العين ولكن هذا الزمن يكون أقل من ميكروثانية واحدة. صوت اصطدام السائق بالكومة يصل لأذن الملاحظ متأخراً حوالي 0.3 ثانية بعد ذلك. يعتبر ذلك مثالاً على الإزاحة الزمنية. صوت الاصطدام تكون شدته أعلى كثيراً بالقرب من السائق عنها عند المسافة 100 متر، وهذا يعتبر مثالاً على التحجيم المقداري. مثال مشهور آخر هو زمن التأخير بين رؤية البرق وسماع صوت الرعد الذي ينتج عنه.

مثال آخر أكثر تقنية، إفترض نظام الاتصالات بالقمر الصناعي كما في شكل (٢,٢٨). ترسل المحطة الأرضية إشارة كهرومغناطيسية قوية إلى القمر الصناعي. عندما تصل الإشارة إلى القمر الصناعي يكون المجال الكهرومغناطيسي أكثر ضعفاً عنه عند المحطة الأرضية، كما أنها تصل متأخرة نتيجة التأخير الانتشاري. إذا كان القمر الصناعي متزامناً أرضياً فإنه يكون على بعد حوالي 36000 كيلومتر فوق الأرض، ولذلك إذا كانت المحطة الأرضية تحت القمر الصناعي مباشرة، فإن زمن التأخير الناتج عن صعود الإشارة يكون حوالي 120 ميللي ثانية. بالنسبة للمحطات الأرضية التي ليست تحت القمر مباشرة سيكون هذا التأخير أعلى. إذا كانت الإشارة المرسلة هي $Ax(t)$، فإن الإشارة المستقبلة ستكون $Bx(t-t_p)$ حيث $B$ تكون أقل كثيراً من $A$ والزمن $t_p$ هو زمن التأخير الناتج عن الانتشار الموجي. في روابط الاتصالات بين المواضع المختلفة المتباعدة عن بعضها على الأرض، فإن الأمر قد يتطلب أكثر من رابط صاعد وآخر هابط لإتمام عملية الاتصالات. إذا كانت عملية الاتصالات هي اتصالات صوتية بين مركز تليفزيوني في نيويورك ومراسل في كالكاتا، فإن زمن التأخير الكلي من الممكن أن يكون ببساطة ثانية واحدة، وهذا يعتبر زمن تأخير يمكن ملاحظته، ومن الممكن أن يسبب عدم راحة مقلقة في المحادثة. تخيل مشكلة الاتصالات مع أول رائد فضاء سيصل إلى المريخ. إن أقل زمن تأخير في اتجاه واحد عندما تكون الأرض والمريخ عند أقرب مسافة بينهما سيكون أكثر من أربع دقائق !



**شكل رقم (٢،٢٨) قمر صناعي للاتصالات في مداره**

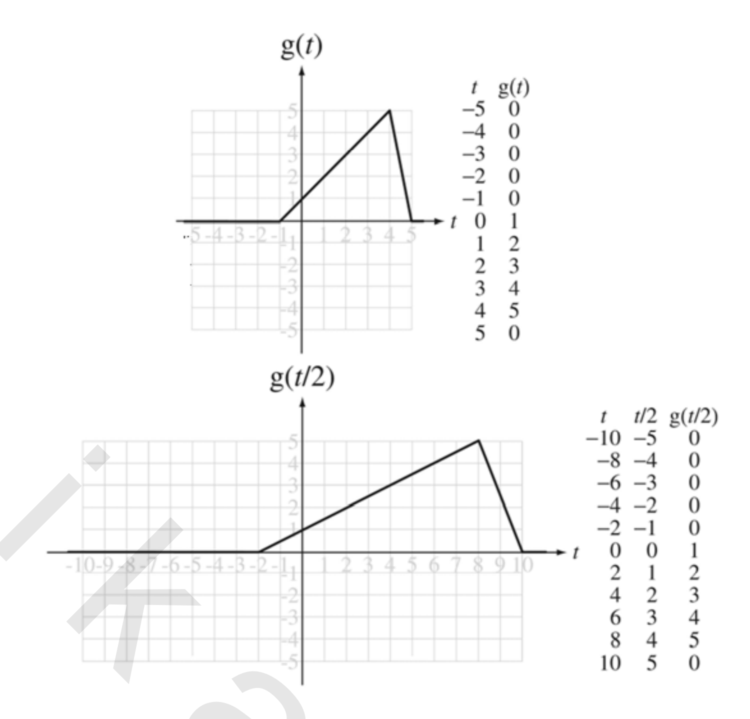
في حالة المدى الطويل، والاتصالات في الاتجاهين، يكون زمن التأخير مشكلة كبيرة. في المواقف الأخرى من الممكن أن يكون زمن التأخير مفيداً جداً، كما هو الحال في الرادار والسونار. في هذه الأحوال يكون زمن التأخير بين لحظة إرسال النبضة ولحظة استقبال انعكاسها تبين المسافة إلى الهدف الذي عكس النبضة، مثلاً طائرة، أو غواصة.

**التحجيم الزمني**

سنفترض الآن التغيير في المتغير المستقل والموضح بـ $t \to t/a$. إن ذلك يمدد، أو يوسع الدالة $g(t)$ أفقياً بمقدار المعامل a في الدالة $g(t/a)$. إن ذلك يسمى التحجيم الزمني. كمثال على ذلك سنرسم قيم مختارة للدالة $g(t/2)$ كما في شكل (٢،٢٩).

افترض الآن التغيير $t \to -t/2$، وهذا مثل المثال السابق تماماً فيما عدا أن معامل التحجيم أصبح الآن 2- بدلاً من 2 كما في شكل (٢،٣٠). التحجيم الزمني $t \to t/a$ يمدد الدالة أفقياً بمقدار المعامل $|a|$، وإذا كان $a<0$، فإن الدالة تنعكس زمنياً أيضاً. الانعكاس الزمني يعني انقلاب المنحني أفقياً. يمكن التفكير في حالة كون a سالبة على أنها $t \to -t$ متبوعة بـ $t \to t/|a|$، حيث العملية الأولى $t \to -t$ تعكس الدالة زمنياً بدون تغيير في تحجيمها الأفقي. العملية الثانية $t \to t/|a|$ تؤدي إلى التحجيم الزمني للدالة التي تم انعكاسها بمقدار معامل التحجيم $|a|$.

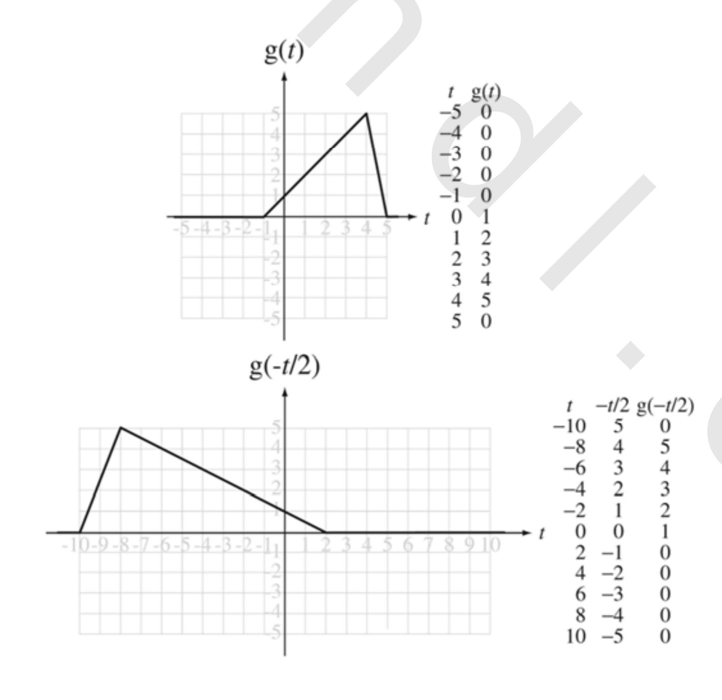
من الممكن أن يكون التحجيم الزمني أيضاً على الصورة $t \to bt$، وهذا لا يعتبر جديداً، لأنه يشبه تماماً التحجيم $t \to t/a$ حيث $b=1/a$. وعلى ذلك فإن كل قوانين التحجيم ما زالت مطبقة مع وجود هذه العلاقة بين ثابتي التحجيم a و b.




| t | g(t) |
|---|---|
| −5 | 0 |
| −4 | 0 |
| −3 | 0 |
| −2 | 0 |
| −1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 0 |

| t | t/2 | g(t/2) |
|---|---|---|
| −10 | −5 | 0 |
| −8 | −4 | 0 |
| −6 | −3 | 0 |
| −4 | −2 | 0 |
| −2 | −1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 3 |
| 6 | 3 | 4 |
| 8 | 4 | 5 |
| 10 | 5 | 0 |

**شكل رقم (٢,٢٩) مخطط يوضح الدالة g(t/2) كعلاقة مع الدالة g(t) مبينا التحجيم الزمني**




| t | g(t) |
|---|---|
| −5 | 0 |
| −4 | 0 |
| −3 | 0 |
| −2 | 0 |
| −1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 0 |

| t | −t/2 | g(−t/2) |
|---|---|---|
| −10 | 5 | 0 |
| −8 | 4 | 5 |
| −6 | 3 | 4 |
| −4 | 2 | 3 |
| −2 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 |
| 2 | −1 | 0 |
| 4 | −2 | 0 |
| 6 | −3 | 0 |
| 8 | −4 | 0 |
| 10 | −5 | 0 |

**شكل رقم (٢,٣٠) مخطط للدالة g(−t/2) كعلاقة مع الدالة g(t) مبيناً التحجيم الزمني في وجود معامل تحجيم سالب**



**شكل رقم (٢,٣١) رجال الإطفاء على عربة الإطفاء**

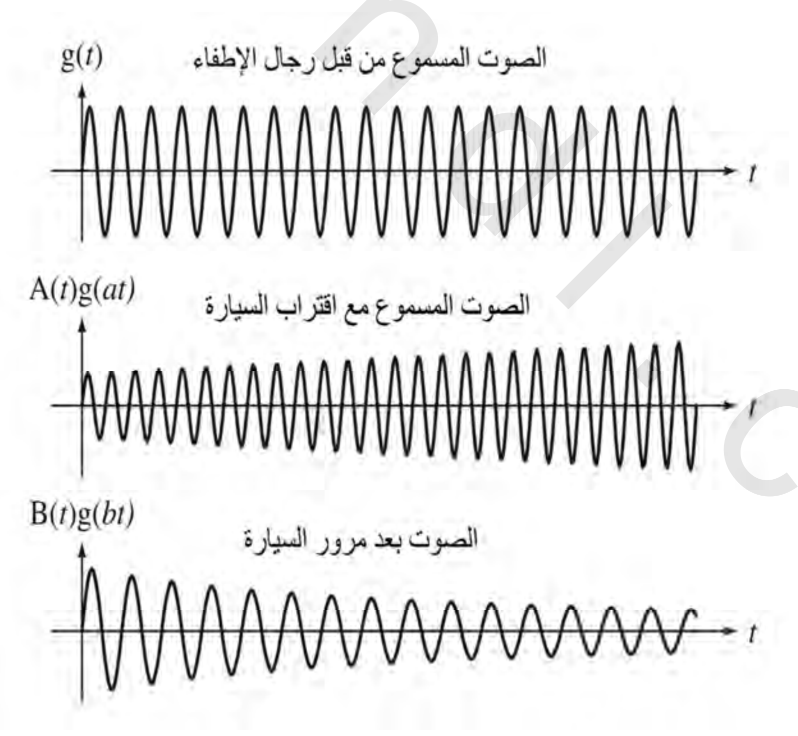
واحدة من الخبرات الشائعة التي تبين التحجيم الزمني هي تأثير الدوبلر Doppler. إذا وقفنا على جانب طريق وكانت عربة إطفاء تقترب مشغلة صوت النفير الخاص بها، فإنه مع مرور عربة الإطفاء، فإن كل من شدة الصوت وتردده، أو ذبذباته تبدو أنها تتغير كما في شكل (٢,٣١). شدة الصوت تتغير نتيجة اقتراب العربة، أو مصدر الصوت، كلما كانت السيارة أقرب إلينا كلما كان صوتها أعلى. ولكن لماذا يتغير التردد، أو الذبذبة الخاصة بالصوت؟ إن مصدر الصوت يعمل الشيء نفسها تماماً ودائماً، وعلى ذلك فإنه ليس تردد صوت السيارة هو الذي يتغير في الحقيقة، ولكن الذي تغير هو التردد الذي يصل أذننا. مع اقتراب عربة الإطفاء منا، فإن كل تتابع ضغطي للهواء الناتج من هورن السيارة يحدث على مسافة أقرب إلينا من التضاغطات السابقة، ولذلك فإنها تصل إلى أذننا في زمن أقل وهذا يجعل تردد الصوت عند أذننا أعلى من التردد عند مصدر الصوت. مع مرور عربة الإطفاء من أمامنا تحدث التأثيرات العكسية لما سبق ، حيث تصبح الترددات التي تصل إلى أذننا أقل من ترددات المصدر. بينما نشعر بتغيرات في تردد الصوت ونحن واقفون على جانب الطريق والسيارة تمر من أمامنا، فإن رجال الإطفاء الراكبين على العربة يستمعون إلى تردد ثابت للصوت.

لنفترض أن الصوت المسموع عن طريق رجال الإطفاء يتم وصفه بالدالة g(t). مع اقتراب عربة الإطفاء، فإن الصوت الذي سنسمعه سيكون A(t)g(at) حيث A(t) تكون عبارة عن دالة متزايدة في الزمن، تأخذ في الاعتبار التغير في شدة الصوت، و a عبارة عن رقم أكبر من الواحد قليلاً. التغير في المقدار كدالة في الزمن يسمى تعديل المقدار في أنظمة الاتصالات. بعد مرور السيارة، تصبح المعادلة المعبرة عن الصوت هي B(t)g(bt) حيث B(t) عبارة

عن دالة متناقصة مع الزمن، و b أقل قليلاً من الواحد كما في شكل (٢,٣٢). (في شكل (٢,٣٢) يتم استخدام الجيوب المعدلة للتعبير عن الصوت المسموع. إن ذلك ليس دقيقاً ولكنه يخدم في بيان بعض النقاط المهمة).

تحدث الإزاحة الدوبلرية أيضاً مع الموجات الضوئية. إن الضوء الأحمر ينزاح في الطيف الضوئي من النجوم البعيدة، وهذا ما أوضح في البداية أن الكون يتمدد. عندما يبتعد أي نجم بعيداً عن الأرض، فإن الضوء الذي نستقبله على الأرض سيمر بإزاحة دوبلرية تقلل تردد كل الضوء المنبعث من النجم كما في شكل (٢- ٣٣). حيث إن الضوء الأحمر يكون له أقل تردد يمكن رؤيته أو كشفه بالعين البشرية، فإن أي نقص في التردد يسمى بالإزاحة الحمراء، لأن خواص الطيف المرئي تبدو كلها متحركة ناحية النهاية الحمراء من الطيف. الضوء المنبعث من النجم يكون له العديد من تغيرات الخواص مع التردد نتيجة تكوين النجم والمسار من النجم إلى الملاحظ. يمكن تحديد كمية الإزاحة عن طريق مقارنة نماذج الطيف للضوء القادم من النجم مع نموذج طيفي معروف على الأرض في أحد المعامل.

التحجيم هو تغيير في المتغير المستقل. كما كان حقيقياً في الإزاحة الزمنية، فإن مثل هذا النوع من التغيير يمكن تنفيذه على أي متغير مستقل، وليس بالضرورة أن يكون الزمن. في فصل آخر قادم سنقوم بعمل التحجيم الترددي.




**شكل رقم (٢,٣٢) توضيح التأثير الدوبلري**



**شكل رقم (٢,٣٣) سديم البحيرة the Lagoon nebula**

**الإزاحة والتحجيم المتزامنان**

كل التغيرات الثلاثة في الدالة، تحجيم المقدار، وتحجيم الزمن، والإزاحة الزمنية، يمكن تطبيقها في الوقت نفسه أو بالتزامن كما يلي:

$$g(t) \to Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$ المعادلة رقم (٢,١١)

لكى نفهم التأثير الكلي، فإنه من المستحسن في العادة أن نقسم التغيرات المتعددة مثلما في المعادلة (٢,١١) إلى تغيرات متتابعة بسيطة كما يلي:

$$g(t) \xrightarrow{amplitude\ scaling\ A} Ag(t) \xrightarrow{t \to t/a} Ag\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$ المعادلة رقم (٢,١٢)

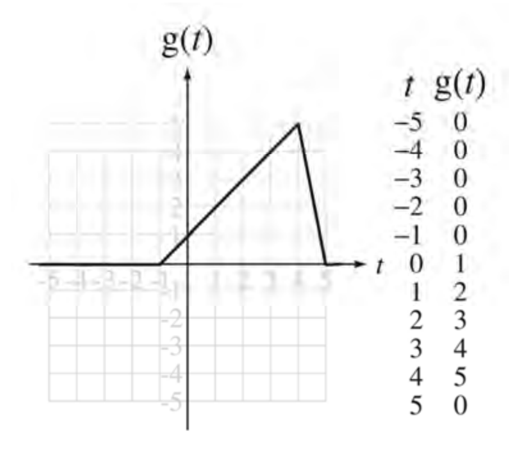
لاحظ هنا أن ترتيب التغيرات يكون مهماً. إذا بدلنا ترتيب عمليتي التحجيم الزمني، والإزاحة الزمنية في المعادلة (٢,١٢) نحصل على ما يلي:

$$g(t) \xrightarrow{amplitude\ scaling\ A} Ag(t) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag(t-t_0) \xrightarrow{t \to t/a} Ag\left(\frac{t}{a}-t_0\right) \neq Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$

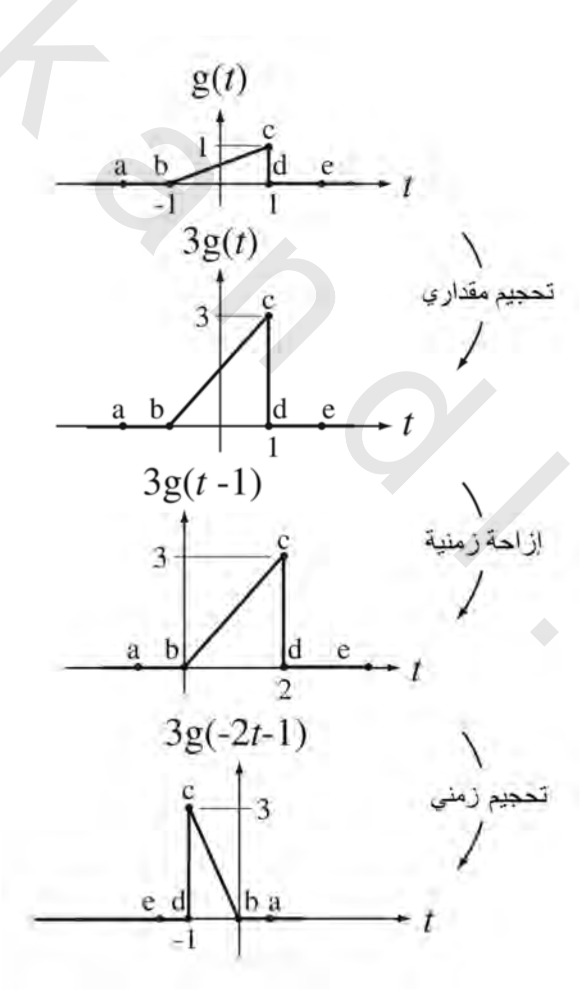
هذه النتيجة مختلفة عن النتيجة السابقة (إلا إذا كانت $a=1$ و $t_0=0$). بالنسبة لنوع آخر من التغيرات المتعددة، قد يكون تتابع مختلف هو الأفضل، فمثلاً $Ag(bt-t_0)$. في هذه الحالة سيكون التتابع، التحجيم المقداري، ثم الإزاحة الزمنية، ثم التحجيم الزمني هو المسار الأبسط إلى النتيجة الصحيحة.

$$g(t) \xrightarrow{amplitude\ scaling\ A} Ag(t) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag(t-t_0) \xrightarrow{t \to bt} Ag(bt-t_0)$$

شكل (٢,٣٤) وشكل (٢,٣٥) يبينان بعض هذه الخطوات عملياً لدالتين مختلفتين. في هذه الأشكال تم تعليم بعض النقاط بأحرف، تبدأ بـ "a" وتستمر أبجدياً. مع عمل كل تغيير في أي دالة، فإن كل نقطة مقابلة يكون لها الحرف نفسه.



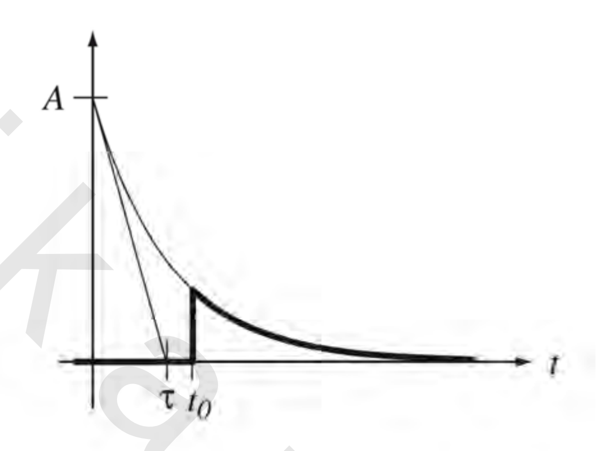

**شكل رقم (٢,٣٤) تتابع تحجيم مقداري، ثم تحجيم زمني، ثم إزاحة زمنية على دالة**



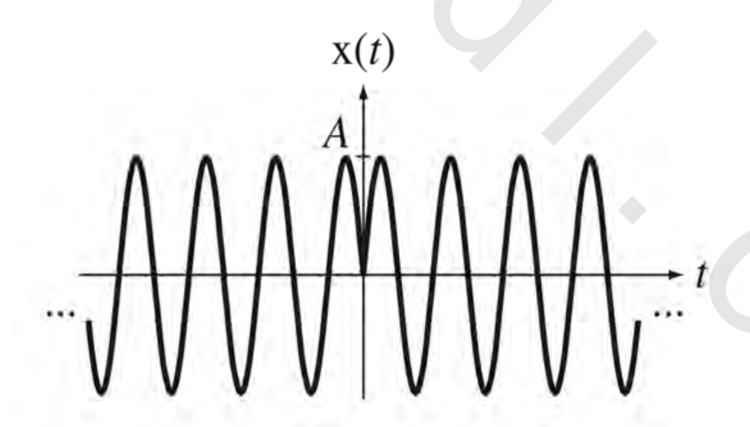

**شكل رقم (٢,٣٥) تتابع تحجيم مقداري، ثم إزاحة زمنية، ثم تحجيم زمني على دالة**

الدوال التي سبق تقديمها، مع تحجيم الدوال وإزاحتها تسمح لنا بوصف العديد من الإشارات. الإشارة التي لها شكل يتناقص أسياً بعد زمن معين $t=t_0$ وتكون صفراً قبل هذا الزمن يمكن تمثيلها بطريقة حسابية مدمجة كما في الدالة $x(t)=Ae^{-t/\tau}u(t-t_0)$ وكما في شكل (٢,٣٦).

الإشارة التي شكلها دالة جيب سالبة قبل زمن t=0 ودالة جيب موجبة بعد الزمن t=0 يمكن تمثيلها بالدالة $x(t)=A\sin(2\pi f_0 t)\text{sgn}(t)$ كما في شكل (٢,٣٧).

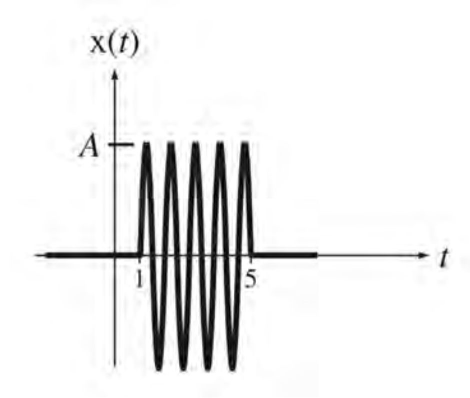



شكل رقم (٢,٣٦) أس متناقص يبدأ عند الزمن t=t0




شكل رقم (٢,٣٧) حاصل ضرب دالة جيب ودالة إشارة

الإشارة التي تكون دفعة من دالة الجيب بين الزمن t=1 والزمن t=5 وتساوي صفراً فيما عدا ذلك يمكن تمثيلها بالدالة $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\text{rect}((t-3)/4)$ كما في شكل (٢,٣٨).




**شكل رقم (٢,٣٨) إشارة دفعة من دالة الجيب**

**مثال ٢,٢**

**رسم تحجيم دالة وإزاحتها باستخدام ماتلاب**

باستخدام ماتلاب ارسم الدالة المعرفة كما يلي :

$$g(t)=\begin{cases}0, & t<-2\\ -4-2t, & -2<t<0\\ -4+3t, & 0<t<4\\ 16-2t, & 4<t<8\\ 0, & t>8\end{cases}$$

وبعد ذلك ارسم الدوال 3g(t+1) و (1/2)g(3t) و -2g((t-1)/2).

يجب أن نختار أولا المدى الذي سنرسم خلاله الدالة ، والمسافة بين نقط الزمن t لكي تعطي منحنى يقترب فعلاً من الدالة الحقيقية. دعنا نختار المدى الزمني -5<t<20 ، والمسافة بين النقاط الزمنية لتكون 0.1. أيضاً، دعنا نستخدم خواص دالة ماتلاب التي تسمح لنا بتعريف الدالة g(t) كبرنامج ماتلاب منفصل m file. ولذلك يمكننا الرجوع إليها ، أو النداء عليها عند رسم الدوال المحولة ، بحيث لا نضطر لإعادة كتابة الدالة في كل مرة. الملف g.m يحتوي الأكواد التالية :

```
function y=g(t)
```

حساب تغيرات الدالة لكل فترة زمنية ، t ٪

```
y1 = -4 - 2*t ; y2 = -4 + 3*t ; y3 = 16 - 2*t ;
```

تجميع تغيرات الدالة مع بعضها بعضاً كل واحدة في موضع تحققها ٪

```
y = y1.*(-2<t & t<=0) + y2.*(0<t & t<=4) + y3.*(4<t & t<=8) ;
```

برنامج ماتلاب يحتوي على الكود التالي :

برنامج لرسم الدالة g(t) وبعد ذلك يرسم الدوال 3*g(t+1) و g(3*t)/2 و -2*g((t-1)/2) ٪

```
tmin =-4;  tmax =20;    %    تثبيت المدى الزمني للرسم
dt = 0.1;        %    تثبيت الزمن بين النقاط
```

t = tmin:dt:tmax; % تثبيت متجه الزمن للرسم

g0 = g(t) ; ٪ حساب الدالة الأصلية "g(t)"

g1 = 3*g(t+1); ٪ حساب التغير الأول

g2 = g(3*t)/2 ; ٪ حساب التغير الثاني

g3=-2*g((t-1)/2); ٪ حساب التغير الثالث

حساب القيمة العظمى والصغرى للدالة g في كل الدوال المحجمة أو المزاحة ٪

واستخدامها لتحجيم كل الرسومات الناتجة ٪

```
gmax = max([max(g0), max(g1), max(g2), max(g3)]) ;
gmin = min([min(g0), min(g1), min(g2), min(g3)]) ;
```

رسم كل الأربع دوال في تنظيم من ٤ رسومات ٪

ارسم كل الأشكال على محاور بتدريج متساوٍ ٪

ارسم شبكة، باستخدام الأمر grid، للمساعدة في قراءة القيم %

```
subplot (2,2,1) ; p = plot(t,g0,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('g(t)') ; title('Original Function, g(t)') ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
subplot (2,2,2) ; p = plot(t,g1,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('3g(t+1)') ; title('First Change) ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
subplot (2,2,3) ; p = plot(t,g2,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('g(3t)/2') ; title('Second Change) ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
subplot (2,2,4) ; p = plot(t,g3,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('-2g((t-1)/2)') ; title('Third Change) ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
```

شكل (٢،٣٩) يوضح الرسم الناتج من هذا البرنامج.

## (٢،٦) التفاضل والتكامل

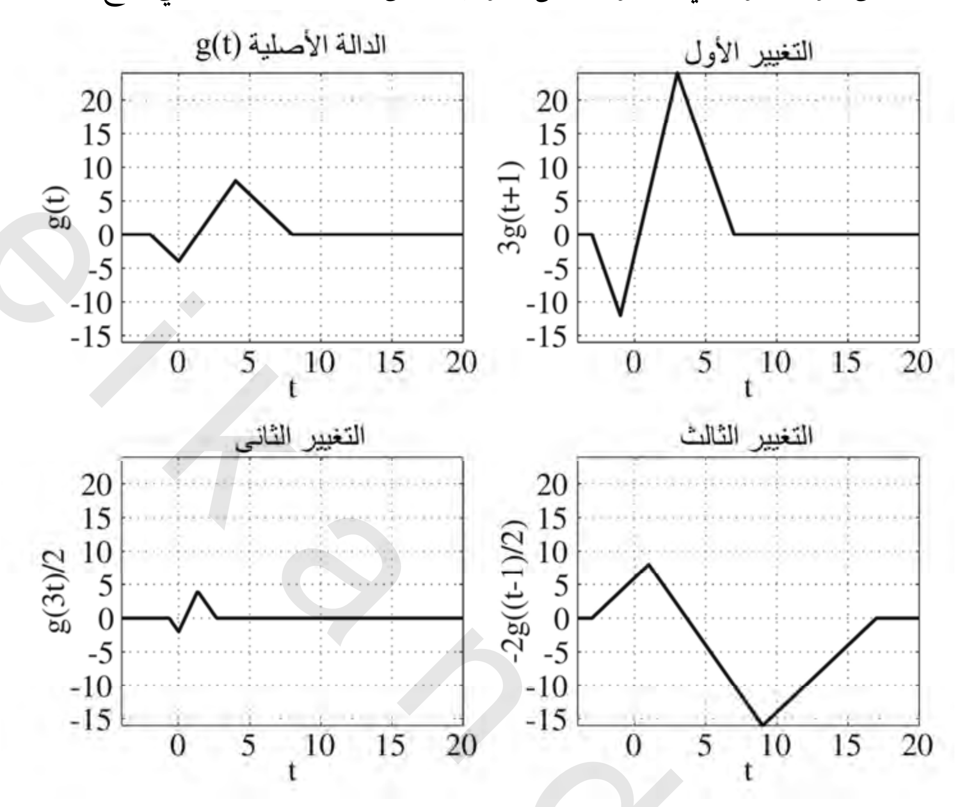
تعتبر عمليات التفاضل والتكامل من عمليات معالجة الإشارة الشائعة في الأنظمة العملية. تفاضل أي دالة عند أي زمن t هو ميل هذه الدالة عند هذا الزمن، وتكامل أي دالة عند أي زمن t هو المساحة المتراكمة تحت هذه الدالة حتى هذا الزمن. شكل (٢،٤١) يبين بعض الدوال وتفاضلها. عبور الصفر لكل التفاضلات تم بيانه بخط عمودي خفيف يؤدي إلى قيمة، عظمى أو قيمة صغرى مقابلة في الدالة.

هناك دالة تسمى diff في ماتلاب تقوم بعملية التفاضل الرمزي.

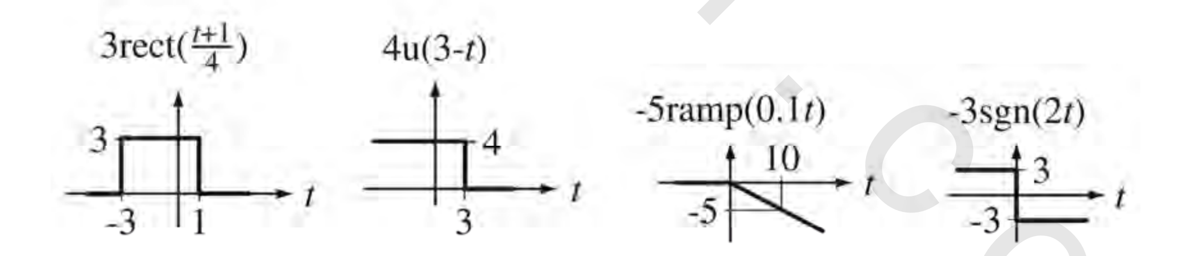
```
>> x = sym('x') ;
>> diff(sin(x^2))
ans =
```

2*cos(x^2)*x

هذه الدالة يمكن استخدامها أيضاً عددياً لإيجاد الفروق بين القيم المتجاورة في أي متجه. هذه الفروق المحددة يمكن تقسيمها بعد ذلك عن طريق التزايد في المتغير المستقل لتقريب بعض تفاضلات الدالة التي تنتج المتجه.

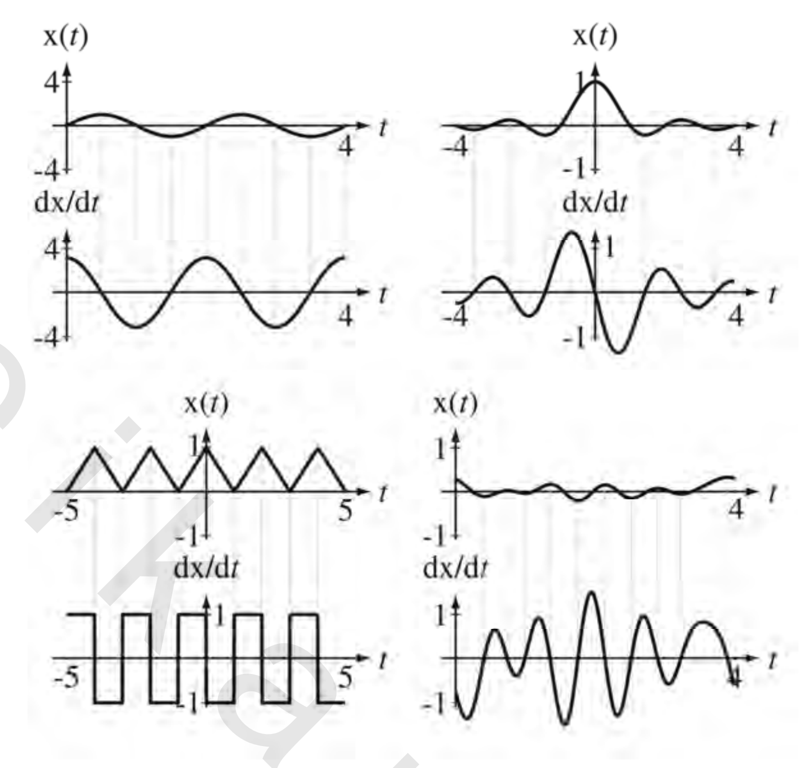



**شكل رقم (٣,٣٩) أشكال الرسم بماتلاب للدوال المحجمة و/أو المزاحة**




**شكل رقم (٢,٤٠) أمثلة أكثر على تحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني للدوال**

شكل (٢,٤٠) يعرض أمثلة أكثر على تحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني لبعض الدوال التي درسناها مسبقاً.




**شكل رقم (٢,٤١) بعض الدوال وتفاضلاتها**

```
>> dx = 0.1 ; x = 0.3:dx:0.8 ; exp(x)
ans =
1.3499  1.4918  1.6487  1.8221  2.0138  2.2255
>> diff (exp(x))/dx
ans =
1.4197  1.5690  1.7340  1.9163  2.1179
```

التكامل يكون أكثر تعقيداً إلى حد ما عن التفاضل. بمعلومية أي دالة، فإن تفاضلها يمكن تحديده بطريقة لا لبس فيها (إذا كان موجوداً). على الرغم من ذلك، فإن تكاملها لا يمكن تحديده بطريقة لا لبس فيها بدون بعض المعلومات الإضافية. إن ذلك يكون متأصلاً في واحد من الأساسيات الأولى التي تعلمناها في حساب التكامل. إذا كانت أي دالة g(x) لها التفاضل g'(x)، فإن الدالة g(x)+K (حيث K ثابت) سيكون لها التفاضل نفسه g(x) أيضاً بصرف النظر عن قيمة الثابت K. حيث إن التكامل يكون عكس التفاضل، فما هو تكامل g'(x) ؟ إنه من الممكن أن يكون g(x)، ومن الممكن أن يكون أيضاً g(x)+K.

اللفظ تكامل يكون له معانٍ مختلفة في السياقات المختلفة. عموماً، التكامل والتفاضل عمليتان متعاكستان. عكس التفاضل لأي دالة في الزمن g(t) يكون أي دالة في الزمن، عند تفاضلها بالنسبة للزمن، تعطي g(t). عكس التفاضل يتم بيانه بعلامة التكامل بدون حدود. مثلاً :

$$\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} = \int \cos(2\pi t)\, dt$$

في كلمات، فإن الدالة $\sin(2\pi t)/2\pi$ تمثل التفاضل العكسي للدالة $\cos(2\pi t)$. التكامل غير المحدود هو عكس التفاضل بالإضافة لقيمة ثابتة. فمثلاً، $h(t) = \int g(t)dt + C$. التكامل المحدود هو تكامل محدود بين حدين، مثل $A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$. إذا كان كل من α و β ثوابت، فإن A تكون قيمة ثابتة أيضاً، وهي المساحة تحت الدالة $g(t)$ بين كل من α و β. في تحليل الإشارات والأنظمة، يتم في العادة استخدام الصورة الخاصة للتكامل المحدود وهي $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau$. متغير التكامل هو τ، ولذلك فإنه أثناء عملية التكامل، فإن حد التكامل الأعلى t يتم التعامل معه على أنه ثابت. ولكن بعد الانتهاء من التكامل، فإن t تصبح المتغير المستقل في $h(t)$. مثل هذا النوع من التكامل يتم تسميته أحياناً بالتكامل الجاري، أو التكامل المتراكم. إنه المساحة المتراكمة تحت الدالة لكل الأزمنة قبل t وهذا يعتمد على ما هي t.

في العادة، وعملياً، نعرف أن أي دالة من الممكن أن تكون صفراً قبل $t=t_0$، وعلى ذلك، فإننا نعرف أن $\int_{-\infty}^{t_0} g(t)dt$ ستكون صفراً. على ذلك فإن تكامل هذه الدالة بداية من أي زمن $t_1<t_0$ حتى الزمن $t>t_0$ يكون لا لبس فيه. إنها من الممكن فقط أن تكون المساحة تحت الدالة من الزمن $t=t_0$ حتى الزمن t كما يلي:

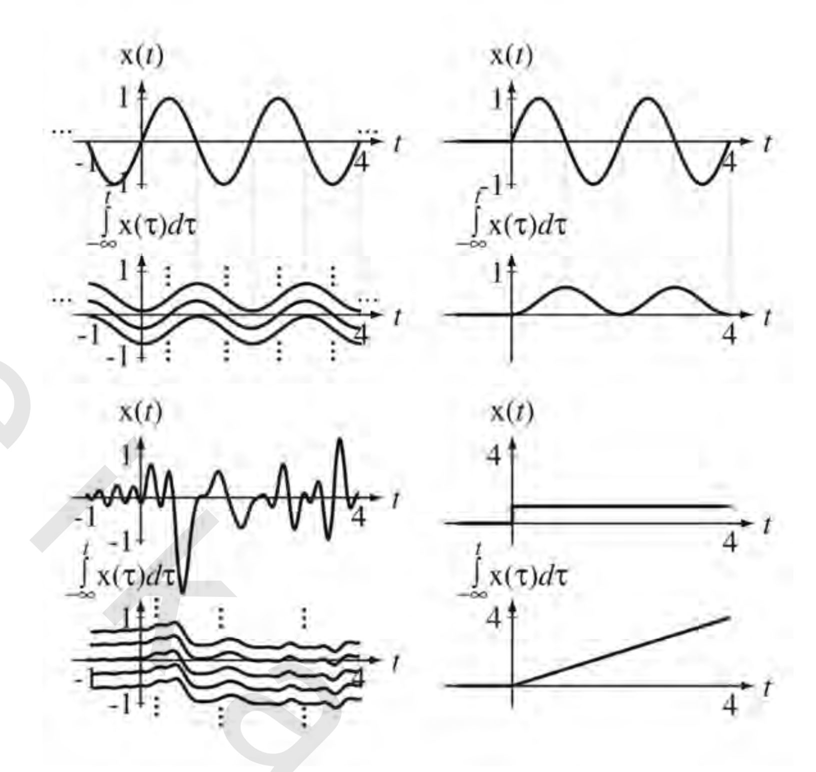
$$\underbrace{\int_{t_1}^{t} g(\tau)d\tau =}_{=0} \int_{t_1}^{t_0} g(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau$$

شكل (٢,٤٢) يبين بعض الدوال وتكاملها.

في شكل (٢- ٤٢) الدالتان اللتان على اليمين تساويان صفراً قبل الزمن $t=0$ والتكاملات المبينة تفترض حداً أدنى للتكامل أقل من الصفر، ولذلك فإنه ينتج قيمة وحيدة لا لبس فيها. الدالتان على اليسار مبينتان مع العديد من التكاملات الممكنة، وكل منهم يختلف عن الآخر بثابت. كل هذه الدوال لها التفاضل نفسه وكلها بالتساوي ترشيحات محققة للتكامل في غياب المعلومات الإضافية.

هناك الدالة int في ماتلاب التي تعطي التكامل الرمزي.

```
>> sym ('x') ;
>> int (1/(1+x^2))
ans =
atan (x)
```




**شكل رقم (٢,٤٢) بعض الدوال وتكاملاتها**

هذه الدالة لا يمكن استخدامها لإجراء التكامل العددي. هناك دالة أخرى، وهي cumsum يمكن استخدامها لإجراء التكامل العددي.

```
>> cumsum (1:5)
ans =
1 3 6 10 15
>> dx = pi/16 ; x = 0:dx:pi/4 ; y = sin(x)
y =
     0  0.1951   0.3827   0.5556   0.7071
>> cumsum (y)*dx
ans =
     0   0.0383   0.1134    0.2225    0.3614
```

هناك أيضاً حالات أكثر تطوراً في دوال التكامل العددي في ماتلاب، مثلاً، الدالة trapz التي تستخدم تقريب شبه المنحرف، والدالة quad التي تستخدم طريقة سمبسون التربيعية المتكيفة للتقريب.

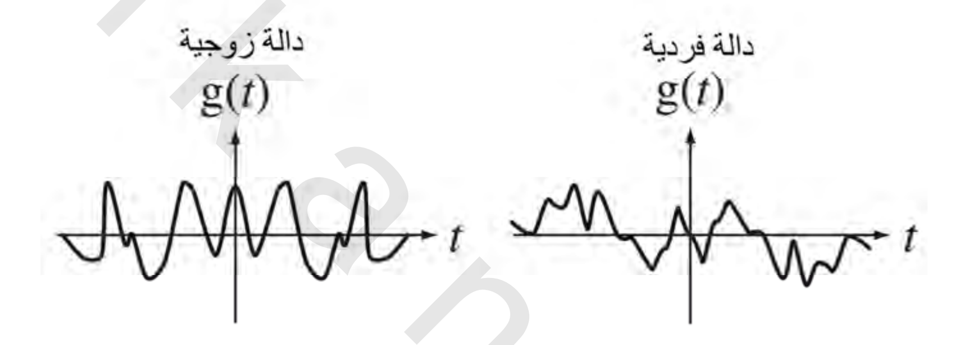
## (٢,٧) الإشارات الزوجية والفردية

لبعض الدوال خاصية أنها عندما تخضع لأنواع معينة من الإزاحة و/أو التحجيم، فإن قيم الدالة لا تتغير. إنها ثابتة، أو غير متغيرة تحت تأثير هذه الإزاحة و/أو التحجيم. أي دالة زوجية في الزمن t تكون ثابتة تحت تأثير

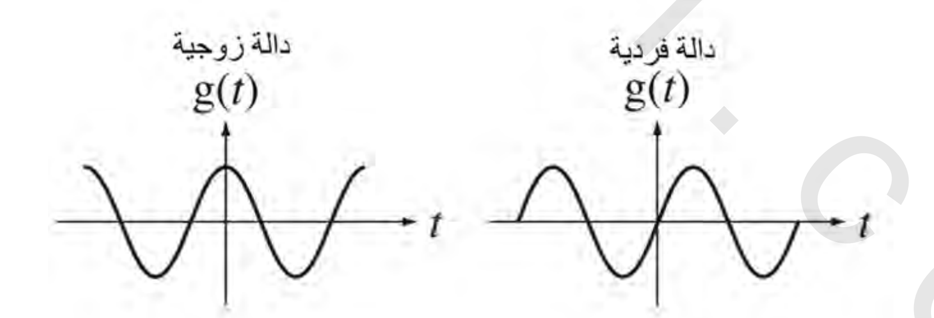
الانعكاس الزمني $t \to -t$، والدالة الفردية في الزمن t تكون ثابتة تحت تأثير تحجيم المقدار والانعكاس الزمني $g(t) \to -g(-t)$.

| |
|---|
| الدالة الزوجية g(t) هي الدالة التي تحقق $g(t)=g(-t)$ والدالة الفردية هي الدالة التي تحقق $g(t)=-g(-t)$. |

طريقة مبسطة لرؤية الدوال الزوجية والفردية هي أن نتصور أن المحور الرأسي (محور g(t)) عبارة عن مرآة. بالنسبة للدوال الزوجية، فإن جزء الدالة g(t) للزمن $t>0$ وجزءها للزمن $t<0$ يكون كل منهما صورة مرآة للآخر. بالنسبة للدالة الفردية، فإن الجزأين نفسهما للدالة يكون كل منهما صورة مرآة سالبة للآخر كما في شكل (٢,٤٣) وشكل (٢,٤٤).




**شكل رقم (٢,٤٣) أمثلة على الدوال الزوجية والفردية.**




**شكل رقم (٢,٤٤) إثنتان من الدوال الأكثر شيوعا وفائدة، واحدة زوجية وأخرى فردية.**

بعض الدوال تكون زوجية، وبعضها يكون فردياً والبعض الآخر لا يكون زوجياً ولا فردياً. ولكن أي دالة g(t) تكون مجموعاً لجزء زوجي، وجزء فردي، $g(t)=g_e(t)+g_o(t)$. الجزءان الزوجي والفردي لأي دالة g(t) يمكن كتابتهما كما يلي:

$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2}, \quad g_o(t) = \frac{g(t)-g(-t)}{2}$ المعادلة رقم (٢.١٣)

إذا كان الجزء الفردي لأي دالة يساوي صفراً، فإن هذه الدالة تكون زوجية، وإذا كان الجزء الزوجي لأي دالة يساوي صفراً، فإن هذه الدالة تكون فردية.

**مثال ٢,٣**

**الأجزاء الزوجية والفردية لأي دالة**

ما هو الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة g(t)=t(t2+3) ؟

هذه الأجزاء ستكون كما يلي :

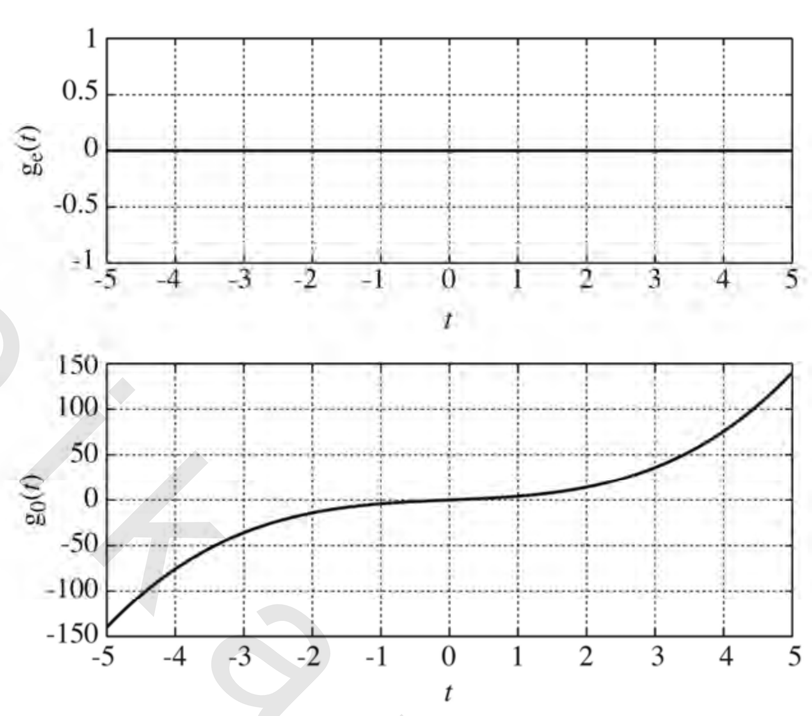
$$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} = \frac{t(t^2+3)+(-t)[(-t)^2+3]}{2} = 0$$

$$g_o(t) = \frac{t(t^2+3)-(-t)[(-t)^2+3]}{2} = t(t^2+3)$$

وعلى ذلك، فإن g(t) تكون دالة فردية.

```
% برنامج لرسم الجزء الزوجي والجزء الفردي لدالة
function  GraphEvenAndOdd
t = -5:0.1:5 ;    % تثبيت منحنى زمني للرسم
ge = (g(t) + g(-t))/2 ;    % حساب قيم الجزء الزوجي
go = (g(t) - g(-t))/2 ;    % حساب قيم الجزء الفردي
% رسم الجزء الزوجي والجزء الفردي
subplot (2,1,1) ;
ptr = plot(t,ge,'k') ;  set(ptr,'LineWidth',2) ;  grid on ;
xlabel('\itt','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('g_e({\itt})','FontName','Times','FontSize',24) ;
subplot(2,1,2) ;
ptr = plot(t,go,'k') ; set(ptr,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('\itt','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('g_o({\itt})','FontName','Times','FontSize',24) ;
function y = g(x)   %  g(x)   تعريف الدالة
y = x.*(x.^2+3) ;
```


شكل (٢،٤٥) يوضح الرسم الناتج من هذا البرنامج.




**شكل رقم (٢،٤٥) الرسم الناتج من برنامج ماتلاب لحساب الجزء الزوجي والفردي.**

هذا البرنامج يبدأ بالكلمة المفتاحية function. ملف برنامج ماتلاب الذي لا يبدأ بكلمة function يسمى ملف سكربت script، وأما البرنامج الذي يبدأ بكلمة function، فإنه يعرف دالة function. هذا الكود يحتوي تعريفاً لدالتين. الدالة الثانية تسمى دالة جانبية subfunction. إنها تستخدم فقط عن طريق البرنامج الأساسي (في هذه الحالة هو Graph Even And Odd) ولا يتم استخدامها عن طريق أي دالة، أو سكربت خارج تعريف هذه الدالة. أي دالة من الممكن أن تحتوي أي عدد من الدوال الجانبية. ملف السكربت لا يمكنه استخدام أي دالة جانبية.

### تجميع الإشارات الزوجية والفردية

افترض أن كلاً من الدالتين $g_1(t)$ و $g_2(t)$ دوال زوجية. وعلى ذلك فإن $g_1(t)=g_1(-t)$ و $g_2(t)=g_2(-t)$. افترض الدالة $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$. وعلى ذلك، فإن $g(-t)= g_1(-t)+g_2(-t)$، وباستخدام خاصية الزوجية لكل من $g_1(t)$ و $g_2(t)$ فإن $g(-t)= g_1(t)+g_2(t)=g(t)$، مما يثبت أن مجموع أي دالتين زوجيتين يكون زوجياً أيضاً. الآن افترض أن $g(t)=g_1(t)g_2(t)$، وبالتالي، فإن $g(-t)=g_1(-t)g_2(-t)= g(t)=g_1(t)g_2(t)=g(t)$، مما يثبت أن حاصل ضرب أي دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية أيضاً.

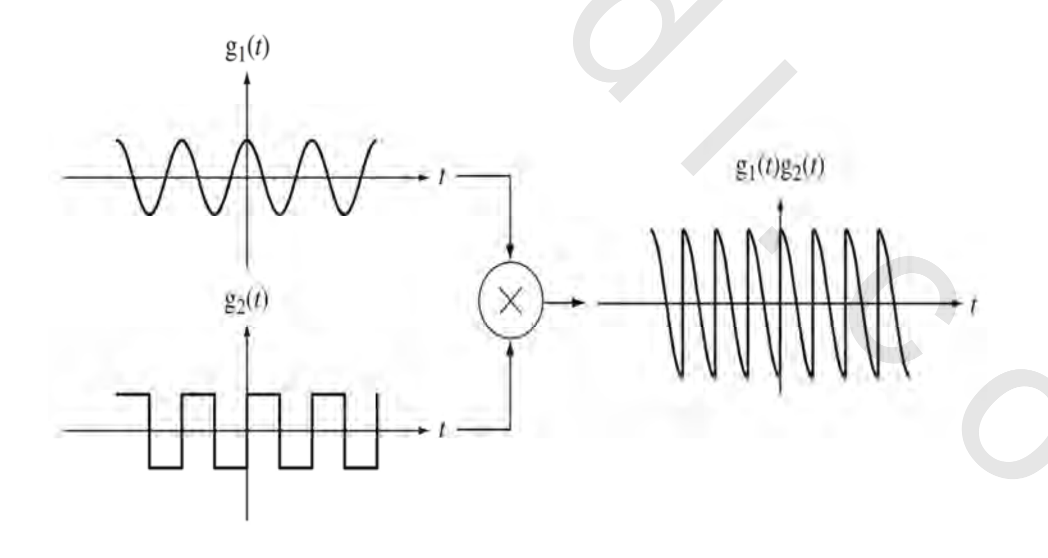
الآن افترض أن كلاً من الدالتين $g_1(t)$ و $g_2(t)$ دوال فردية. بالتالي فإن $g(-t)=g_1(-t)+g_2(-t)= -g_1(t)-g_2(t)=-g(t)$ ، مما يثبت أن مجموع أي دالتين فرديتين يكون دالة فردية. بعد افترض أن $g(-t)=g_1(-t)g_2(-t)=[-g_1(t)][-g_2(t)]=g_1(t)g_2(t)=g(t)$ ، مما يثبت أن حاصل ضرب أي دالتين فرديتين يعطي دالة زوجية.

بنفس الطريقة يمكننا أن نثبت أنه إذا كانت هناك دالتان زوجيتان، فإن مجموعهما، والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، ونتيجة قسمتهما ستكون زوجية أيضاً. وأيضاً إذا كان لدينا دالتان فرديتان، فإنه يمكننا إثبات أن مجموعهما، والفرق بينهما سيكون فردياً، بينما حاصل ضربهما، ونتيجة قسمتهما ستكون زوجية. إذا كانت إحدى الدوال زوجية والأخرى فردية، فإن حاصل ضربهما ونتيجة قسمتهما ستكون فردية كما في شكل (٢,٤٦).

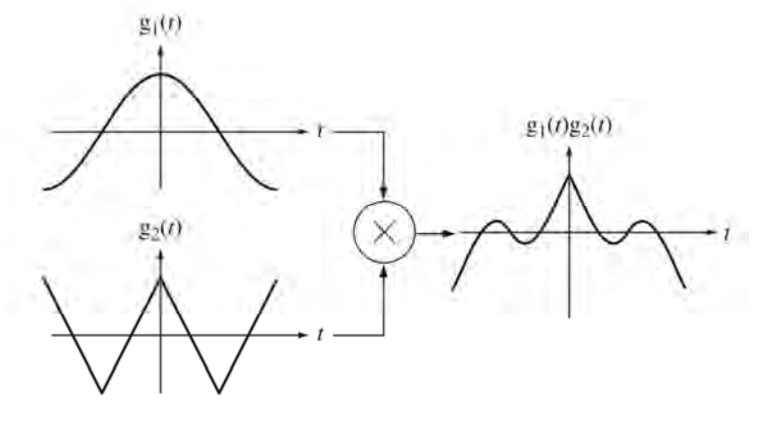
| نوع الدالة | المجموع | الفرق | حاصل الضرب | نتيجة القسمة |
|---|---|---|---|---|
| **كلاهما زوجي** | زوجي | زوجي | زوجي | زوجي |
| **كلاهما فردي** | فردي | فردي | زوجي | زوجي |
| **واحدة زوجى، والأخرى فردى** | لازوجي ولافردي | لازوجي ولافردي | فردي | فردي |

**شكل (٢,٤٦) تجميعات الدوال الزوجية والفردية.**

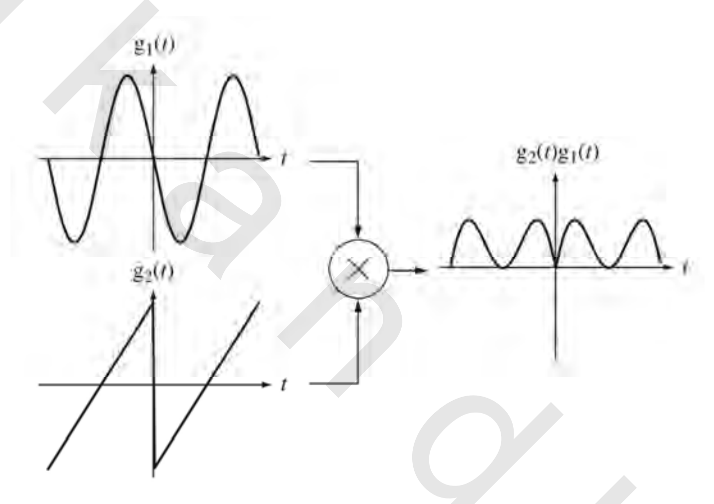
من أهم الدوال الزوجية والفردية في تحليل الإشارات والأنظمة دالتا الجيب sine وجيب التمام cosine، حيث إن دوال جيب التمام تكون زوجية ودوال الجيب تكون فردية. تبين الأشكال من شكل (٢,٤٧) حتى شكل (٢,٤٩) بعض الأمثلة على ضرب الدوال الزوجية والفردية.




**شكل رقم (٢,٤٧) حاصل ضرب دالة زوجية وأخرى فردية**




(٢-٤٨) حاصل ضرب دالتين زوجيتين




**شكل رقم (٢,٤٩) حاصل ضرب دالتين فرديتين**

لنفترض أن لدينا الدالة g(t) كدالة زوجية، وبالتالي فإن g(t)=g(-t). باستخدام قانون السلسلة في التفاضل، فإن تفاضل الدالة g(t) سيكون g'(t)=-g'(-t)، الذي هو دالة فردية. وبالتالي فإن تفاضل أي دالة زوجية سيكون دالة فردية. بنفس الطريقة، فإن تفاضل أي دالة فردية يكون دالة زوجية. يمكننا أن نحول المعاملات لنقول أن تكامل أي دالة زوجية سيكون دالة فردية بالإضافة إلى ثابت تكامل، وتكامل أي دالة فردية سيكون دالة زوجية بالإضافة إلى ثابت تكامل (ولذلك فإنها ستكون زوجية نتيجة أن الثابت يكون دالة زوجية) كما في شكل (٢- ٥٠).

| نوع الدالة | التفاضل | التكامل |
|---|---|---|
| **زوجية** | فردية | فردية + ثابت |
| **فردية** | زوجية | زوجية |

**شكل (٢,٥٠) أنواع الدوال وأنواع الدوال الناتجة عن تفاضلها وتكاملها**

**التفاضل والتكامل للإشارات الزوجية والفردية**

التفاضل المحدود للدوال الزوجية والفردية يمكن تبسيطه في بعض الحالات المعينة المعروفة. إذا كانت الدالة g(t) عبارة عن دالة زوجية و a عبارة عن ثابت حقيقي، فإن:

$$\int_{-a}^{a} g(t)dt = \int_{-a}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt = -\int_{0}^{-a} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt$$

بإجراء تغيير على المتغيرات كالتالي: τ=-t في التكامل الأول من على اليمين وباستخدام g(τ)=g(-τ)، وبالتالي فإن $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 2\int_{0}^{a} g(t)dt$ وهذا يكون واضحا هندسيا بالنظر إلى الدالة الموضحة في شكل (٢,٥١أ). بنفس الطريقة، إذا كانت الدالة g(t) دالة فردية، فإن $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 0$ وهذا واضح أيضاً هندسيا كما في شكل (٢,٥١ب).




**شكل رقم (٢,٥١) تكامل (أ) دالة زوجية و (ب) دالة فردية على حدود متماثلة**

## (٢,٨) الإشارات الدورية

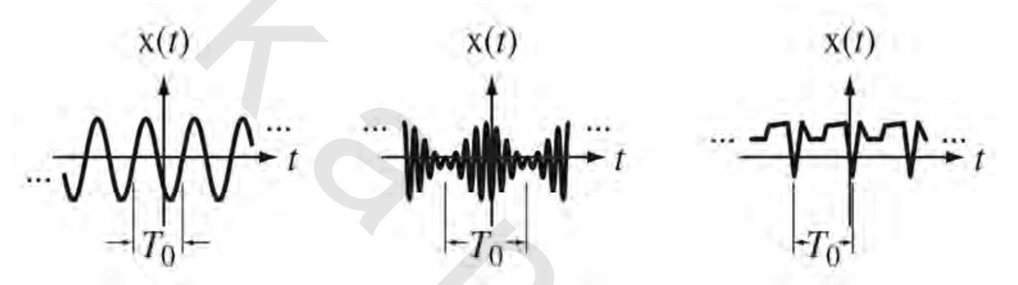
الإشارة الدورية هي الإشارة التي تكرر نموذجاً معيناً في زمن شبه لانهائي وتستمر في تكرار هذا النموذج لزمن شبه لا نهائي أيضاً.

| |
|---|
| الدالة الدورية g(t) هي الدالة التي تحقق المعادلة g(t)=g(t+nT) لأي قيمة صحيحية للرقم n، و T هي الدورة الزمنية للدالة. |

طريقة أخرى لكي نقول إن دالة معينة في الزمن t تكون دورية هي إن نقول أن هذه الدالة لا تتغير تحت تأثير الإزاحة t→nT، أي أن الدالة تتكرر كل زمن مقداره T من الثواني. بالطبع فإنها تكرر نفسها أيضاً كل 2T، و 3T، و nT من الثواني حيث n رقم صحيح. ولذلك فإن 2T أو 3T أو nT تكون كلها دورات للدالة. أقل فترة زمنية موجبة

تتكرر عندها الدالة تسمى الدورة الأساسية $T_0$. التردد الدوري الأساسي $f_0$ هو مقلوب الدورة الأساسية، أي أن $f_0=1/T_0$ والتردد الزاوي الأساسي بالراديان هو $w_0=2\pi f_0=2\pi/T_0$.

بعض الأمثل الشائعة على الدوال الدورية هي الدوال الجيبية الحقيقية، أو المركبة وتجميعات من الجيوب الحقيقية و/أو المركبة. سنرى فيما بعد أنواعاً أخرى مركبة من الدوال الدورية بدورات مختلفة وأشكال مختلفة يمكن توليدها ووصفها حسابياً. شكل (٢,٥٢) يعطي بعض الأمثلة على الدوال الدورية. الدالة غير الدورية تسمى aperiodic أو دالة غير دورية. (نتيجة التشابه بين العبارة "aperiodic function" التي تعني دالة غير دورية والعبارة " a periodic function" والتي تعني دالة دورية، فإنه ربما يكون من الأفضل عند الحديث أن نستخدم العبارة "nonperiodic" أو "not periodic" وكل منهما تعني غير دورية أيضاً، وذلك لتجنب اللبس، أو سوء الفهم نتيجة التشابه في الألفاظ الإنجليزية").




**شكل رقم (٢,٥٢) أمثلة على الدوال الدورية بدورة أساسية مقدارها T0**

في الأنظمة العملية، فإن أي إشارة لن تكون حقيقة دورية؛ لأنها وجدت عند زمن محدد في الماضي، وستقف أيضاً عند زمن محدد في المستقبل. على الرغم من ذلك، فإن أي إشارة في العادة تتكرر منذ زمن كبير قبل زمن التحليل وستستمر تتكرر لزمن طويل جداً بعد هذا الزمن. في العديد من الأحوال، فإن تقريب الإشارة عن طريق دالة دورية يعطي بعض الخطأ الذي يمكن إهماله. الأمثلة على الإشارات التي يمكن تقريبها جيداً عن طريق دوال جيبية من الممكن أن تكون الدوال الجيبية الموحدة في محولات AC إلى DC، وإشارات التزامن الأفقي في التليفزيون، والموضع الزاوي لعمود المحور في مولد القدرة في محطات التوليد، ونموذج الإشعال في شمعات الإشعال في سيارة تسير بسرعة منتظمة، وتذبذب بللورة الكريستال في ساعة اليد، والموضع الزاوي للبندول في ساعة الحائط القديمة وهكذا. العديد من الظواهر الطبيعية تكون، لكل الأغراض العملية، دورية، مثل العديد من الكواكب، ومدارات الأقمار الصناعية والمذنبات، وأطوار القمر، والمجال الكهربي المنبعث عن طريق رنين ذرة السيزيوم، ونماذج هجرة الطيور، ومواسم تزاوج الوعول، وهكذا. تؤدي الظواهر الدورية دوراً مهماً في كل من الحياة الطبيعية، وفي دنيا الأنظمة الصناعية.

موقف شائع في تحليل الإشارات والأنظمة هو أن يكون لدينا إشارة تساوي مجموع إشارتين دوريتين. افترض أن $x_1(t)$ دالة دورية بدورة مقدارها T01 ، وأن x2(t) دالة دورية بدورة أساسية مقدارها T02 ، وافترض أيضاً أن x(t)=x1(t)+x2(t). سواء كانت x(t) دورية أم لا ، يعتمد على العلاقة بين الدورتين $T_{01}$ و$T_{02}$ . إذا أمكن إيجاد T التي تكون رقماً صحيحاً من $T_{01}$ ورقماً صحيحاً أيضاً من $T_{02}$ ، فإن T ستكون دورة لكل من $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و

$$x_1(t)=x_1(t+T), \text{ and } x_2(t)=x_2(t+T)$$ المعادلة رقم (٢,١٤)

الإزاحة الزمنية لـ $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ مع $t\rightarrow t+T$ ستعطي :

$$x(t+T)= x_1(t+T)+x_2(t+T)$$ المعادلة رقم (٢,١٥)

بدمج المعادلتين (٢,١٥) و (٢,١٤)، فإن :

$$x(t+T)=x_1(t)+x_2(t) = x(t)$$

مما يثبت أن x(t) تكون دورية بدورة مقدارها T. أقل قيمة موجبة لـ T التي تكون رقماً صحيحاً لكل من $T_{01}$ و $T_{02}$ تكون هي الدورة الأساسية $T_0$ لـ x(t). هذه القيمة الصغرى لـ T تسمى القيمة الصغرى المتعددة أو المضاعفة least common multiple, LCM لكل من $T_{01}$ و $T_{02}$. إذا كانت $T_{01}/T_{02}$ تساوي رقماً نسبياً (نسبة لرقمين صحيحين)، فإن LCM ستكون محددة و x(t) ستكون دورية. وإذا كانت $T_{01}/T_{02}$ ليست رقماً نسبياً ، فإن x(t) ستكون غير دورية.

في بعض الأحيان تكون أي طريقة بديلة لإيجاد دورة مجموع دالتين دوريتين أسهل من إيجاد LCM لدورتي الدالتين. إذا كانت الدورة الأساسية للمجموع هي LCM للدورتين الأساسيتين للدالتين، فإن التردد الأساسي للمجموع سيكون القاسم المشترك الأعظم greatest common divisor, GCD للترددين الأساسيين، ولذلك فإنه سيساوي مقلوب LCM للدورتين الأساسيتين.

**مثال ٢,٤**

**الدورة الأساسية لإشارة**

أي واحدة من هذه الدوال ستكون دورية، وإذا كانت دورية، فما هي الدورة الأساسية لها ؟

أ- $\mathbf{g(t)=7\sin(400\pi t)}$

إن الدالة الجيبية تتكرر عندما تزداد معاملاتها الكلية، أو تنقص بأي قيمة صحيحة متعددة من $2\pi$. ولذلك فإن :

$$\sin(400\pi t\pm 2n\pi)=\sin[(400\pi(t\pm nT_0)]$$

بتساوي معاملات الطرفين :

$$400\pi t\pm 2n\pi=400\pi(t\pm nT_0)$$

أي أن :

$\pm 2n\pi = \pm 400\pi n T_0$

وبالتالي :

$T_0 = 1/200$

طريقة بديلة لإيجاد الدورة الأساسية هي أن نفهم أن $7\sin(400\pi t)$ هي في الأصل على الصورة $A\sin(2\pi f_0 t)$ أو $\sin(\omega_0 t)$ ، حيث $f_0$ هي التردد الدوري الأساسي و $\omega_0$ هي التردد الزاوي الأساسي. في هذه الحالة فإن $f_0=200$ و $\omega_0=400\pi$. وحيث إن الدورة الأساسية تكون مقلوب التردد الدوري الأساسي ، فإن $T_0=1/200$.

ب– $g(t)=3+t^2$

هذه عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثانية. مع زيادة أو نقصان الزمن t من الصفر ، فإن قيمة الدالة تزداد تدريجياً (ودائماً في الاتجاه نفسه). لا توجد دالة تزداد تدريجياً وباستمرار وتكون دورية في الوقت نفسه لأنه إذا تم زيادة كمية ثابتة لمعامل الدالة t ، فإن الدالة ستصبح أكبر أو أقل من قيمتها عند هذه اللحظة ، وهذا يعني أن هذه الدالة ليست دورية.

ج– $g(t)= e^{-j60\pi t}$

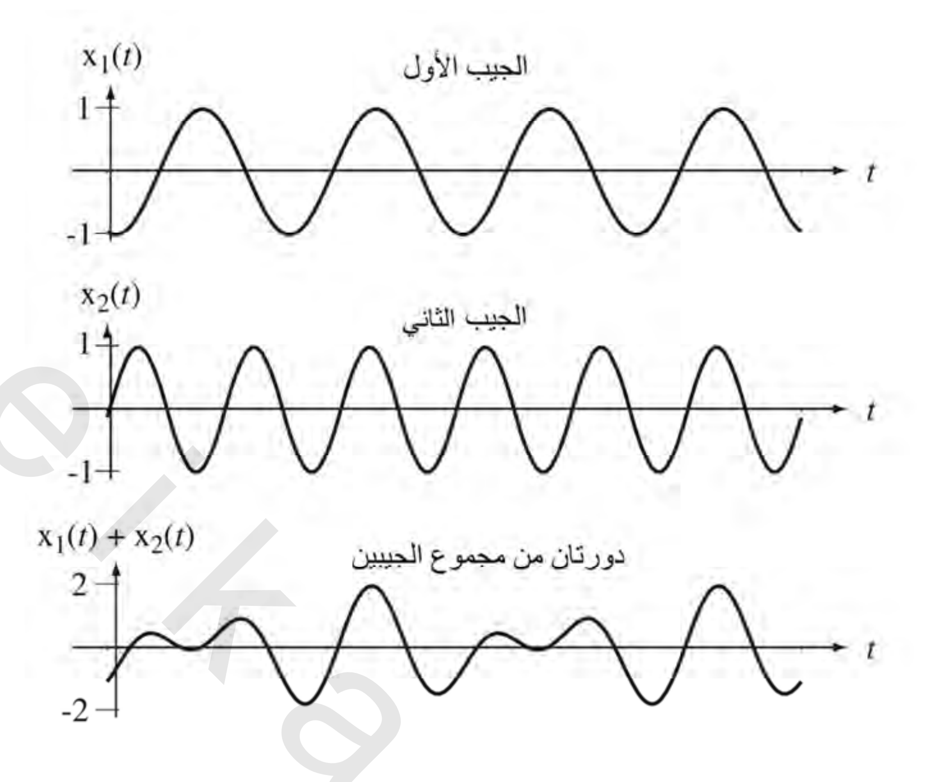
هذه الدالة عبارة عن دالة جيبية مركبة. يمكن أن نرى ذلك عن طريق التعبير عنها كمجموع من دالتي الجيب وجيب التمام تبعا لقانون أويلركالتالي :

$g(t)=\cos(60\pi t)-j\sin(60\pi t)$

هذه الدالة عبارة عن مجموع خطي لدالتين لهما التردد الدوري نفسه $60\pi/2\pi=30$ . لذلك فإن التردد الأساسي للدالة g(t) يساوي 30 هرتز والدورة الأساسية تساوي 1/30 ثانية.

$g(t)=10\sin(12\pi t)+4\cos(18\pi t)$

إن هذا هو مجموع دالتين كل منهما دالة دورية. الدورة الأساسية لكل منهما هي 1/6 للأولى و 1/9 للثانية. LCM يساوي 1/3. (أنظر ملحق الويب B لطريقة نظامية لإيجاد التعداد المشترك الأقل). هناك دورتان أساسيتان للدالة الأولى ، وثلاث دورات أساسية للدالة الثانية في هذا الوقت. ولذلك فإن الدورة الأساسية للدالة الكلية ستكون 1/3 ثانية كما في شكل (٢،٥٣). الترددان الأساسيان هما 6 و 3 هرتز. GCD لهماهو 3 هرتز وهي مقلوب 1/3 ثانية للدورتين الأساسيتين.




**شكل رقم (٢,٥٣) إشارتان بالتردد 6 و 9 هرتز ومجموعهما**

**د- $g(t)=10\sin(12\pi t)+4\cos(18t)$**

هذه الدالة تشبه تماما الدالة الموجودة في (ث) فيما عدا غياب $\pi$ في المعامل الثاني. الدورات الأساسية في هذه الحالة هي 1/6 و $\pi/9$ ثانية ، والنسبة بين الدورتين الأساسيتين ستكون إما $2\pi/3$ أو $3/2\pi$ ، وكل منهما ليست نسبية أو عقلانية ، ولذلك فإن g(t) لن تكون دورية. هذه الدالة ، على الرغم من أنها مكونة من مجموع اثنين من الدوال الدورية ، إلا أنها ليست دورية ؛ لأنها لن تتكرر في زمن محدد بالضبط. (إنها أحياناً تسمى "تقريباً دورية" لأنه بالنظر إلى شكل الدالة المرسومة ، فإنها تبدو كما لو كانت تتكرر في زمن محدد ، ولكنها ليست في الحقيقة دورية).

هناك دالة في ماتلاب تسمى 1cm تعطي التعداد المشترك الأصغر. إنها تكون محدودة أحياناً ؛ لأنها تقبل معاملين فقط ، وهذان المعاملان يمكن أن يكونا أرقاماً صحيحة قياسية ، أو مصفوفات من الأرقام الصحيحة. هناك أيضاً الدالة gcd التي تعطي المضاعف المشترك الأعظم لرقمين صحيحين ، أو مصفوفتين من الأرقام الصحيحة.

```
>> lcm(32,47)
ans =
      1504
>> gcd([93,77],[15,22])
ans =
       3     11
```

## (٢,٩) طاقة الإشارة وقدرتها

كل الأنشطة الطبيعية يتم تداولها عن طريق نقل الطاقة، كما أن الأنظمة الطبيعية الحقيقية تستجيب لطاقة أي إثارة. من المهم عند هذه النقطة نضع بعض المصطلحات التي تصف طاقة وقدرة الإشارات. عند دراسة الإشارات في الأنظمة، يتم في العادة التعامل مع الإشارات بتجريد رياضي. في العادة يتم إهمال الدلالة الطبيعية للإشارة من أجل تبسيط التحليل. الإشارات الحقيقية في الأنظمة الكهربية تكون جهود وتيارات، ولكنها يمكن أن تكون أيضاً شحنة أو مجالاً كهربياً أو أي كمية طبيعية أخرى. في الأنواع الأخرى من الأنظمة يمكن للإشارة أن تكون قوة، أو درجة حرارة، أو تركيزاً كيميائياً، أو فيضاً من النيوترونات، وهكذا. نتيجة الأنواع المختلفة المتعددة من الإشارات الطبيعية التي يمكن العمل عليها عن طريق الأنظمة، فإن مصطلح طاقة الإشارة قد تم تحديده. طاقة الإشارة (في مقابل الطاقة فقط)، لأي إشارة يتم تحديدها على أنها المساحة تحت مربع مقدار الإشارة. وعلى ذلك فإن طاقة الإشارة، للإشارة $x(t)$ ستكون:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$ المعادلة رقم (٢,١٦)

وحدات طاقة الإشارة تعتمد على وحدات الإشارة نفسها. إذا كانت وحدات الإشارة هي الفولت (V)، فإن طاقة الإشارة يتم التعبير عنها بـ $V^2s$. طاقة الإشارة تتناسب مع الطاقة الطبيعية التي يتم توفيرها عن طريق الإشارة ولكنها ليس بالضرورة ستساوي هذه الطاقة الطبيعية. في حالة إشارة التيار $i(t)$ التي تمر خلال مقاومة R فإن الطاقة الحقيقية التي سيتم إمداد المقاومة بها ستكون:

$$Energy = \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)|^2 R dt = R \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)|^2 dt = RE_i$$

تتناسب طاقة الإشارة مع الطاقة الحقيقية وثابت التناسب، في هذه الحالة، هي R. بالنسبة للإشارات المختلفة، فإن ثابت التناسب من الممكن أن يكون مختلفاً. في الأنواع المختلفة من تحليل الأنظمة فإن استخدام طاقة الإشارة يكون أكثر راحة من استخدام الطاقة الطبيعية الحقيقية.

**مثال ٢,٥**

**طاقة الإشارة لأي إشارة**

احسب طاقة الإشارة لـ:

$$x(t) = \begin{cases} 3\left(1 - \left|\frac{t}{4}\right|\right), & |t| < 4 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

من تعريف طاقة الإشارة :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-4}^{4} \left|3(1 - \left|\frac{t}{4}\right|)\right|^2 dt$$

بالاستفادة من ميزة أن الإشارة x(t) دالة زوجية :

$$E_x = 2x3^2 \int_0^4 \left(1 - \frac{t}{4}\right)^2 dt = 18 \int_0^4 \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{16}\right) dt$$

$$= 18 \left[t - \frac{t^2}{4} + t^3/48\right]_0^4 = 24$$

**قدرة الإشارة**

سنجد للعديد من الإشارات أن $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$ لا تصل إلى تقارب نتيجة أن الطاقة تكون لا نهائية. إن ذلك يحدث في العادة نتيجة أن الإشارة لا تكون محدودة الزمن. (مصطلح أن الإشارة تكون محدودة الزمن يعني أن الإشارة لا تساوي الصفر في زمن محدود فقط). مثال على إشارة ذات طاقة غير محدودة هو الإشارة $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$ ، و $A\neq0$. على مدى الفترة الزمنية غير المحدودة سنجد أن المساحة تحت مربع هذه الإشارة ستكون لا نهائية. بالنسبة للإشارات التي من هذا النوع ، فإنه من الأفضل أن يتم التعامل مع متوسط قدرة الإشارة بدلاً من طاقة الإشارة. متوسط قدرة الإشارة لأي إشارة تعطى بالمعادلة التالية :

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$ المعادلة رقم (٢.١٧)

هذا التكامل هو قدرة الإشارة على طول الفترة الزمنية T وبعد ذلك تمت قسمته على هذا الزمن T ، لكي يعطي متوسط قدرة الإشارة على هذه الفترة الزمنية. وبالتالي فمع اقتراب T من المالانهاية ، فإن متوسط قدرة هذه الإشارة ستصبح متوسط قدرة الإشارة على كل الأزمنة.

بالنسبة للإشارات الدورية ، فإن حسابات هذه القدرة من الممكن أن تكون أبسط ، حيث إن القيمة المتوسطة لأي دالة دورية تساوي القيمة المتوسطة على دورة من دوراتها. وعلى ذلك ، فحيث إن مربع أي دالة دورية يكون دورياً أيضاً ، فيمكننا كتابة معادلة القدرة للدالة الدورية كما يلي :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 \, dt$$

حيث الرمز $\int_T$ يعني التكامل نفسه مثل $\int_{t_0}^{t_0+T}$ لأي قيمة اختيارية لـ $t_0$ ، و T من الممكن أن تكون أي دورة لـ $|x(t)|^2$.

**مثال ٦,٢**

**قدرة الإشارة لإشارةجيبية**

احسب القدرة المتوسطة للإشارة $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$.

من تعريف القدرة المتوسطة للإشارات الدورية يمكننا كتابة ما يلي :

$$P_x = \frac{1}{T}\int_T |A\cos(2\pi f_0 t+\theta)|^2\, dt = \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos^2(\frac{2\pi t}{T_0}+\theta)\, dt$$

باستخدام قاعدة حساب التالية :

$$\cos(x)\cos(y)=(1/2)[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$

نحصل على مايلي :

$$P_x = \frac{A^2}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left[1+\cos(\frac{4\pi t}{T_0}+2\theta)\right]dt + \frac{A^2}{2}\underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt + \frac{A^2}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}+2\theta\right)dt}_{=0} = \frac{A^2}{2}$$

التكامل الثاني على اليمين يساوي صفراً ؛ لأنه عبارة عن تكامل جيب تمام على دورة أساسية كاملة. قدرة الإشارة هي : $P_x=A^2/2$. هذه النتيجة لا تعتمد على الزاوية $\theta$ ولا على التردد $f_0$. إنها تعتمد فقط على مقدار الإشارة A.

الإشارات التي لها طاقة محددة تسمى إشارات طاقة energy signals ، والإشارات التي لها طاقة غير محددة ولكن لها متوسط قدرة محدد تسمى إشارات قدرة power signals. لا يوجد في الطبيعة إشارة لها طاقة غير محددة أو متوسط قدرة غير محدد ؛ لأنه لا توجد طاقة أو قدرة كافية في العالم. ولكننا في العادة نحلل الإشارات التي ، تبعا لتعريفها المحدد ، يكون لها طاقة لا نهائية مثل إشارة الجيب مثلاً. ما هي أهمية التحليل إذا كان سيتم إجراؤه على إشارات لا يمكن أن تكون موجودة في الطبيعة؟ إنها غاية في الأهمية !. السبب في أن دوال الجيب الحسابية لها طاقة إشارة لا نهائية هي أنها توجد دائماً وتظل موجودة دائماً. إنها كلها يجب أن تبدأ عند زمن محدد وكلها يجب أن تنتهي عند زمن محدد. إنها في الحقيقة محدودة الزمن ولها طاقة إشارة محدودة. ولكن في الكثير من تحليل الأنظمة يكون التحليل تحليلاً مستقر الحالة للنظام والذي فيه يتم التعامل مع الإشارات على أنها دورية. إن هذا التحليل لا يزال مهماً ومفيداً لأنه تقريب جيد للحقيقة ، إنه غالباً يكون أبسط كثيراً عن التحليل الدقيق ، كما أنه يعطي نتائج مفيدة. كل الإشارات الدورية تكون إشارات طاقة (فيما عدا الإشارة غير المهمة $x(t)=0$) لأنها كلها تستمر أو تدوم إلى ما لا نهائية.

**مثال ٢,٧**

**حساب الطاقة والقدرة للإشارات باستخدام ماتلاب**

باستخدام ماتلاب ، احسب طاقة الإشارة والقدرة للإشارات التالية :

أ- $x(t) = 4e^{-t/10} rect\left(\frac{t-4}{3}\right)$

ب- إشارة دورية دورتها الأساسية تساوي 10 موصوفة على مدار دورة واحدة بالعلاقة :

x(t)=-3t,  -5<t<5.

بعد ذلك قارن النتائج مع الحسابات التحليلية.

% برنامج لحساب الطاقة والقدرة لبعض الإشارات كأمثلة

% أ-

dt = 0.1 ; t = -7:dt:13 ; % تثبيت متجه الأزمنة التي سيتم حساب الدوال عندها ،

% 0.1 الفترة الزمنية تساوي

% حساب قيم الدوال ومربعاتها

```
x = 4*exp(-t/10).*rect((t-4)/3) ;
xsq = x.^2 ;
```

Ex = trapz(t,xsq) ; % استخدام قانون شبه المنحرف للتكامل العددي لحساب

% المساحة تحت مربع الدالة وعرض النتيجة

```
disp([ (a) Ex =, num2str(Ex)]) ;
```

% ب-

T0 = 10 ; %10 الدورة الأساسية تساوي

dt = 0.1 ; t = -5:dt:5 ; % تثبيت متجه أزمنة يتم حساب الدالة عنده

0.1 % الفترة الزمنية تساوي

x = -3*t ; xsq = x.^2 ; % حساب قيم الدالة ومربعاتها على دورة أساسية واحدة

Px = trapz(t,xsq)/T0 ; % استخدام قانون شبه المنحرف للتكامل العددي لحساب

% المساحة تحت مربع الدالة وعرض النتيجة

```
disp([‘(b)  Px = ‘, num2str(Px)]) ;
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي :

أ- Ex=21.5177

ب- Px=75.015

الحسابات التحليلية ستكون كما يلي :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{2.5}^{5.5} \left|4e^{-t/10}\right|^2 dt$$
$$= 16\int_{2.5}^{5.5} e^{-t/5}\, d\tau = -5x16\left[e^{-t/5}\right]_{2.5}^{5.5} = 21.888$$

(الفرق البسيط في النتائج ربما يكون نتيجة خطأ كامن في قانون شبه المنحرف للتكامل. يمكن تقليل هذا الخطأ عن طريق استخدام نقاط أكثر تقارباً من بعضها)

$$P_x = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} (-3t)^2\, dt = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 9t^2\, dt = \frac{1}{5}(3t^2)_0^5 = \frac{375}{5} = 75$$

## (٢,١٠) ملخص لبعض النقاط المهمة

١- المصطلح مستمر، والمصطلح مستمر زمنياً يعنيان أشياء مختلفة.

٢- النبضة المستمرة زمنياً، على الرغم من أنها مفيدة جداً في تحليل الإشارات والأنظمة، إلا أنها ليست دالة بالمعنى العادي.

٣- العديد من الإشارات العملية يمكن وصفها عن طريق تجميع الدوال القياسية المزاحة و/أو المحجمة، وترتيب عمليات الإزاحة والتحجيم يكون مهماً.

٤- طاقة الإشارة، هي في العادة، ليست الشيء نفسه مثل الطاقة الطبيعية الحقيقية التي توفرها الإشارة.

٥- الإشارة التي لها طاقة محددة تسمى إشارة طاقة، والإشارة التي لها طاقة غير محددة ومتوسط قدرة محدد تسمى إشارة قدرة.

**تمارين مع إجاباتها**

(الإجابات المقدمة مرتبة عشوائياً في كل تمرين)

**دوال الإشارات**

١- إذا كانت $g(t)=7e^{-2t-3}$، أكتب وبسط الدوال التالية:

أ- $g(3)$ ب- $g(2-t)$ ت- $g((t/10)+4)$ ث- $g(jt)$ ج- $\frac{g(jt)+g(-jt)}{2}$

هـ- $\frac{g\left(\frac{jt-3}{2}\right)+g\left(\frac{-jt-3}{2}\right)}{2}$

**الإجابة:**

$7\cos(t)$ ، $7e^{-7+2t}$ ، $7e^{-(t/5)-11}$ ، $7e^{-3}\cos(2t)$ ، $7e^{-9}$.

٢- إذا كانت $g(x)=x^2-4x+4$، اكتبْ وبَسِّطْ المعادلات التالية:

أ- g(z) ، ب- g(u+v) ، ت- $g(e^{jt})$ ث- g(g(t)) ج- g(2)

**الإجابة:**

$(e^{jt}-2)^2$ ، $z^2-4z+4$ ، 0 ، $u^2+v^2+2uv-4u-4v+4$ ، $t^4-8t^3+20t^2-16t+4$

٣- ما هي قيمة g في كل أمر من أوامر ماتلاب التالية :

```
t = 3 ;   g = sin(t) ;
x = 1:5 ;   g = cos(pi*x) ;
f = -1:0.5:1 ;    w = 2*pi*f ;    g = 1./(1+j*w') ;
```

**الإجابة:**

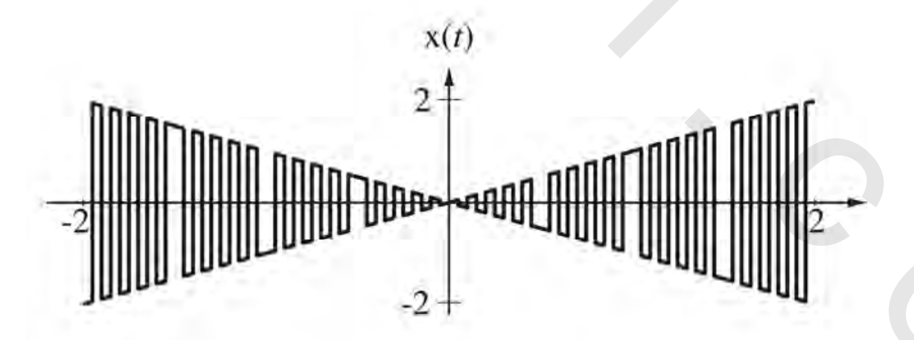
$$0.1411,\quad [-1,1,-1,1,-1],\quad \begin{bmatrix} 0.0247 + j0.155 \\ 0.0920 + j0.289 \\ 1 \\ 0.0920 - j0.289 \\ 0.0247 - j0.155 \end{bmatrix}$$

٤- افترض الدالتين المعرفتين كما يلي :

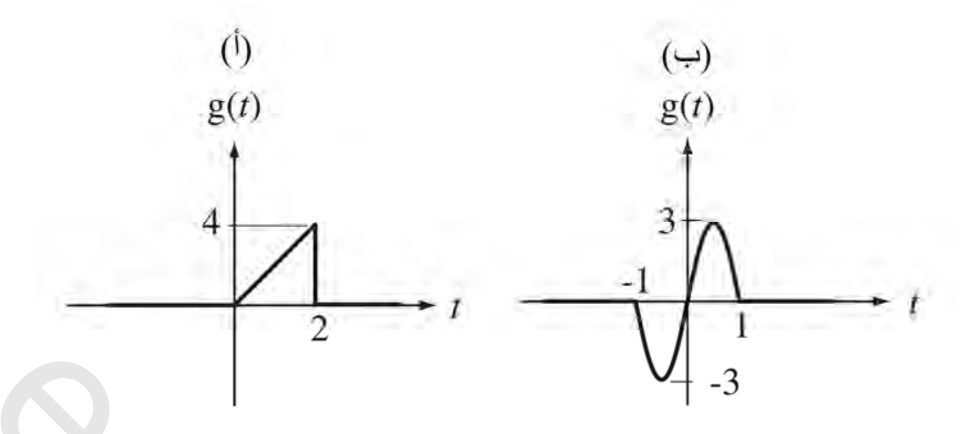
$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & \sin(20\pi t) \geq 0 \\ -1, & \sin(20\pi t) < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x_2(t) = \begin{cases} t, & \sin(2\pi t) \geq 0 \\ -t, & \sin(2\pi t) < 0 \end{cases}$$

ارسم حاصل ضرب هاتين الدالتين مع الزمن في المدى $-2<t<2$.

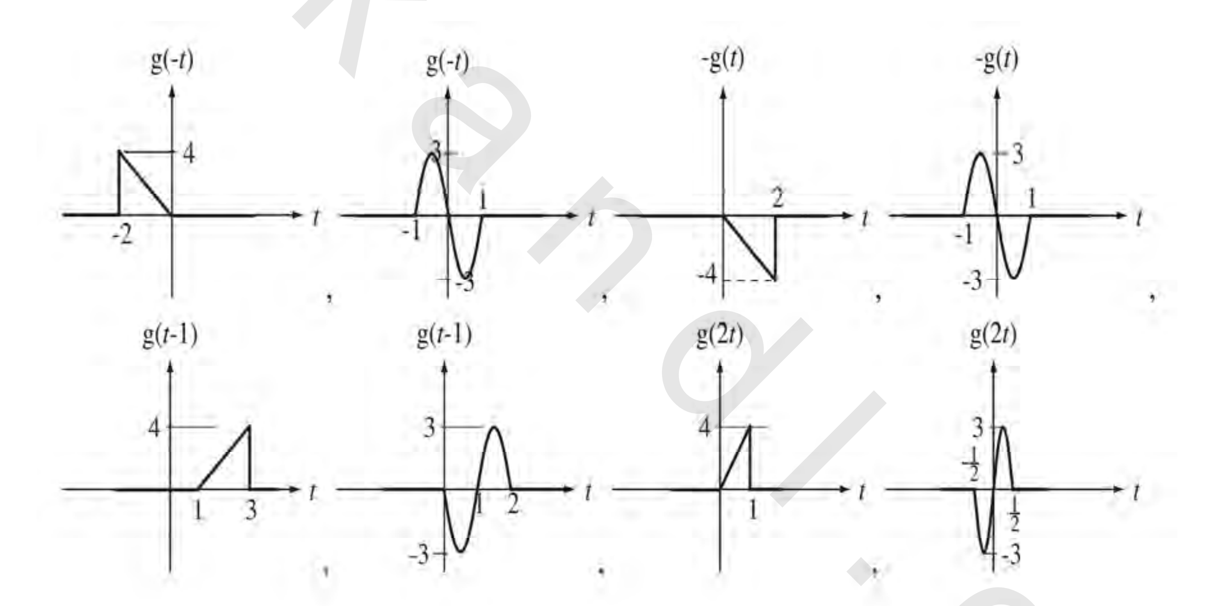
**الإجابة:**




٥- لكل دالة g(t) إرسم g(-t) و –g(t) و g(t-1) و g(2t).




**الإجابة:**




٦- احسب قيم الإشارات التالية عند الزمن الموضح

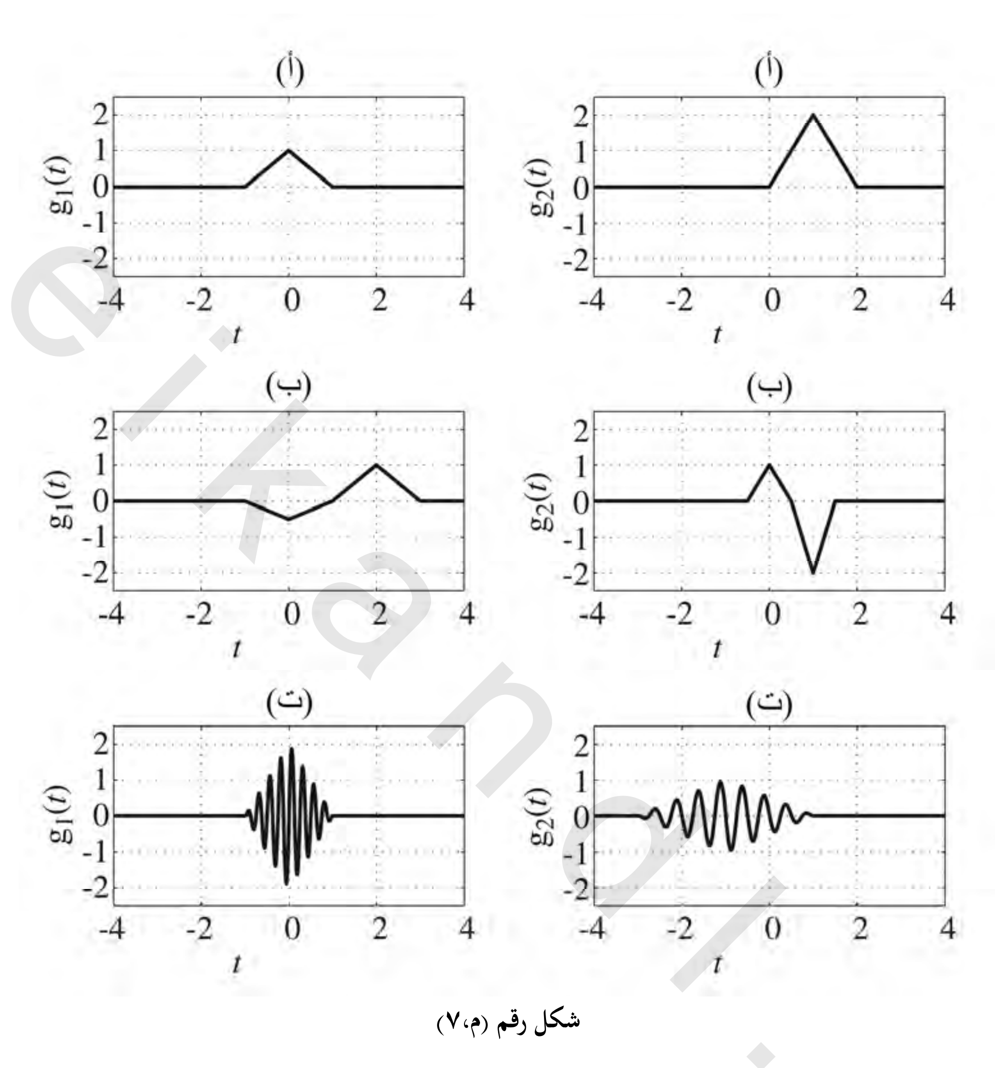
أ- x(t)=2rect(t/4), x(-1)

ب- x(t)=5rect(t/2)sgn(2t), x(0.5)

ت- x(t)=9rect(t/10)sgn(3(t-2)), x(1)

**الإجابة:** **–9, 2, 5**

٧- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (م.٧) احسب قيم الثوابت A و $t_0$ و ω في الإزاحة و/أو التحجيم في الدالة $g_2(t)=Ag_1((t-t_0)/\omega)$.

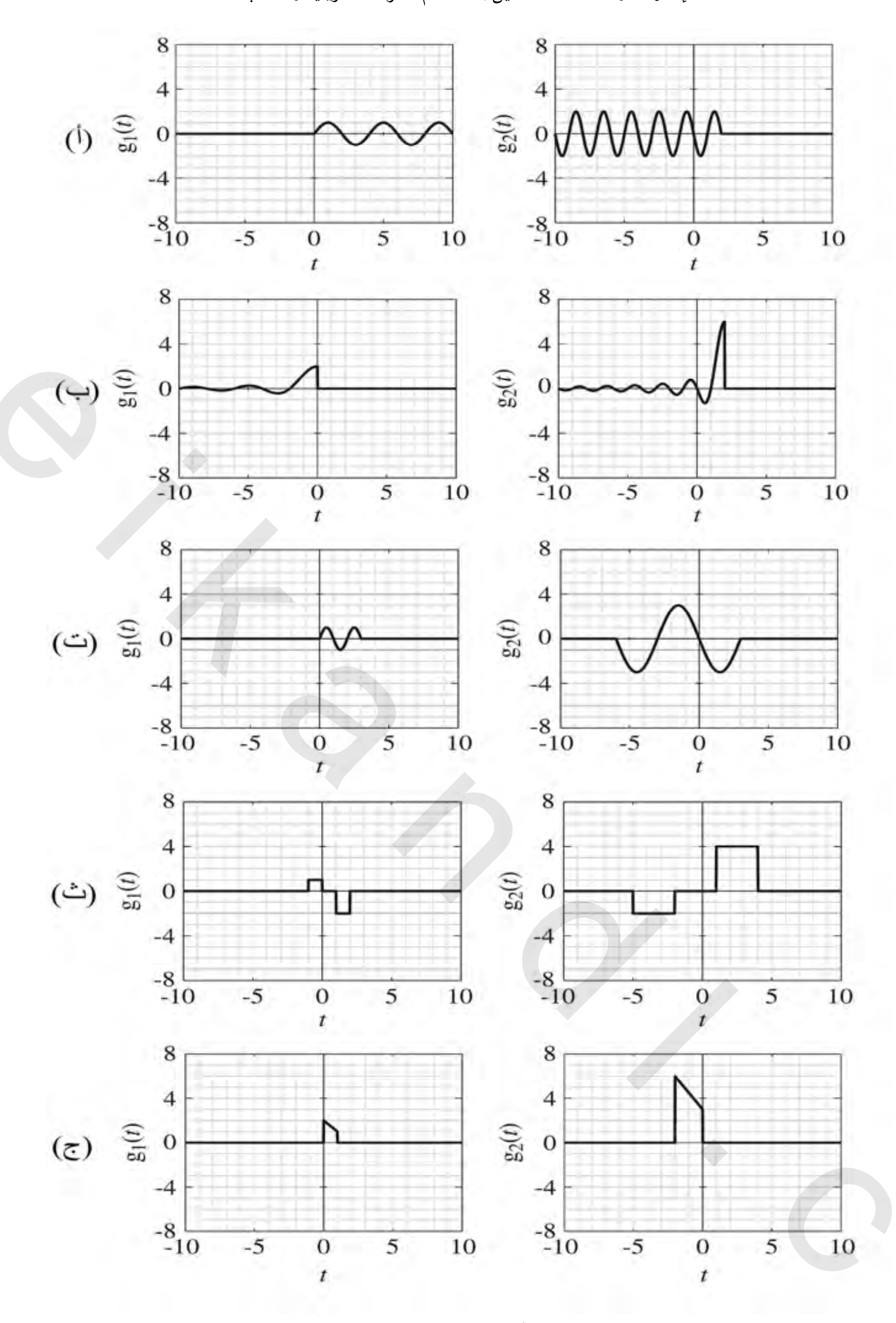



شكل رقم (م،٧)

**الإجابة:**

$A=2, t_0=1, \omega=1$ و $A=-1/2, t_0=-1, \omega=2$ و $A=-2, t_0=0, \omega=1/2$

٨- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (م،٨) احسب قيم الثوابت A و $t_0$ و ω في الإزاحة و/أو التحجيم في الدالة $g_2(t)=Ag_1((t-t_0)/\omega)$.




**شكل رقم (م،٨)**

**الإجابة :** $A=3, t_0=2, \omega=2$

$A=-3, t_0=-6, \omega=1/3$ أو $A=-3, t_0=3, w=-1/3$

$A=-2, t_0=-2, \omega=1/3$

$A=3, t_0=-2, \omega=1/2$

$A=2, t_0=2, \omega=-2$

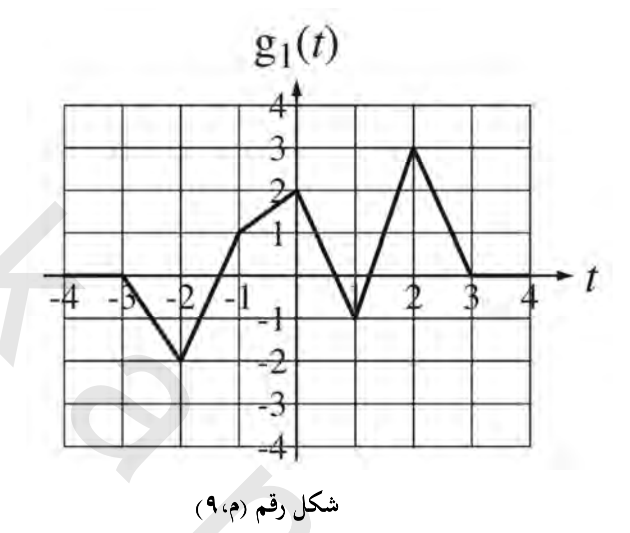
٩- شكل (م، ٩) يُبِّين رسماً للدالة g(t)، التي تساوي صفراً لكل الأزمنة خارج المدى الموضح في الشكل.

افترض دوال أخرى معرفة كما يلي:

$g_2(t)=3g_1(2-t), \quad g_3(t)=-2g_1(t/4), \quad g_4 = g_1\left(\frac{t-3}{2}\right)$

إحسب هذه القيم:

(أ) $g_2(1)$ (ب) $g_3(-1)$ (ت) $[g_4(t)g_3(t)]_{t=2}$ (ث) $\int_{-3}^{-1} g_4(t)\,dt$




**شكل رقم (م،٩)**

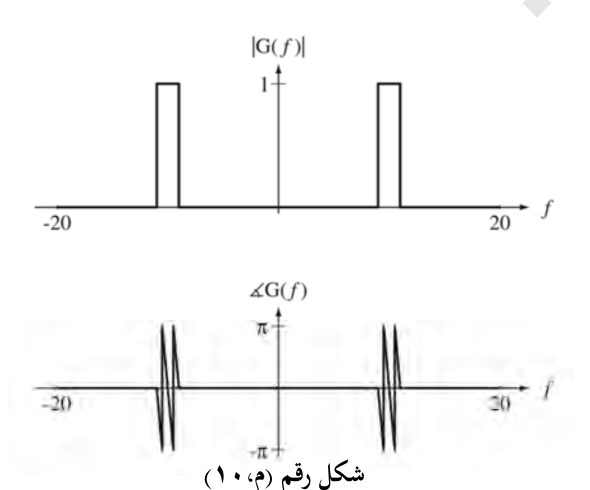
**الإجابة:**

-7/2, -3/2, -2, -3

١٠- افترض الدالة G(f) المعرفة كما يلي:

$G(f) = e^{-j2\pi f}rect(f/2)$

ارسم مقدار وزاوية الدالة G(f-10)+G(f+10) على المدى -20<f<20.




**شكل رقم (م،١٠)**

**الإجابة:**

$$G(f-10)+G(f+10)=e^{-j2\pi(f-10)}rect\left(\frac{f-10}{2}\right)+e^{-j2\pi(f+10)}rect\left(\frac{f+10}{2}\right)$$

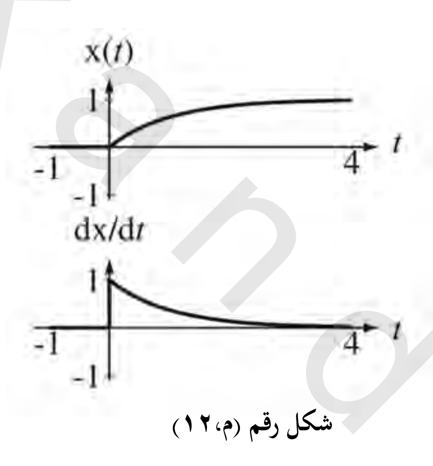
١١- أكتبْ تعبيراً يتكون من مجموع دوال وحدة الخطوة ليعبر عن إشارة تتكون من نبضة مستطيلة عرضها ٦ ميللي ثانية وارتفاعها يساوي 3، والتي تحدث بمعدل منتظم مقداره 100 نبضة في الثانية بحيث تبدأ الحافة الأمامية عند الزمن t=0.

**الإجابة:** $x(t)=3\sum_{n=0}^{\infty}[u(t-0.01n)-u(t-0.01n-0.006)]$

## التفاضلات والتكاملات

١٢- ارسم تفاضل الدالة $x(t)=(1-e^{-t})u(t)$.

**الإجابة:**



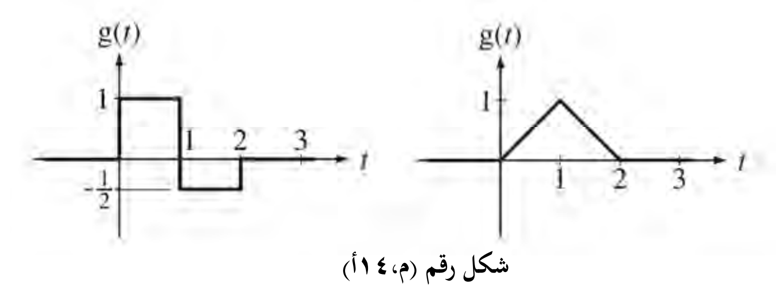

شكل رقم (م،١٢)

١٣- احسب القيمة العددية لكل من التكاملات التالية:

(أ) $\int_{-1}^{\infty}[\delta(t+3)-2\delta(4t)]\,dt$ (ب) $\int_{1/2}^{5/2}\delta_2(3t)\,dt$

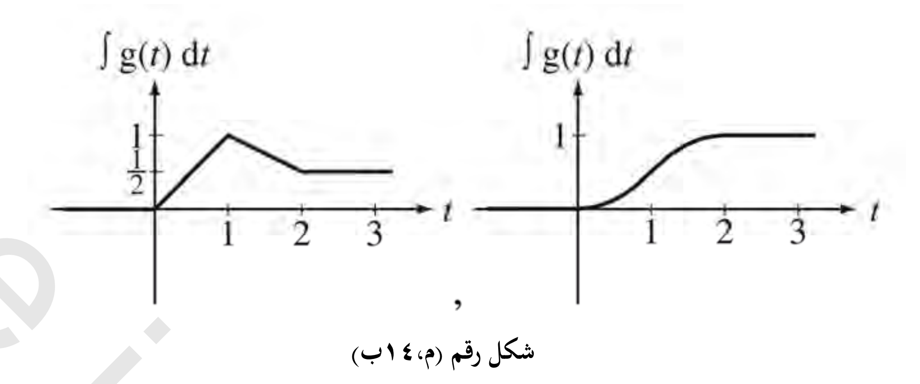
**الإجابة:** -1/2, 1

١٤- ارسم التكامل من سالب ما لا نهاية حتى t للدوال الموضحة في شكل (م ، ١٤).




شكل رقم (م،١٤أ)

**الإجابة:**




شكل رقم (م،١٤ب)

## الإشارات الزوجية والفردية

١٥- دالة زوجية g(t) موصوفة على الفترة الزمنية 0<t<10 بالمعادلة التالية :

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 3 \\ 15 - 3t, & 3 < t < 7 \\ -2, & 7 < t < 10 \end{cases}$$

(أ) ما هي قيمة الدالة g(t) عند الزمن t=-5 ؟

(ب) ما هي قيمة التفاضل الأول للدالة g(t) عند الزمن t=-6 ؟

**الإجابة:** 3, 0

١٦- احسب الأجزاء الزوجية والفردية للدوال التالية :

(أ) $g(t)=2t^2-3t+6$ (ب) $g(t)=20\cos(40\pi t-\pi/4)$

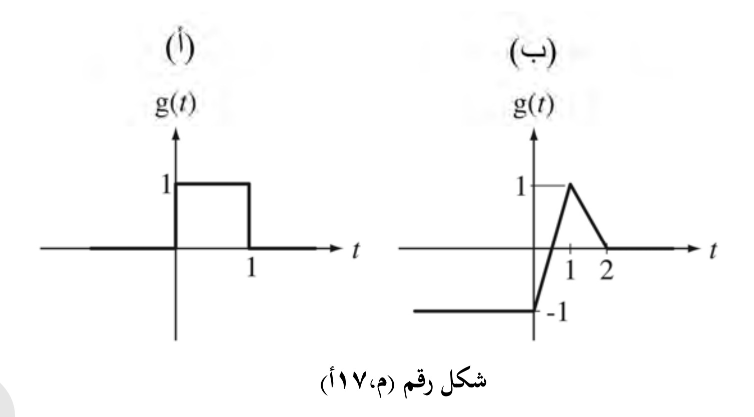
(ب) $g(t) = \frac{2t^2-3t+6}{1+t}$ (ث) $g(t)=t(2-t^2)(1+4t^2)$

(ج) $g(t)=t(2-t)(1+4t)$

**الإجابة :** $7t^2$, $-t\frac{2t^2+9}{1-t^2}$, 0, $(20/\sqrt{2})\cos(40\pi t)$, $t(2-4t^2)$,

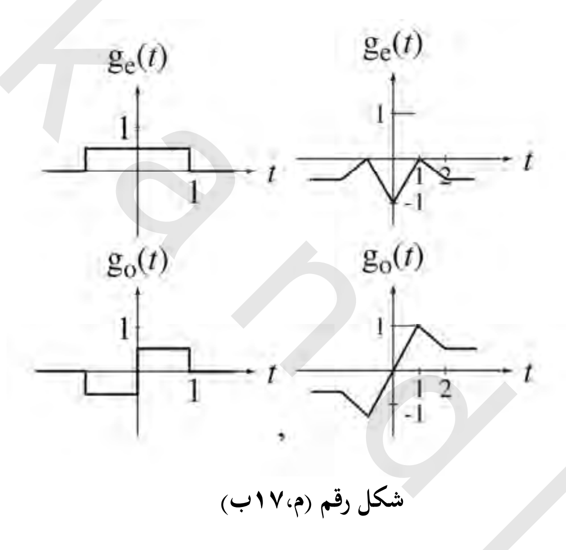
$-3t$, $\frac{6+5t^2}{1-t^2}$, $t(2-t^2)(1+4t^2)$, $2t^2+6$, $(20/\sqrt{2})\sin(40\pi t)$

١٧- ارسم الأجزاء الزوجية والفردية للدوال الموضحة في شكل (م ، ١٧) :



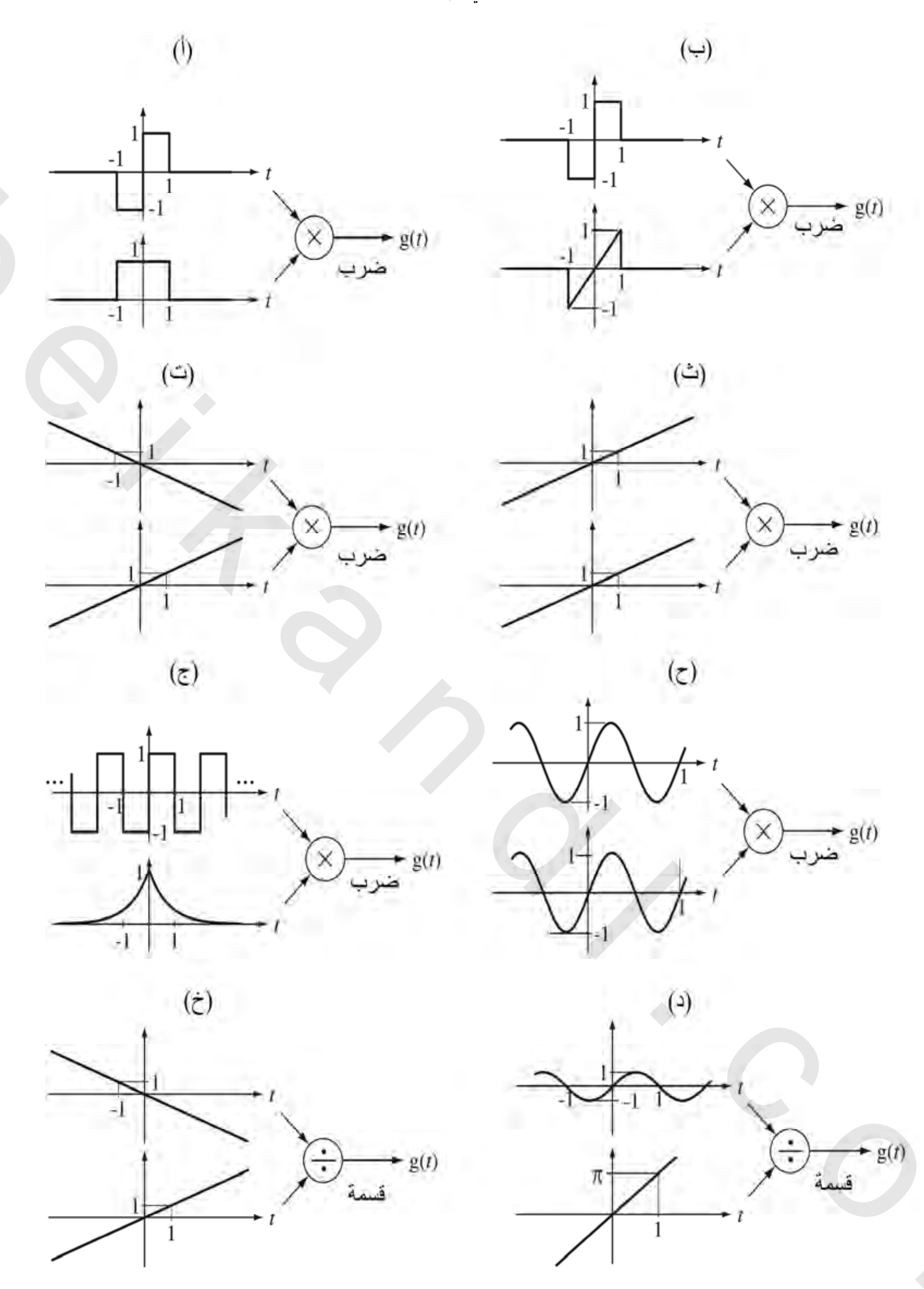

**شكل رقم (م،١٧أ)**

**الإجابة:**



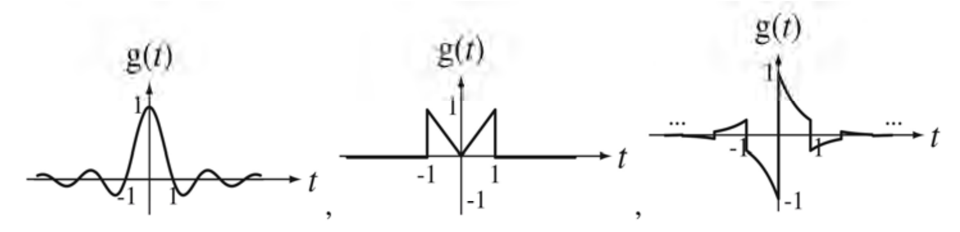

**شكل رقم (م،١٧ب)**

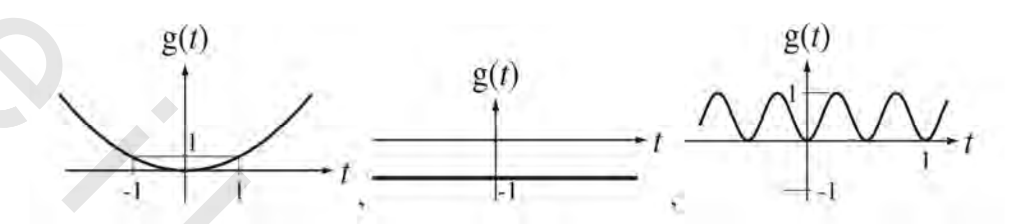
١٨- ارسم حاصل الضرب أو ناتج القسمة g(t) للدوال الموضحة في شكل (م ،١٨) :

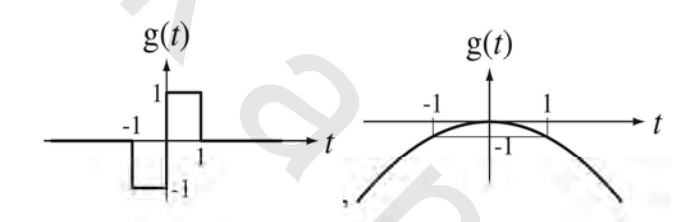



**شكل رقم (م،١٨أ)**

**الإجابة :**




**شكل رقم (م،١٨ب)**

١٩- استخدم خواص تكامل الدوال الزوجية والفردية لحساب التكاملات التالية في أسرع طريقة :

(أ) $\int_{-1}^{1}(2+t)\,dt$ (ب) $\int_{-1/20}^{1/20}[4\cos(10\pi t)+8\sin(5\pi t)]\,dt$

(ب) $\int_{-1/20}^{1/20}4t\cos(10\pi t)dt$ (ت) $\int_{-1/10}^{1/10}t\sin(10\pi t)\,dt$

(ت) $\int_{-1}^{1}e^{-|t|}dt$ (ج) $\int_{-1}^{1}te^{-|t|}dt$

الإجابة : 0, 8/10π, 1/50π, 0, 1.264, 4

**الإشارات الدورية**

٢٠- احسب الدورة الأساسية والتردد الأساسي للدوال التالية :

(أ) g(t)=10cos(50πt)

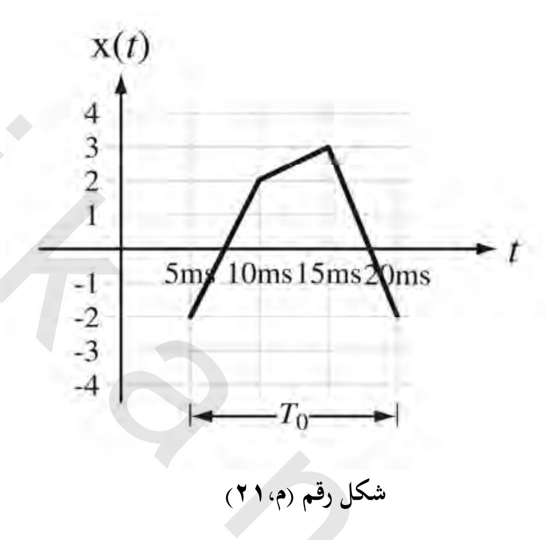
(ب) g(t)=10cos(50πt+π/4)

(ت) $g(t)=\cos(50\pi t)+\sin(15\pi t)$

(ث) $g(t)= \cos(2\pi t)+\sin(3\pi t)+ \cos(5\pi t-3\pi/4)$

الإجابة : 2s, 1/25 s, 2.5Hz, 1/25 s, 1/2Hz, 0.4 s, 25Hz, 25 Hz

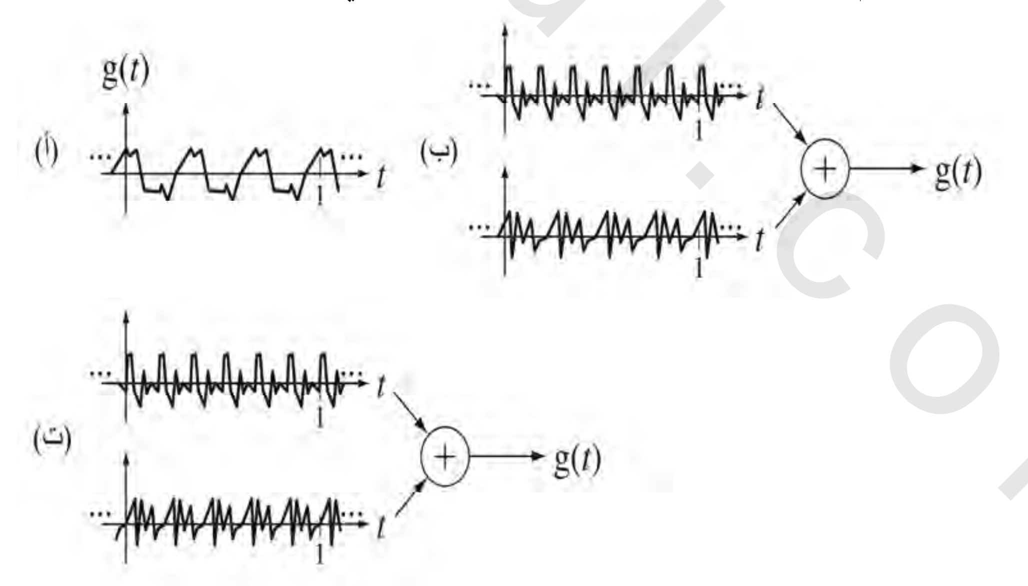
٢١- إحدى الدورات في الدالة الدورية x(t) التي دورتها الأساسية تساوي $T_0$ مرسومة في شكل (م، ٢١). ما هي قيمة الدالة x(t) عند الزمن t=220 ms ؟




**شكل رقم (م،٢١)**

**الإجابة:** 2

٢٢- في شكل (م ، ٢٢) إحسب الدورة الأساسية والتردد الأساسي للدالة g(t).




**شكل رقم (م،٢٢)**

**الإجابة:** 1Hz, 2Hz, ½ s, 1s, 1/3 s, 3Hz

## طاقة وقدرة الإشارة

٢٣- احسب طاقة الإشارة للإشارات التالية:

(أ) x(t)=rect(t)

(ب) x(t)=A(u(t)-u(t-10))

(ت) x(t)=u(t)-u(10-t)

(ث) x(t)=rect(t)cos(2πt)

(ج) x(t)=rect(t)cos(4πt)

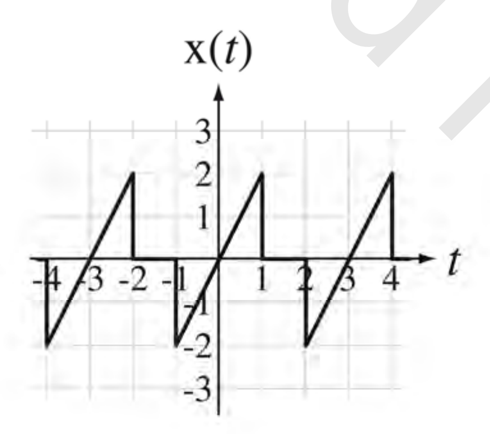
(ح) x(t)=rect(t)sin(2πt)

**الإجابة:** ½, ∞, $10A^2$, ½, 4, ½

٢٤- إشارة موصوفة بالمعادلة التالية x(t)=Arect(t)+Brect(t-0.5) فما هي طاقة هذه الإشارة ؟

**الإجابة:** $A^2+B^2+AB$

٢٥- احسب قدرة الإشارة المتوسطة للإشارة الدورية x(t) الموضحة في الشكل (م، ٢٥).




**شكل رقم (م،٢٥)**

**الإجابة:** 8/9.

٢٦- احسب قدرة الإشارة المتوسطة للإشارات التالية :

(أ) $x(t)=A$

(ب) $x(t)=u(t)$

(ت) $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$

الإجابة : $A^2, A^2/2, ½$

**تمارين بدون إجابة**

**دوال الإشارات**

٢٧- افترض تعريفات الدوال التي على اليسار ، واحسب قيمة الدوال على اليمين :

أ- $g(0.001)$ $g(t)=100\sin(200\pi t+\pi/4)$

ب- $g(2)$ $g(t)=13-4t+6t^2$

ج- $g(1/4)$ $g(t)=-5e^{-2t}e^{-j2\pi t}$

٢٨- افترض التعبير التالي لدالة وحدة النبضة :

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{a}\right) rect(\frac{x}{a}), \quad a > 0$$

الدالة $(1/a)rect(x/a)$ لها مساحة تساوي واحد بصرف النظر عن قيمة a.

أ- ما هي مساحة الدالة $\delta(4x) = \lim_{a\to 0}(\frac{1}{a})\, rect(\frac{4x}{a})$

ب- ما هي مساحة الدالة $\delta(-6x) = \lim_{a\to 0}(1/a)\, rect(-\frac{6x}{a})$

ج- ما هي مساحة الدالة $\delta(bx) = \lim_{a\to 0}(1/a)\, rect(\frac{bx}{a})$ عندما تكون b موجبة وعندما تكون b سالبة ؟

٢٩- استخدم التغيير في المتغيرات وتعريف وحدة الخطوة ، اثبتْ أن :

$$\delta(a(t-t_0)) = (\frac{1}{|a|})\delta(t-t_0)$$

٣٠- باستخدام النتائج التي حصلت عليها في تمرين ٢٩ وضح أن :

أ- $\delta_1(ax) = \frac{1}{|a|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-\frac{n}{a})$

ب- القيمة المتوسطة لـ $\delta_1(ax)$ تساوي واحداً ، ولا تعتمد على قيمة a.

ج- على الرغم من أن $\delta(at)=(1/|a|)\delta(t)$ فإن $\delta_1(ax)\neq(1/|a|)\delta_1(x)$.

**التحجيم والإزاحة**

٣١- ارسم الدوال المتفردة التالية والدوال المتعلقة بها :

أ- $g(t)=2u(4-t)$

ب- $g(t)=u(2t)$

ج- $g(t)=5sgn(t-4)$

د- $g(t)=1+sgn(4-t)$

ه- $g(t)=5ramp(t+1)$

و- $g(t)=-3ramp(2t)$

ز- $g(t)=2\delta(t+3)$

ح- $g(t)=6\delta(3t+9)$

ط- $g(t)=-4\delta(2(t-1))$

ي- $g(t)=2\delta_1(t-1/2)$

ك- $g(t)=8\delta_1(4t)$

ل- $g(t)=6\delta_2(t+1)$

م- $g(t)=2rect(t/3)$

ن- $g(t)=4rect((t+1)/2)$

س- $g(t)=-3rect(t-2)$

ع- (ق) $g(t)=0.1rect((t-3)/4)$

٣٢- ارسم الدوال التالية :

أ- $g(t)=u(t)-u(t-1)$

ب- $g(t)=rect(t-1/2)$

ج- $g(t)=-4ramp(t)u(t-2)$

د- $g(t)=sgn(t)\sin(2\pi t)$

ه- $g(t)=5e^{-t/4}u(t)$

و- $g(t)=rect(t)\cos(2\pi t)$

ز- $g(t)=-6rect(t)\cos(3\pi t)$

ح- $g(t)=u(t+1/2)ramp(1/2-t)$

ط- $g(t)=rect(t+1/2)-rect(t-1/2)$

ي- $g(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta(\lambda+1)-2\delta(\lambda)+\delta(\lambda-1)]d\lambda$

ك- $g(t)=2ramp(t)rect((t-1)/2)$

ل- $g(t)=3rect(t/4)-6rect(t/2)$

٣٣- ارسم الدوال التالية :

أ- $g(t)=3\delta(3t)+6\delta(4(t-2))$

ب- $g(t)=2\delta_1(-t/5)$

ج- $g(t)=\delta_1(t)\text{rect}(t/11)$

د- $g(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta_2(\lambda)-\delta_2(\lambda-1)]d\lambda$

٣٤- للدالة g(t) الوصف التالي: إنها تساوي صفراً لكل $t<-5$، وميلها يساوي 2- في المدى من $-5<t<-2$. هذه الدالة لها شكل الدالة الجيبية بمقدار يساوي واحداً، وتردد يساوي 1/4Hz بالإضافة لثابت في المدى $-2<t<2$. بالنسبة للقيم $t>2$ فإنها تتناقص في اتجاه الصفر بثابت زمنى مقداره 2 ثانية، وهي مستمر في جميع الأجوال.
أكتب وصفاً رياضياً كاملاً ودقيقاً لهذه الدالة.

أ- ارسم g(t) في المدى $-10<t<10$.

ب- ارسم g(2t) في المدى $-10<t<10$.

ج- ارسم 2g(3-t) في المدى $-10<t<10$.

د- ارسم -2g((t+1)/2) في المدى $-10<t<10$.

٣٥- باستخدام ماتلاب، لكل من الدوال التالية ارسم الدالة الأساسية والدالة المزاحة و/أو المحجمة:

أ- $g(t)=\begin{cases}-2, & t<-1\\ 2t, & -1<t<1\\ 3-t^2, & 1<t<3\\ -6, & t>3\end{cases}$ ، -3g(4-t) مع الزمن t

ب- $g(t)=\text{Re}(e^{j\pi t}+e^{j1.1\pi t})$ ، g(t/4) مع الزمن t

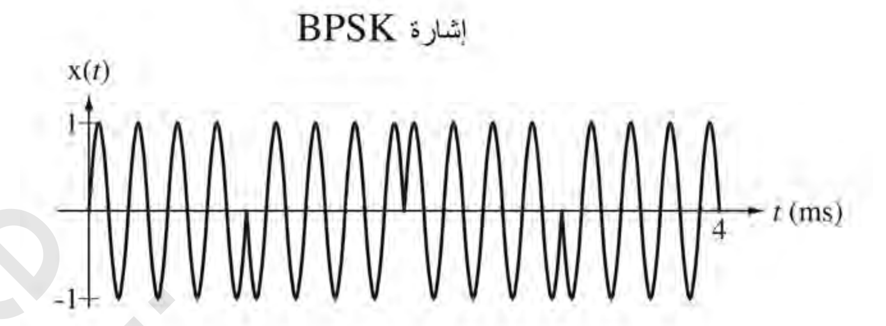
ج- $G(f)=\left|\frac{5}{f^2-j2+3}\right|$ ، $|G(10(f-10))+G(10(f+10))|$ مع التردد f

٣٦- إحدى الإشارات التي تحدث في جهاز التليفزيون موضحة في شكل (م،٣٦). اكتبْ وصفاً حسابياً لهذه الإشارة:



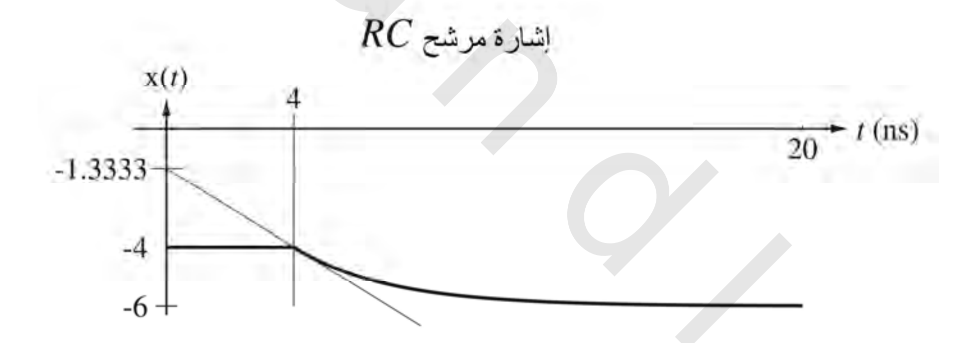

**شكل رقم (م،٣٦) إحدى الإشارات التي تحدث في جهاز التليفزيون**

٣٧- الإشارة الموضحة في شكل (م ،٣٧) هي جزء من الإزاحة الطورية المفتاحية الثنائية binary phase shift keyed, BPSK في التراسل الرقمي. أكتب الوصف الحسابي لها.



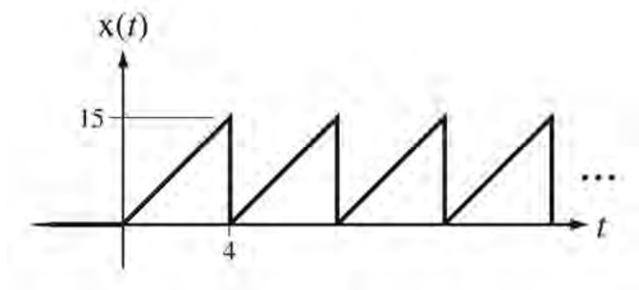

**شكل رقم (م،٣٧) إشارة ال BPSK**

٣٨- الإشارة الموضحة في شكل (م ،٣٨) تمثل استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة RC لتغير مفاجئ في إشارة الدخل له. اكتب الوصف الحسابي لهذه الإشارة :



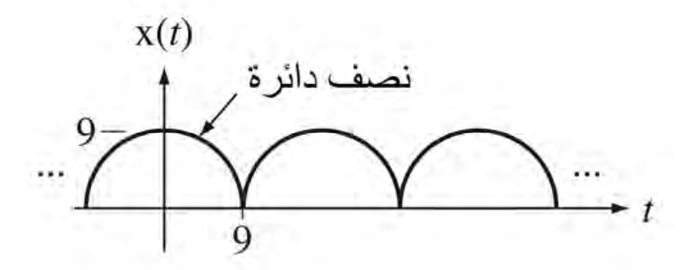

**شكل رقم (م،٣٨) الاستجابة الوقتية لمرشح RC**

٣٩- صف الإشارة الموضحة في شكل (م ، ٣٩) كدالة خطية مطروحاً منها مجموعة دوال خطوة.




**شكل رقم (م،٣٩)**

٤٠- صف الإشارة الموضحة في شكل (م، ٤٠):




**شكل رقم (م، ٤٠)**

٤١- افترض الدالتين التاليتين المعرفتين كما يلي:

$x_2(t)=\sin(2\pi t/10)$ و $x_1(t)=\begin{cases}1, & \cos(2\pi t)\geq 0\\ 0, & \cos(2\pi t)<0\end{cases}$

ارسم حاصل ضرب الدوال التالية في المدى $-5<t<5$ :

أ- $x_1(2t)x_2(-t)$

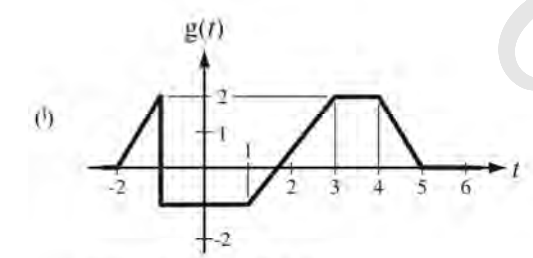
ب- $x_1(t/5)x_2(20t)$

ج- $x_1(t/5)x_2(20(t+1))$

د- $x_1((t-2)/5)x_2(20t)$

٤٢- افترض التعريف البياني لدالة كالموضح في شكل (م، ٤٢)، ارسم الصور المزاحة و/أو المحجمة التالية:

(أ)

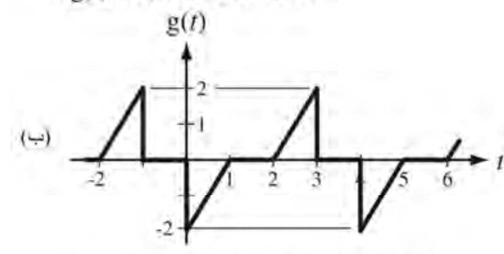



$t \rightarrow 2t$

$g(t) \rightarrow -3g(-t)$

$g(t)=0,\ t<-2$ or $t>6$

(ب)



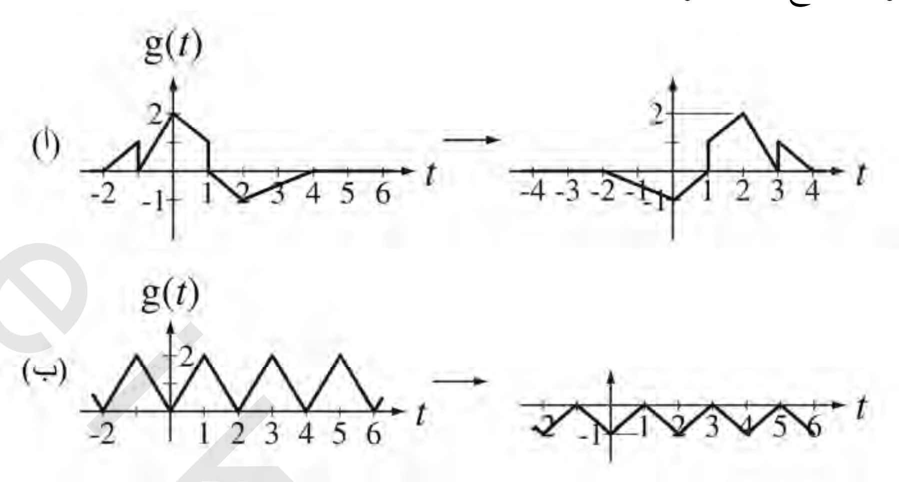

$t \rightarrow t+4$

$g(t) \rightarrow -2g((t-1)/2)$

الدالة g(t) دورية بدورة أساسية تساوي 4

**شكل رقم (م، ٤٢)**

٤٣- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (م،٤٣) وضح ما هي الإزاحة و/أو التحجيم الذي حدث، واكتب التعبير الصحيح للدالة المزاحة و/أو المحجمة.




في (ب) بفرض g(t) دورية بدورة أساسية تساوي 2، أوجد تغيرين إزاحيين و/أو تحجيمين يعطيان النتيجة نفسها.

٤٤- اكتب دالة مستمرة في الزمن t التي عندما يحدث فيها التغيران المتتابعان $t \to -t$ و $t \to t-1$ تبقى على الدالة بدون تغيير.

٤٥- ارسم المقدار والزاوية للدوال التالية مع التردد f :

أ- $G(f) = \frac{jf}{1=jf/10}$

ب- $G(f) = \left[rect\left(\frac{f-1000}{100}\right) + rect\left(\frac{f+1000}{100}\right)\right] e^{-j\pi f/500}$

ج- $G(f) = \frac{1}{250-f^2+j3f}$

٤٦- ارسم المقدار والزوايا مع التردد f لكل من الدوال التالية في المدى $-4<f<4$ :

أ- $X(f) = 5rect(2f)e^{+j2\pi f}$

ب- $X(f)=j5\delta(f+2)-j5\delta(f-2)$

ج- $X(f)=(1/2)\delta_{1/4}(f)e^{-j\pi f}$

**التفاضل العام**

٤٧- ارسم التفاضل العام للدالة $g(t)=3\sin(\pi t/2)rect(t)$.

**التفاضلات والتكاملات**

٤٨- ما هي القيمة العددية لكل من التكاملات التالية؟

أ- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos(48\pi t)\, dt$

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5) \cos(\pi t)\, dt$

ج- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-8) rect(\frac{t}{16}) dt$

٤٩- ما هي القيمة العددية لكل من التكاملات التالية؟

أ- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) \cos(48\pi t)\, dt$

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) \sin(2\pi t) dt$

ج- $4\int_{0}^{20} \delta_4(t-2) rect(t) dt$

٥٠- ارسم التفاضلات الزمنية للدوال التالية؟

أ- g(t)=sin(2πt)sgn(t)

ب- g(t)=|cos(2πt)|

**الإشارات الزوجية والفردية**

٥١- إرسم الجزء الزوجي والجزء الفردي للإشارات التالية :

أ- x(t)=rect(t-1)

ب- x(t)=2sin(4πt-π/4)rect(t)

٥٢- احسب الجزء الزوجي والجزء الفردي لكل من الدوال التالية :

أ- g(t)=10sin(20πt)

ب- $g(t)=20t^3$

ج- $g(t)=8+7t^2$

د- g(t)=1+t

ه- g(t)=6t

و- g(t)=4tcos(10πt)

ز- g(t)=cos(πt)/πt

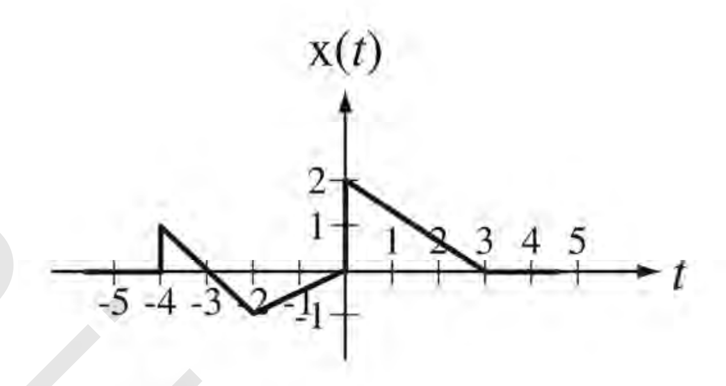
ح- g(t)=12+sin(4πt)/4πt

ط- g(t)=(8+7t)cos(32πt)

ي- $g(t)=(8+7t^2)\sin(32\pi t)$

٥٣- هل هناك دالة تكون زوجية وفردية في الوقت نفسه ؟ اشرح

٥٤- أوجد وارسم الجزء الزوجي والفردي للدالة x(t) في شكل (م ، ٥٤).




**شكل رقم (م،٥٤)**

## الإشارات الدورية

٥٥- لكل واحدة من الإشارات التالية ، قرر إذا كانت دورية أم لا ، وإذا كانت دورية فما هي الدورة؟

أ- $g(t)=28\sin(400\pi t)$

ب- $g(t)=14+40\cos(60\pi t)$

ج- $g(t)=5t-2\cos(5000\pi t)$

د- $g(t)=28\sin(400\pi t)+12\cos(500\pi t)$

ه- $g(t)=10\sin(5\pi t)-4\cos(7t)$

و- $g(t)=4\sin(3t)+3\cos(\sqrt{3}t)$

٥٦- هل تعتبر الكمية الثابتة دالة دورية ؟ اشرح لماذا تكون دورية أو غير دورية ، وإذا كانت دورية فما هي الدورة الأساسية ؟

## طاقة الإشارة وقدرتها

٥٧- احسب طاقة الإشارة لكل من الإشارات التالية :

أ- $x(t)=2\text{rect}(-t)$

ب- $x(t)=\text{rect}(8t)$

ج- $x(t)=3\text{rect}(t/4)$

د- $x(t)=2\sin(200\pi t)$

ه- $x(t)=\delta(t)$

(تلميح : احسب طاقة الإشارة أولاً لإشارة تقترب من النبضة في نهاية معينة ، ثم احسب النهاية ).

و- $x(t)=d(rect(t))/dt$

ز- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(\lambda) d\lambda$

ح- $x(t)=e^{j100\pi t}$

٥٩- افترض إشارة x دورية بدورة أساسية $T_0=6$ ، وهذه الدالة موصوفة على الفترة الزمنية $0<t<6$ بالمعادلة التالية :

$Rect((t-2)/3)-4rect((t-4)/2)$

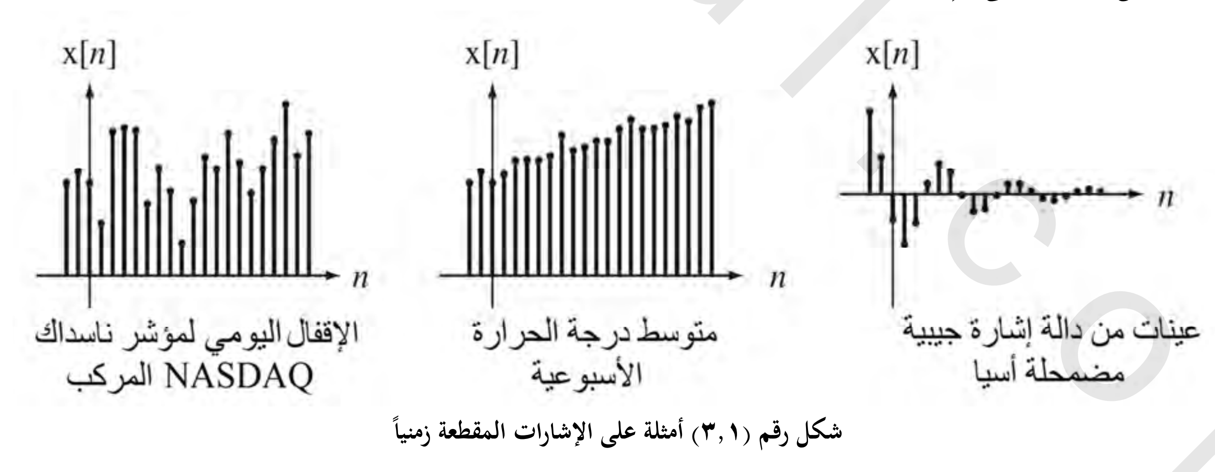
ماهي القدرة المتوسطة لهذه الإشارة ؟



# وصف الإشارات المقطعة زمنياً

## (٣,١) المقدمة والأهداف

في القرن العشرين تطورت ماكينات الحاسب من مرحلة طفولتها إلى الوضع الذي هي عليه هذه الأيام كجزء موجود في كل مكان ولا غنى عنه في المجتمع والاقتصاد. إن تأثير الحسابات الرقمية على الإشارات والأنظمة قد انتشرت بنفس الطريقة. العمليات اليومية التي كانت من قبل تنفذ عن طريق الأنظمة المستمرة زمنياً قد تم استبدالها بالأنظمة المقطعة زمنياً. هناك أنظمة تكون ضمنياً مقطعة زمنياً ولكن معظم تطبيقات معالجة الإشارات المقطعة زمنياً تكون على إشارات يتم توليدها عن طريق عيننة (أخذ عينات) الإشارات المستمرة زمنياً. شكل (٣.١) يبين بعض الأمثلة على الإشارات المقطعة زمنياً.




شكل رقم (٣,١) أمثلة على الإشارات المقطعة زمنياً

معظم الدوال والطرق المستخدمة لوصف الإشارات المستمرة زمنياً لها النظير المشابه جدا في وصف الإشارات المقطعة زمنياً. ولكن بعض العمليات على الإشارات المقطعة زمنياً تكون مختلفة أساسا، مما يسبب في

ظهور ظواهر لم تكن موجودة في تحليل الإشارات المستمرة زمنياً. الفارق الأساسي بين الإشارات المستمرة زمنياً والمقطعة زمنياً هي أن قيم الإشارة تكون قابلة للعد مع مرور الزمن في الإشارات المقطعة زمنياً، بينما الإشارات المستمرة زمنياً فلا يمكن عدها.

**أهداف الفصل**

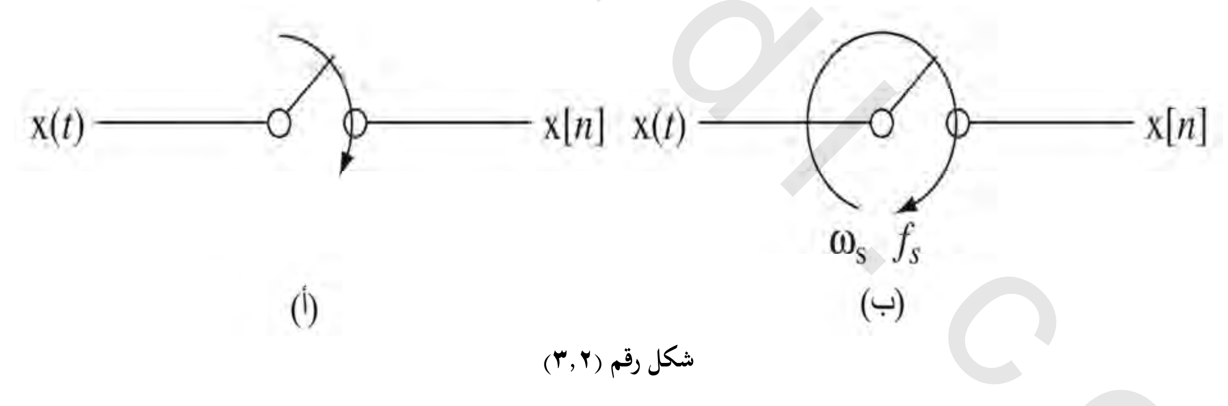
١- التعريف الحسابي لبعض الدوال التي يمكن استخدامها لوصف إشارات الزمن المقطع.

٢- تطوير طرق للإزاحة، والتحجيم وتجميع هذه الدوال للتعبير عن الإشارات العملية وتقدير لماذا تكون هذه العمليات مختلفة في الأزمنة المقطعة عنها في الأزمنة المستمرة.

٣- التعرف على نماذج وتماثلات معينة لتبسيط تحليل إشارات الزمن المقطع.

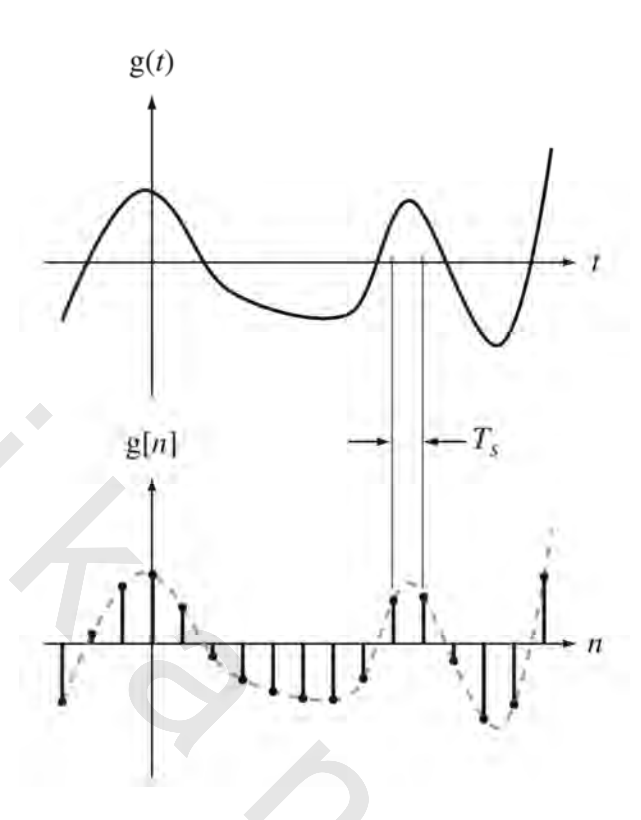
## (٣,٢) أخذ العينة (العيننة) والأزمنة المقطعة

تزداد أهمية دوال الزمن المقطع التي تصف إشارات هذا الزمن في تحليل الإشارات والأنظمة. من أشهر أمثلة إشارات الزمن المقطع هي هذه الإشارات التي يتم الحصول عليها عن طريق أخذ عينات من إشارات الزمن المستمر، الذي سنسميه العيننة. يقصد بالعيننة الحصول على قيم الإشارة المستمرة عند نقاط محددة، أو مقطعة في الزمن. أحد الطرق لرؤية العيننة يمكن أن تكون من خلال مثال إشارة جهد ومفتاح يستخدم كأداة عيننة مثالية كما في شكل (٣,٢أ).




**شكل رقم (٣,٢)**

يغلق المفتاح لفترة زمنية متناهية الصغر عند نقاط مقطعة في الزمن. هذه القيم من الإشارة المستمرة x(t) عند هذه الأزمنة المحددة هي التي يتم اعتبارها في الإشارة المقطعة زمنياً x[n]. إذا كان هناك زمن ثابت Ts بين العينات، فإن عملية العيننة تسمى العيننة المنتظمة، وهي التي تكون فيها أزمنة أخذ العينات مضاعفات صحيحة من فترة أخذ العينات، أو فترة العيننة Ts. زمن العينات nTs يمكن استبداله بالرقم الصحيح n الذي يشير إلى أو يحدد العينة كما في شكل (٣,٣).



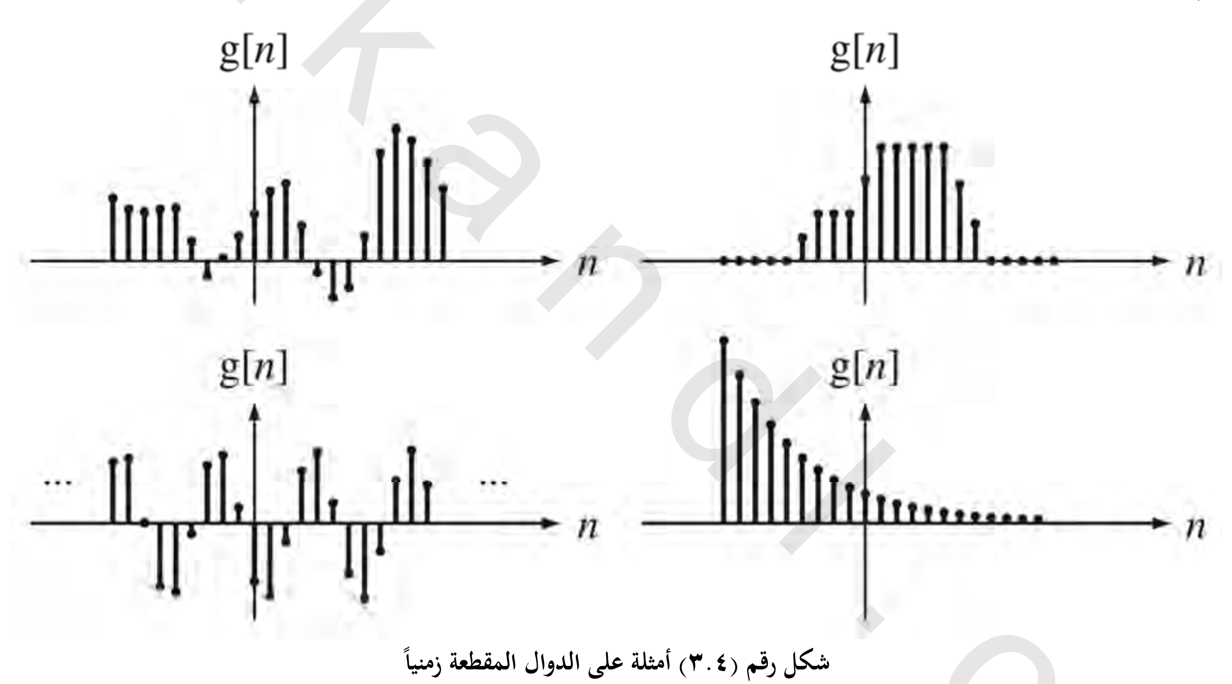

**شكل رقم (٣,٣) الحصول على إشارة متقطعة زمنياً عن طريق أخذ عينات من إشارة مستمرة زمنياً**

هذا النوع من العمليات يمكن النظر إليه عن طريق تصور أن المفتاح يدور ببساطة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها $f_s$ من الدورات في الثانية كما في شكل (٣,٢ب) حيث سيكون الزمن بين العينات هو $Ts=1/f_s=2\pi/w_s$. سنستخدم ترميزاً مبسطاً للدالة في الزمن المقطع وهو g[n] والتي يتم تكوينها عن طريق أخذ عينات عند نقاط معينة من الدالة المستمرة g(nTs) حيث n رقم صحيح. القوس المربع [.] الذي يحتوي المعاملات يبين الدالة المقطعة زمنياً، على العكس من القوس العادي (.) الذي يبين الدالة المستمرة زمنياً. المتغير المستقل n يسمى الزمن المقطع ؛ لأنه يشير إلى نقطة محددة في الزمن، على الرغم من أنه ليس له أبعاد، فليس له وحدات الثانية مثل المتغير t والمتغير Ts. حيث إن الدوال المقطعة زمنياً تكون محددة فقط عند قيم صحيحة n، فإن قيم التعبيرات مثل g[2.7] أو g[3/4] تكون غير محددة.

الدوال المعرفة للمعاملات المستمرة يمكن أيضاً تعريفها في معاملات مقطعة زمنياً مثل الدالة $\sin(2\pi f_0 nTs)$. يمكننا تكوين دالة مقطعة زمنياً من دالة مستمرة زمنياً عن طريق أخذ العينات، مثل، $g[n]= \sin(2\pi f_0 nTs)$. على ذلك، فإنه على الرغم من دالة الجيب تكون معرفة عند أي قيمة حقيقية للمعامل، فإن الدالة g[n] تكون معرفة

فقط عند القيم الصحيحة n. معنى ذلك أن قيمة الدالة g[7.8] تكون غير محددة على الرغم من أن $\sin(2\pi f_0(7.8)Ts)$ تكون محددة.

من أهم الأمثلة على أنظمة الزمن المقطع في التدريبات الهندسية، ماكينات الأحوال التتابعية، والمثال الأكثر شيوعاً على ذلك هو الحاسب. تعمل الحاسبات عن طريق نبضات التزامن clock، التي هي مذبذب ثابت التردد. المذبذب يولد نبضات عند فترات زمنية منتظمة، وعند نهاية كل نبضة تزامن، فإن الحاسب يقوم بتنفيذ أمر معين ويتغير من حالة منطقية معينة للحالة التالية. لقد أصبح الحاسب أداة في غاية الأهمية في كل أطوار الاقتصاد الحديث، ولذلك فإن فهم كيف تتم معالجة الإشارات المقطعة زمنياً عن طريق الماكينات التتابعية سيكون غاية في الأهمية وبالذات بالنسبة للمهندسين. شكل (٣،٤) يوضح بعض الدوال المقطعة زمنياً التي يمكنها أن تصف الإشارات المقطعة زمنياً.




**شكل رقم (٣.٤) أمثلة على الدوال المقطعة زمنياً**

نوع المخطط المستخدم في شكل (٣،٤) يسمى رسم القضبان، أو مخطط القضبان stem plot و الذي تحدد فيه النقطة قيمة الدالة والقضيب، أو الخط يصل في العادة بين النقطة والقيمة المحددة على محور الزمن المقطع n، وهذه طريقة تستخدم بكثرة في رسم دوال الزمن المقطع. يوجد في ماتلاب الأمر stem الذي يعطي هذه المخططات.

إن استخدام ماتلاب في رسم المخططات يعتبر مثالاً على العينة. يستطيع ماتلاب التعامل فقط مع المتجهات المحددة الطول، لذلك فإنه لرسم دالة مستمرة زمنياً يجب أن نحدد كم عدد النقاط التي يجب وضعها في

متجه الزمن بحيث عندما يقوم ماتلاب برسم خطوط مستقيمة بين قيم الدالة عند هذه الأزمنة، فإن الرسم، أو المخطط يبدو كما لو كان دالة مستمرة زمنياً. ستتم دراسة العينة بعمق وتفاصيل أكثر في الفصل ١٠.

## (٣،٣) دوال الجيب والأسس

الدوال الجيبية والأسية تكون مهمة في تحليل الإشارات والأنظمة المقطعة زمنياً كما هي مهمة في تحليل الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً. معظم الأنظمة المقطعة زمنياً يمكن وصفها، على الأقل تقريبياً، عن طريق المعادلات الفرقية. الدالة المميزة للمعادلات الفرقية الخطية العادية، ذات المعاملات الثابتة تكون أسية مركبة، والأس الحقيقي يكون حالة خاصة من الأس المركب، وأي جيب يكون عبارة عن تجميع خطي من الأسس المركبة.
الدوال الأسية والجيبية المتقطعة زمنياً يمكن تحديدها بطريقة مماثلة لنظيراتها المستمرة زمنياً كما يلي :

$g[n]=Ae^{\beta n}$ أو $g[n]=Az^{n}$ حيث $z=e^{\beta}$،

و

$g[n]=A\cos(2\pi F_0 n+\theta)$ أو $g[n]=A\cos(\Omega_0 n+\theta)$

حيث كل من z و β تكون ثوابت مركبة، و A ثابت حقيقي، و θ إزاحة زاوية حقيقية بالراديان، و $F_0$ رقم حقيقي، $\Omega_0=2\pi F_0$، و n هي الزمن المتقطع.

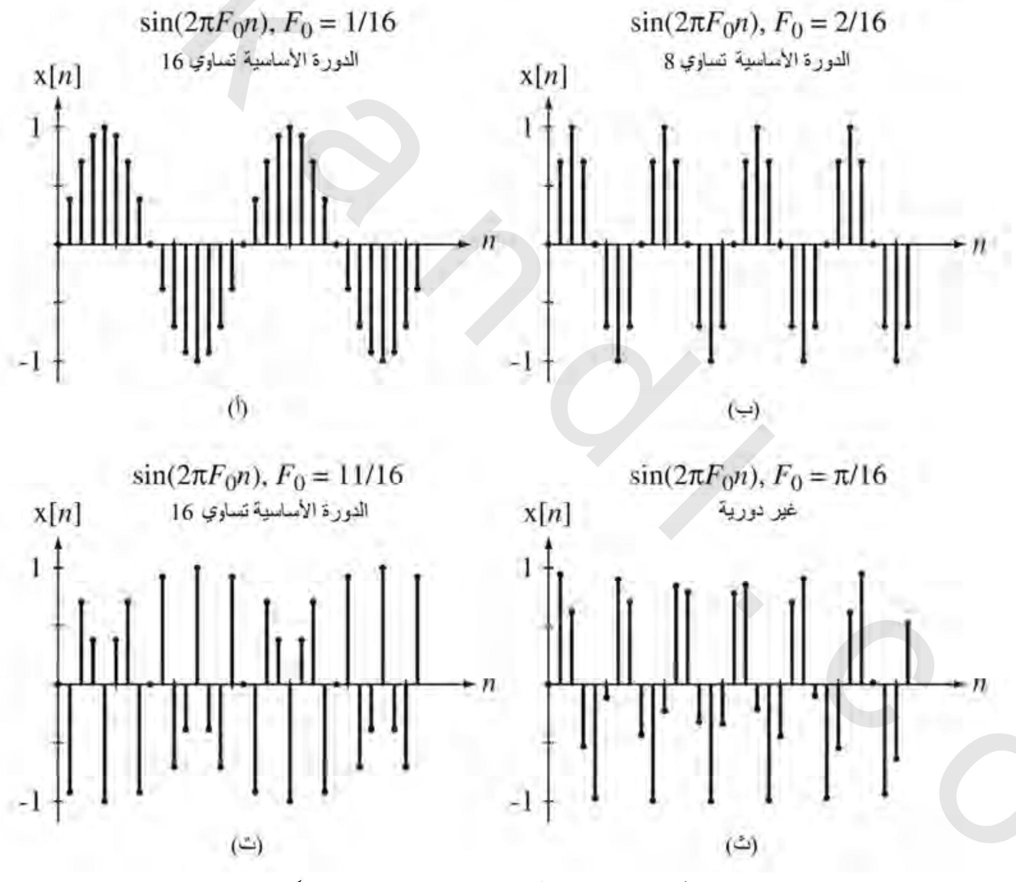
### الدوال الجيبية أو الجيوب

هناك بعض الفروق المهمة بين الدوال الجيبية المستمرة زمنياً والمتقطعة زمنياً. واحدٌ من هذه الفروق هو أننا إذا ولدّنا دالة جيبية متقطعة زمنياً عن طريق أخذ عينات من دالة جيبية مستمرة زمنياً، فإن دورة الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً من الممكن أن تكون غير تامة الوضوح، وفي الحقيقة، فإن الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً من الممكن ألا تكون دورية أصلاً. افترض الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً $g[n]=A\cos(2\pi F_0 n+\theta)$ المرتبطة بالدالة الجيبية المستمرة زمنياً $g(t)= A\cos(2\pi f_0 n+\theta)$ من خلال أن $g[n]=g[nTs]$، فإن $F_0=f_0Ts=f_0/f_s$ حيث $f_s=1/Ts$ هي معدل أخذ العينات. المطلوب لكي تكون الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً دورية أن يكون، لبعض الزمن المتقطع n، والرقم الصحيح m، يكون $2\pi F_0 n=2\pi m$. من ذلك نحصل على $F_0=m/n$ مما يوضح أن $F_0$ يجب أن تكون رقماً نسبياً (نسبة بين رقمين صحيحين). حيث إن عملية العينة تؤدي إلى العلاقة $F_0=f_0/f_s$ فإن ذلك يعني أيضاً أنه لكي تكون الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً دورية، فإن نسبة التردد الأساسي للدالة الجيبية المستمرة إلى معدل أخذ العينات يجب أن تكون نسبة بين رقمين صحيحين. ما هي الدورة الأساسية للدالة الجيبية التالية :

$$g[n] = 4cos\left(\frac{72\pi n}{19}\right) = 4\cos\left(2\pi\left(\frac{36}{19}\right)n\right) \ ?$$

ستكون $F_0$ تساوي 36/19 وسيكون أقل زمن متقطع n الذي يعطي $F_0n=m$ هو n=19 حيث m رقم صحيح. وعلى ذلك فإن الدورة الأساسية ستكون 19. إذا كانت $F_0$ رقم نسبي ويمكن التعبير عنها كنسبة بين رقمين صحيحين $F_0=q/N_0$، وإذا تم اختصار هذا الكسر، أو النسبة إلى أبسط صورة له عن طريق القسمة على المعاملات المشتركة في البسط والمقام، فإن الدورة الأساسية ستكون $N_0$ وليست $(1/F_0)=N_0/q$ إلا إذا كانت q=1. قارن هذه النتيجة مع الدورة الأساسية للدالة الجيبية المستمرة زمنياً $g(t)=4\cos(72\pi t/19)$، والتي دورتها الأساسية $T_0$ تساوي 19/36، وليست 19. شكل (٣،٥) يوضح بعض الدوال الجيبية المتقطعة زمنياً.

عندما تكون $F_0$ ليست مقلوب رقم صحيح، فإن الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً قد لا يمكن التعرف عليها مباشرة كدالة جيبية من رسمها، وهذه هي الحالة الموجودة في شكلي (٣،٥ت و ث). الدالة الجيبية في شكل (٣،٥ث) غير دورية.




**شكل رقم (٣،٥) أربع دوال جيبية متقطعة زمنياً**

هناك مصدر للالتباس بالنسبة للطلاب عندما يواجهون دالة جيبية متقطعة زمنياً على الصورة $A\cos(2\pi F_0 n)$ أو $A\cos(\Omega_0 t)$ هي السؤال التالي: "ما هي $F_0$ و $\Omega_0$؟". في الدوال الجيبية المستمرة زمنياً $A\cos(2\pi f_0 t)$ و $A\cos(w_0 t)$،

فإن $f_0$ تكون التردد الدوري بالهرتز، أو دورة /الثانية و $\omega_0$ هي التردد الزاوي بالراديان/الثانية. معامل جيب التمام cosine يجب ألا تكون له أبعاد وحاصل الضرب $2\pi f_0 t$ و $\omega_0 t$ ليست لها أبعاد لأن كل من الدورة والراديان عبارة عن نسب من الأطوال والثواني ($second^{-1}$) في $f_0$ أو إلغاء $\omega_0$. الطريقة بنفسها فإن المعاملات $2\pi F_0 n$ و $\Omega_0 n$ يجب ألا يكون لها أبعاد أيضاً. يجب أن نتذكر أن n ليس لها وحدات الثانية. على الرغم من تسميتها بالزمن المتقطع، فإنها في الحقيقة مؤشر للزمن، ولا تمثل زمناً. إذا فكرنا في n على أنها مؤشر للعينات، فإن n=3 مثلاً تعني العينة الثالثة المأخوذة بعد الزمن المتقطع n=0. وعلى ذلك فإننا يمكننا أن نفكر في n على أن لها وحدات العينات. لذلك فإن $F_0$ تكون وحداتها هي دورة/عينة حتى تكون الكمية $2\pi F_0 n$ ليس لها أبعاد، وأيضاً $\Omega_0$ ستكون وحداتها راديان/عينة لكي تكون الكمية $\Omega_0 n$ ليست لها أبعاد. إذا أخذنا عينات من دالة الجيب المستمرة زمنياً $A\cos(2\pi f_0 t)$ التي لها دورة أساسية $f_0$ دورة /الثانية، فإن الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً ستكون :

$$A\cos(2\pi f_0 nT_s)=A\cos(2\pi n f_0/f_s)=A\cos(2\pi F_0 n)$$

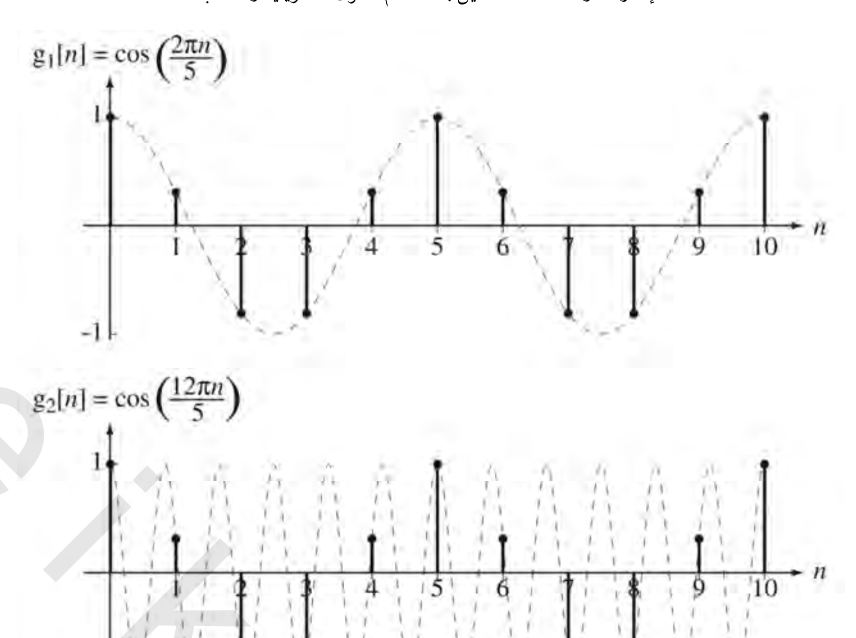
وستكون $F_0=f_0/f_s$ وستكون الوحدات متناسبة.

$$F_0 \ in\ cycles/sample = \frac{f_0 \ in\ cycles/second}{f_s \ in\ samples/second}$$

وعلى ذلك فإن $F_0$ عبارة عن تردد دوري مطبعة على معدل العينة. الطريقة بنفسها $\Omega_0= \omega_0/f_s$ تصبح راديان زاوي مطبع على التردد الزاوي بوحدات الراديان/العينة أو radian/sample

$$\Omega_0 \ in\ radian/sample = \frac{w_0 \ in\ radians/second}{f_s \ in\ samples/second}$$

جانب آخر واحد في الدوال الجيبية المقطعة زمنياً و الذي سيكون مهماً جداً في الفصل ١٠ عند اعتبار عملية العينة هو أن أي دالتين جيبيتين مقطعتين زمنياً $g_1[n]=A\cos(2\pi F_1 n+\theta)$ و $g_2[n]=A\cos(2\pi F_2 n+\theta)$ من الممكن أن يكونا متطابقتين حتى ولو كانت $F_1$ و $F_2$ مختلفتين. فمثلاً، نجد الدالتين الجيبيتين $g_1[n]=A\cos(2\pi n/5)$ ، $g_2[n]=A\cos(12\pi n/5)$ يمكن وصفهما بتعبيرات مختلفة كما رأينا، ولكن عند رسمهما مع الزمن المقطع n سنرى أنهما متماثلتان كما في شكل (٣.٦).




**شكل رقم (٣,٦) دالتان جيبيتان لهما Fs مختلفة ولكن لهما نفس السلوك الوك الوظيفي**

الخطوط المتقطعة، أو المشرطة في شكل (٣,٦) تمثل الدوال المستمرة زمنياً $g_1[n]=A\cos(2\pi n/5)$ و $g_2[n]=A\cos(12\pi n/5)$، حيث n و t مرتبطان بالعلاقة $t=nT_s$. من الواضح أن الدالتين المستمرتين مختلفتان، ولكن الدالتين المتقطعتين منطبقتان. السبب في أن الدالتين المتقطعتين منطبقتان يمكن رؤيته عن طريق إعادة كتابة $g_2[n]$ على الصورة التالية :

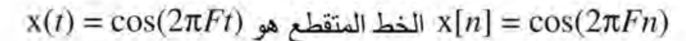
$$g_2[n] = cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{10\pi}{5}n\right) = cos\left(\frac{2\pi}{5}n + 2\pi n\right)$$

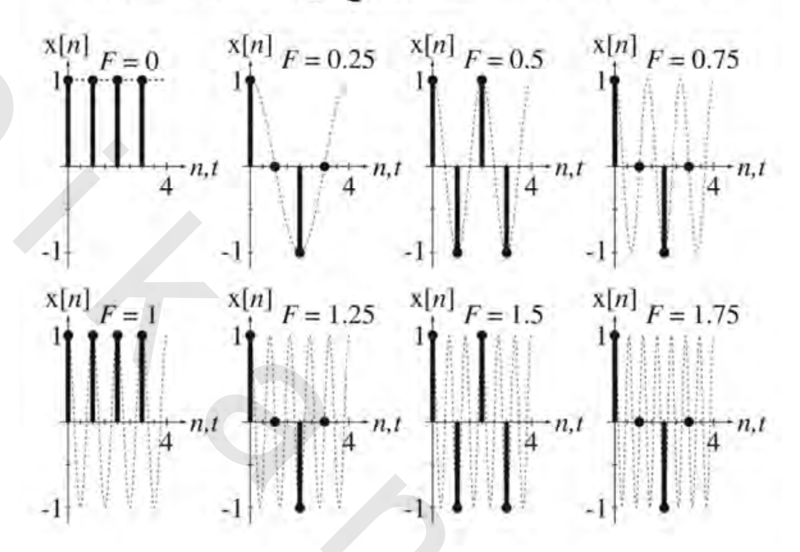
وعلى ذلك يمكن استخدام حقيقة أن إضافة أي مضاعف صحيح للـ $2\pi$ لزاوية الدالة الجيبية، فإن قيمة الدالة لا تتغير. وعلى ذلك يمكن كتابة ما يلي :

$$g_2[n] = cos\left(\frac{2\pi}{5}n + 2\pi n\right) = cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) = g_1[n]$$

حيث إن الزمن المتغير n رقم صحيح. وحيث إن الترددين في الدالتين المقطعتين زمنياً في هذا المثال هما $F_1=1/5$ و $F_2=6/5$، وهذا يعني أنهما متكافئان كترددات في دالة جيبية متقطعة زمنياً. إن ذلك يمكن رؤيته عن طريق إدراك أنه عند التردد 1/5 cycles/sample فإن التغير الزاوي لكل عينة يساوي $2\pi/5$، وعند التردد 6/5 cycles/samples فإن التغير الزاوي لكل عينة يساوي $12\pi/5$. كما نرى فإن هاتين الزاويتين تعطيان القيم نفسها تماماً كمعاملات لدالة جيبية. وعلى ذلك ففي الدالة الجيبية المقطعة زمنياً على الصورة $\cos(2\pi F_0 n+\theta)$، فإنه بتغيير $F_0$ عن طريق إضافة رقم صحيح، فإن الدالة الجيبية لا تتغير. الطريقة بنفسها ، فإنه في دالة جيبية مقطعة زمنياً على الصورة $\cos(\Omega_0 n+\theta)$، فإنه

بتغيير $\Omega_0$ عن طريق إضافة مضاعفات صحيحة لـ $2\pi$، فإن الدالة الجيبية لا تتغير. من الممكن أن نتصور تجربة يمكن فيها توليد دالة جيبية على الصورة $\sin(2\pi Fn)$ وتكون فيها F متغيرة. مع تغير F بخطوات مقدارها 0.25 من 0 حتى 1.75، فإننا سنحصل على تتابع من الدوال المقطعة زمنياً كالموضحة في شكل (٣,٧). أي دالتين مقطعتين زمنياً تختلف تردداتهما برقم صحيح تكونان متطابقيان.



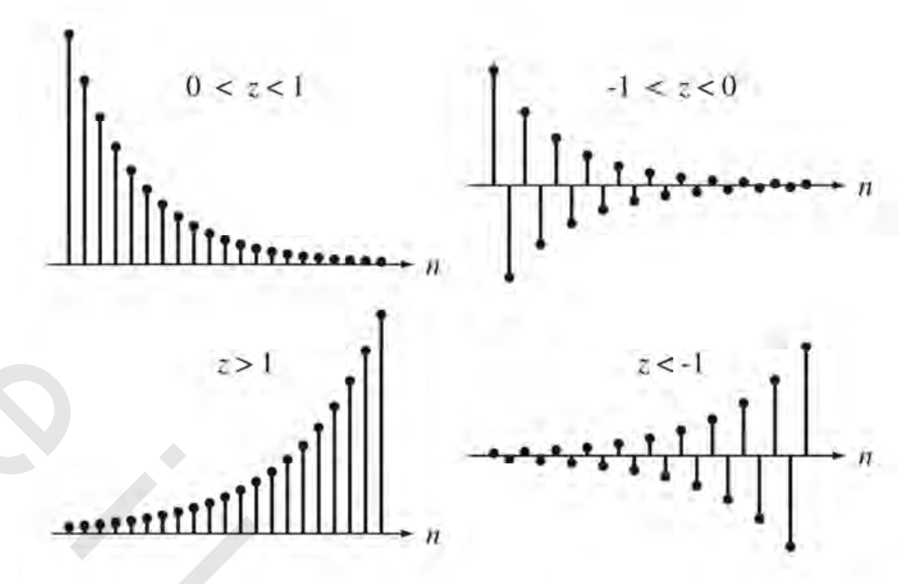




**شكل رقم (٣,٧) يوضح أن أي دالة جيبية مقطعة زمنياً بتردد F تتكرر كل مرة تتغير F بمقدار واحد**

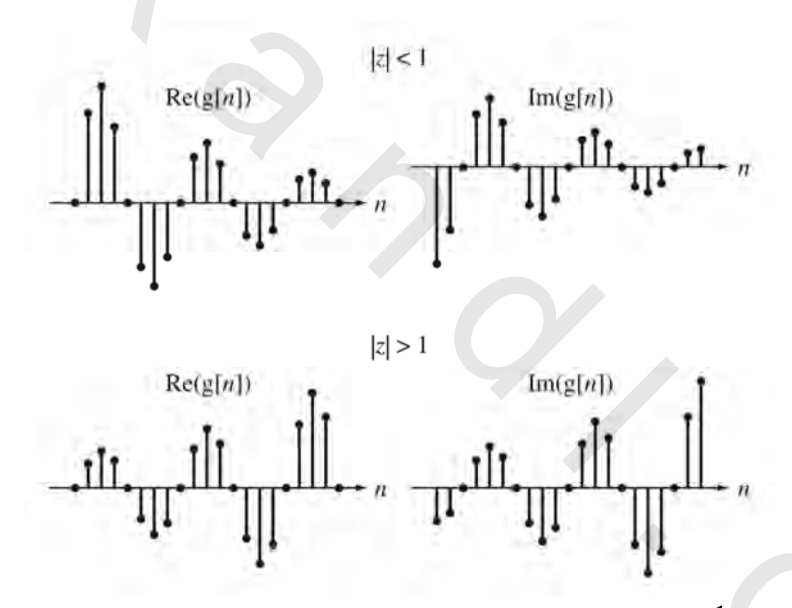
**الدوال الأسية**

الطريقة الأكثر شيوعا في كتابة الدالة الأسية المتقطعة زمنياً تكون على الصورة $g[n]=Az^n$. إن هذه لا تبدو مثل الدالة الأسية المستمرة زمنياً، التي تكون على الصورة $g(t)=Ae^{\beta t}$، حيث إنه لا توجد "e"، ولكنها ما زالت دالة أسية حيث إن $g[n]=Az^n$ كان من الممكن كتابتها على الصورة $g[n]=Ae^{\beta n}$ حيث $z=e^{\beta}$. الصورة $Az^n$ تكون أقل بساطة ومفضلة عموما.

الدوال الأسية المقطعة زمنياً يمكن أن يكون لها العديد من السلوك الوظيفي اعتماداً على قيمة z في $g[n]=Az^n$. شكل (٣,٨) وشكل (٣,٩) يلخصان الشكل الوظيفي للدالة الأسية لقيم مختلفة للمتغير z.




**شكل (٣,٨) سلوك الدالة g[n]=Azn عند قيم مختلفة للمتغير z الحقيقي**




**شكل رقم (٣,٩) سلوك الدالة g[n]=Azn عند قيم مختلفة للمتغير z المركب**

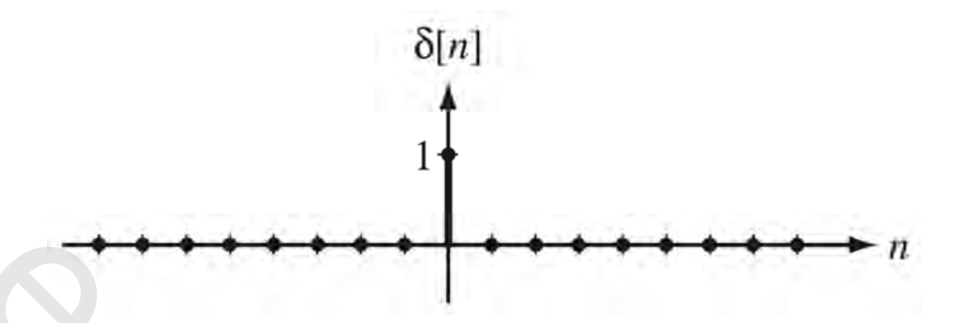
## (٣,٤) الدوال المتفردة

هناك مجموعة من الدوال المقطعة زمنياً المماثلة للدوال المتفردة المستمرة زمنياً ولها استخدامات مشابهة.

**دالة وحدة النبضة**

دالة وحدة النبضة (تسمى أحياناً بدالة وحدة العينة) الموضحة في شكل (٣,١٠) يتم تعريفها كما يلي :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٣,١)




**شكل رقم (٣,١٠) دالة وحدة النبضة**

دالة وحدة النبضة المقطعة زمنياً تعاني من عدم وجود الخصائص المميزة الموجودة في وحدة النبضة المستمرة زمنياً. دالة وحدة النبضة المقطعة زمنياً ليس لها خاصية مقابلة لخاصية التحجيم في وحدة النبضة المستمرة زمنياً. لذلك فإن δ[n]=δ[an] لأي قيمة صحيحة، لا تساوي صفراً، ومحددة للمتغير a. ولكن دالة وحدة النبضة المقطعة زمنياً بالتأكيد لها خاصية العيننة. هذه الخاصية هي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A\delta[n-n_0]x[n] = Ax[n_0]$$ المعادلة رقم (٣,٢)

حيث أن النبضة لا تساوي صفراً فقط حيثما تكون معاملاتها لا تساوي الصفر، فإن المجموع على كل قيم n سيكون مجموع على عناصر كلها أصفراً فيما عدا عند $n=n_0$. عندما تكون $n=n_0$ فإن $x[n]=x[n_0]$، وسيتم ضرب النتيجة ببساطة في الكمية القياسية A. هناك اسم بديل شائع لهذه الدالة وهو دالة كرونيكر Kronecker delta function.
لا توجد دالة ماتلاب للنبضة المستمرة الزمن، ولكننا يمكننا عمل واحدة للنبضات المقطعة زمنياً كما يلي :

```
دالة للحصول على دالة النبضة المقطعة زمنياً والمعرفة على أنها تساوي واحداً %
عندما تكون المعاملات تساوي صفراً، وتساوي الصفر فيما عدا ذلك. %
إنها تعطي "NAN" لأي معاملات لا تكون رقماً صحيحاً %
%
% function y = impD(n)
%
function y = impD(n)
y = double(n == 0); % ستكون النبضة تساوي واحداً عندما تكون المعاملات
% تساوي صفراً وستكون صفراً فيما عدا ذلك
I = find(round(n) ~= n); % n يشير إلى القيم غير الصحيحة للمتغير
```

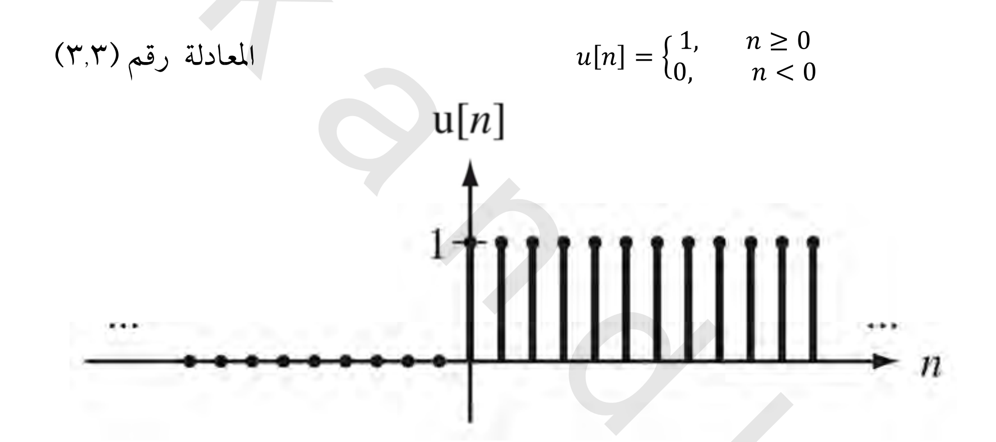
```
y(I) = NaN;                % "NAN" وضع هذه القيم الراجعة تساوي
```

هذه الدالة في ماتلاب تعطي السلوك الوظيفي للصدمة δ[n] بما في ذلك أنها سترجع القيمة غير المحددة "NAN" في حالة أن تكون المعاملات لا تساوي صفراً. "D" في نهاية اسم الدالة تبين أنها دالة مقطعة Discrete زمنياً. لا يمكننا استخدام القوس المربع المتعارف عليه في ماتلاب للدلالة على الدالة المقطعة زمنياً لأن هذه الأقواس يكون لها دلالة أخرى في ماتلاب.

**دالة وحدة التتابع**

الدالة المتقطعة زمنياً المقابلة لدالة الخطوة المستمرة زمنياً هي دالة وحدة التتابع الموضحة في شكل (٣،١١).

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٣،٣)




**شكل رقم (٣،١١) دالة وحدة التتابع**

بالنسبة لهذه الدالة فليس هناك أي عدم توافق، أو التباس حول قيمتها عند n=0. إنها تساوي واحداً، والكل يتوافق على ذلك.

```
% دالة وحدة التتابع التي تساوي صفراً لقيم المعاملات الصحيحة الأقل من الصفر
% وتساوي واحداً لقيم المعاملات الصحيحة الأكبر من أو تساوي صفراً
% إنها تعطي القيمة "NAN" للمعاملات غير الصحيحة
%
% function y = usD(n)
%
function y = usD(n)
y = double(n >= 0);        % وضع الخرج يساوي واحداً للمعاملات غير السالبة
```

I = find(round(n) ~= n);   % الإشارة للقيم غير الصحيحة

y(I) = NaN ;   % وضع الخرج يساوي "NAN" في هذه الحالة

**دالة الإشارة signum**

الدالة المتقطعة زمنياً والمقابلة لدالة الإشارة المستمرة زمنياً يتم تعريفها كما يلي وكما هو موضح في شكل (٣,١٢).

$$sgn[n] = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٣,٤)

دالة الإشارة تعرف على أنها تساوي 1. عندما تكون قيم معاملاتها الصحيحة أقل من الصفر %

وتساوي1 عندما تكون معاملاتها الصحيحة أكبر من الصفر %

وتساوي صفراً عندما تكون قيم معاملاتها تساوي صفر %

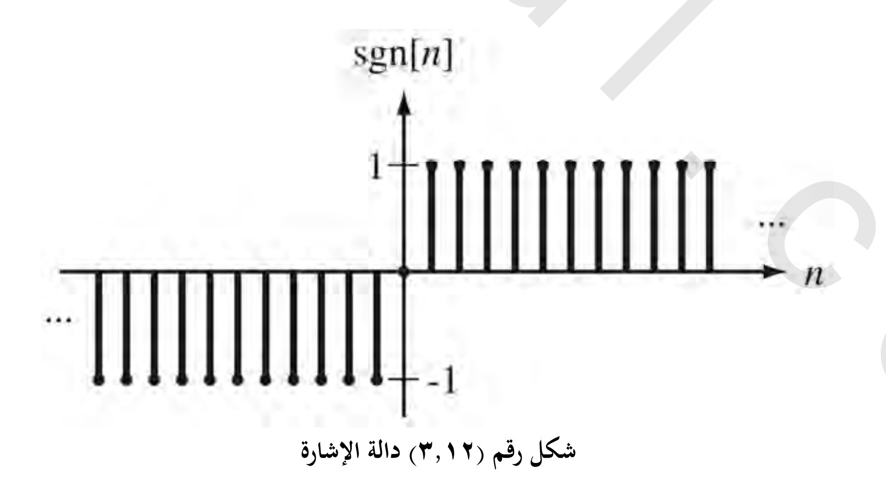
وتعطي"NaN" عندما تكون معاملاتها ليست أرقاماً صحيحة %

```
%
% function y = signD(n)
Function  y = signD(n)
```

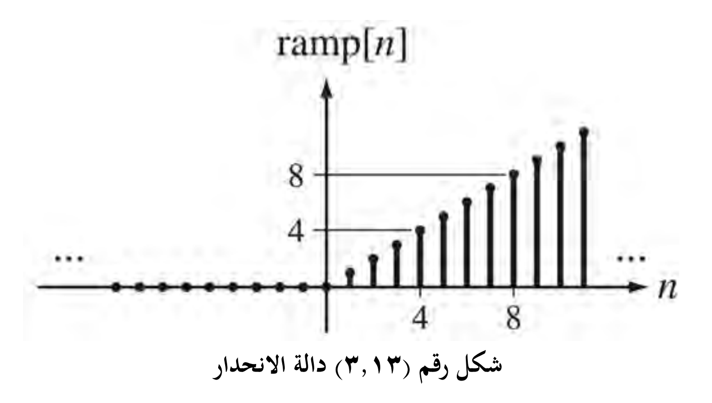
y = sign(n);   % استخدام دالة الإشارة الضمنية في ماتلاب

I = find(round(n) ~= n);   % n إشارة للقيم غير الصحيحة

y(I)=NaN;   % وضع الخرج يساوي "NaN" في هذه الحالة




شكل رقم (٣,١٢) دالة الإشارة



**شكل رقم (٣,١٣) دالة الانحدار**

**دالة الانحدار**

الدالة المتقطعة زمنياً والمقابلة لدالة الانحدار المستمرة زمنياً تعرّف كما يلي، وكما هو موضح في شكل (٣,١٣).

$$ramp[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad = nu[n]$$ المعادلة رقم (٣,٥)

%دالة الانحدار المتقطعة زمنياً تعرّف بأنها تساوي صفراً عندما تكون قيم معاملاتها الصحيحة أقل من، أو تساوي صفر، وتساوي "n" عندما تكون قيم المعاملات أكبر من أو تساوي الصفر %

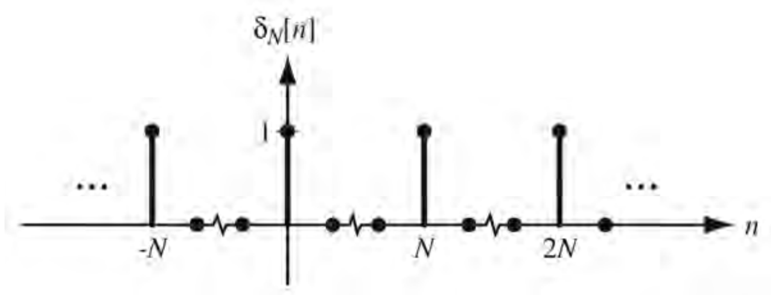
وتعطي "NaN" عندما تكون معاملاتها ليست أرقاماً صحيحة %

```
%
% function y = rampD(n)
function y = rampD(n)
y = ramp(n); %  استخدام دالة الانحدار الضمنية في ماتلاب
I = find(round(n) ~= n);   % n  إشارة للقيم غير الصحيحة
y(I)=NaN;                  % وضع الخرج يساوي "NaN" في هذه الحالة
```

**دالة النبضة الدورية أو قطار النبضات**

دالة النبضة الدورية أو قطار النبضات المتقطعة زمنياً تعرف كما يلي وكما هو موضح في شكل (٣,١٤).

$$\delta_N[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$$ المعادلة رقم (٣,٦)



**شكل رقم (٣,١٤) دالة النبضة الدورية**

عندما تكون معاملاتها الصحيحة % 1 دالة النبضة الدورية المتقطعة زمنياً تساوي مضاعفات الرقم الصحيح% N
""، وتساوي صفراً فيما عدا ذلك
إنها تعطي "NaN" لقيم المعاملات الصحيحة السالبة %

```
%
% function y = impND(N,n)
function y = impND(N,n)
if N == round(N) & N > 0,
y = double(n/N == round(n/N)); % وضع قيم الدالة تساوي واحداً عند
% N كل قيم "n" التي تكون مضاعفات صحيحة لـ
I = find(round(n) ~= n);          % n إشارة للقيم غير الصحيحة
y(I)=NaN;        % وضع الخرج يساوي "NaN" في هذه الحالة %
else
y=NaN*n;    %  "NaN" تعود بمتجه من القيم غير المحددة
disp('In impND, the period parameter N is not a positive integer');
end
```

دوال الإشارات المتقطعة زمنياً الجديدة تم تلخيصها وعرضها في الجدول (٣،١)

**جدول رقم ٣،١ – ملخص لدوال الإشارات المقطعة زمنياً**

| **الجيب** | **$\sin(2\pi F_0 n)$** | عينات من دالة مستمرة زمنياً |
|---|---|---|
| جيب التمام | $\cos(2\pi F_0 n)$ | عينات من دالة مستمرة زمنياً |
| الأس | $Z^n$ | عينات من دالة مستمرة زمنياً |
| التتابع | U[n] | ضمنيا تكون متقطعة زمنياً |
| الإشارة | sgn[n] | ضمنيا تكون متقطعة زمنياً |
| الانحدار | Ramp[n] | ضمنيا تكون متقطعة زمنياً |
| النبضة | $\delta[n]$ | ضمنيا تكون متقطعة زمنياً |
| النبضة الدورية | $\delta_N[n]$ | ضمنيا تكون متقطعة زمنياً |

## (٣،٥) الإزاحة والتحجيم

الأساسيات العامة التي تحكم التحجيم والإزاحة في الدوال المستمرة زمنياً يمكن تطبيقها أيضاً في حالة الدوال المتقطعة زمنياً، ولكن مع بعض الفروق الفروق المهمة الناتجة من الفروق الأساسية بين الأزمنة المستمرة والأزمنة المتقطعة. تماماً مثلما يحدث في الدوال المستمرة زمنياً، فإن الدوال المتقطع زمنياً تقبل أرقاماً وتعطي أرقاماً

أخرى. إن الأساس العام بأن التعبير expression في الدالة g[expression] تتم معاملته تماماً بالطريقة نفسها التي تعامل بها n في التعريف g[n].

### تحجيم المقدار

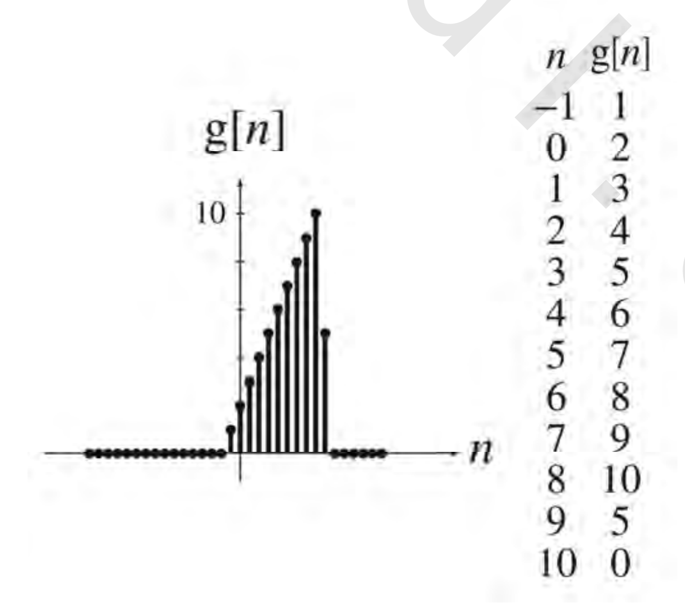
إن تحجيم المقدار بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً لايزال هو نفسه تماماً مثلما في الدوال المستمرة زمنياً.

### الإزاحة الزمنية

لنفترض الدالة g[n] المعرفة كما في الرسم والجدول الموضحين في شكل (٣,١٥)، ثم دع n→n+3. إن الإزاحة الزمنية هي نفسها تماماً في الدوال المتقطعة والدوال المستمرة زمنياً، فيما عدا أن الإزاحة الزمنية يجب أن تكون صحيحة، وإلا فإن إزاحة الدالة سوف يعطي قيماً غير معرفة كما في شكل (٣,١٦).

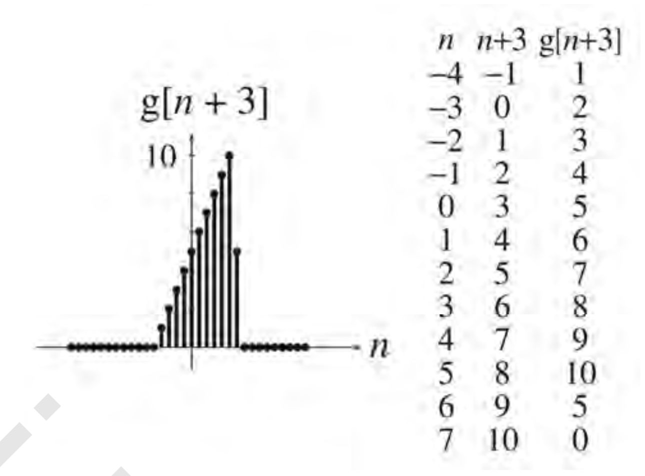
### التحجيم الزمني

تحجيم المقدار والإزاحة الزمنية في كل من الدوال المتقطعة والمستمرة زمنياً متشابهان بدرجة كبيرة جداً. إن ذلك ليس حقيقياً عند فحص أو التعامل مع التحجيم الزمني في الدوال المتقطعة. هناك حالتان يجب فحصهما وهما: حالة الانضغاط الزمني، وحالة الامتداد أو الانفراج الزمني.




| $n$ | g[$n$] |
|---|---|
| −1 | 1 |
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 5 |
| 4 | 6 |
| 5 | 7 |
| 6 | 8 |
| 7 | 9 |
| 8 | 10 |
| 9 | 5 |
| 10 | 0 |

**شكل رقم (٣,١٥) تعريف تخطيطي لدالة g[n]، حيث g[n]=0 لكل قيم n التي تحقق |n|≥15**




| n | n+3 | g[n+3] |
|---|---|---|
| −4 | −1 | 1 |
| −3 | 0 | 2 |
| −2 | 1 | 3 |
| −1 | 2 | 4 |
| 0 | 3 | 5 |
| 1 | 4 | 6 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 6 | 8 |
| 4 | 7 | 9 |
| 5 | 8 | 10 |
| 6 | 9 | 5 |
| 7 | 10 | 0 |

**شكل رقم (٣,١٦) رسم الدالة g[n+3] الذي يوضح الإزاحة الزمنية**

**الانضغاط الزمني**

يتم الحصول على الانضغاط الزمني عن طريق تحجيم زمني على الصورة $n \to Kn$ حيث $|K|>1$، و K تكون رقما صحيحا. الانضغاط الزمني في الدوال المتقطعة زمنياً يكون مشابهاً للانضغاط الزمني في حالة الدوال المستمرة زمنياً حيث تبدو الدالة كما لو كانت تحدث في زمن أسرع. ولكن في حالة الدوال المتقطعة زمنياً يكون هناك تأثير آخر يدعى التقسيم، أو الانتهاء. افترض التحجيم الزمني $n \to 2n$ الموضح في شكل (٣,١٧).

لكل قيمة n في g[2n]، فإن القيمة 2n يجب أن تكون رقماً صحيحاً زوجياً. لذلك فإنه لهذا التحجيم بالمعامل 2، فإن قيم الدالة g[n] المشار إليها بالأرقام n الفردية لن تظهر ولن تكون لها قيم مناظرة في الدالة g[2n]. إننا نقول إن الدالة قد قسمت بمعامل تقسيم 2؛ لأن المخطط في g[2n] سيستخدم نقطة من g[n] ويترك نقطة. بالنسبة لثوابت التقسيم الأعلى؛ فإن معامل التقسيم أو الإقصاء سيكون بالتأكيد أعلى. هذا التأثير التقسيمي، أو الإقصائي لا يحدث في حالة تحجيم الدوال المستمرة زمنياً لأنه عند استخدام التحجيم $t \to Kt$، فإن كل قيم t الحقيقية تنتقل لما يناظرها في قيم Kt الحقيقية بدون فقد أو غياب أي قيمة. الفرق الأساسي بين الدوال المستمرة والدوال المتقطعة زمنياً هو أن مجال عمل الدوال المستمرة زمنياً هو الأرقام الصحيحة، أي عدد لا نهائي لا يمكن عده من الأزمنة، بينما يكون مجال العمل في الدوال المتقطعة زمنياً هو كل الأرقام الصحيحة، وهو عدد لا نهائي من الأزمنة التي يمكن عدها، أو إحصاؤها.

**الامتداد أو الانفراج الزمني**

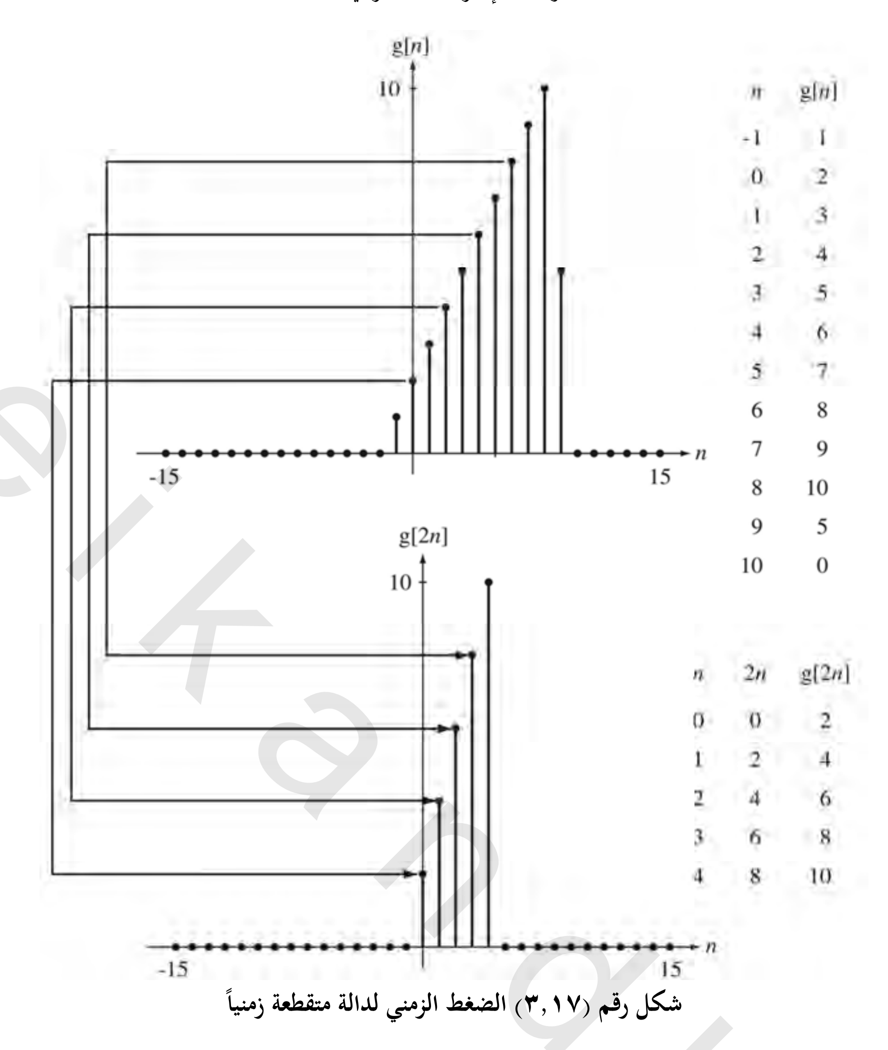
الحالة الأخرى للتحجيم الزمني، هي الامتداد الزمني، وهي أغرب حتى من الانضغاط الزمني. إذا أردنا أن نرسم مثلاً قيمة الدالة g[n/2]، عند كل قيمة صحيحة للمتغير n فإننا يجب نحدد قيمة للدالة عند g[n/2] عن طريق

إيجاد هذه القيمة في التعريف الأساسي للدالة. ولكن عندما تكون n تساوي واحداً ، فإن n/2 ستكون نصفاً ونحن نعرف أن الدالة g[1/2] تكون غير معرفة. إن قيمة الدالة المحجمة زمنياً g[n/K] تكون غير معرفة إلا إذا كانت n/K تساوي رقماً صحيحاً. إننا يمكن أن نترك هذه القيم غير معرفة أو يمكننا استيفاء أو استقراء هذه القيم باستخدام قيم الدالة g[n/k] عند قيم n الأعلى أو الأقل التي تكون عندها القيمة n/K رقماً صحيحاً. (الاستيفاء ، أو الاستقراء هو عملية لحساب قيم دالة بين قمتين معلومتين تبعا لمعادلة معينة للاستقراء). حيث إن عملية الاستقراء تطرح سؤالا عن أي معادلة سيتم استخدامها في هذه العملية ، فإننا ببساطة سنترك قيمة الدالة g[nK] غير معرفة عندما تكون القيمة n/K غير صحيحة.

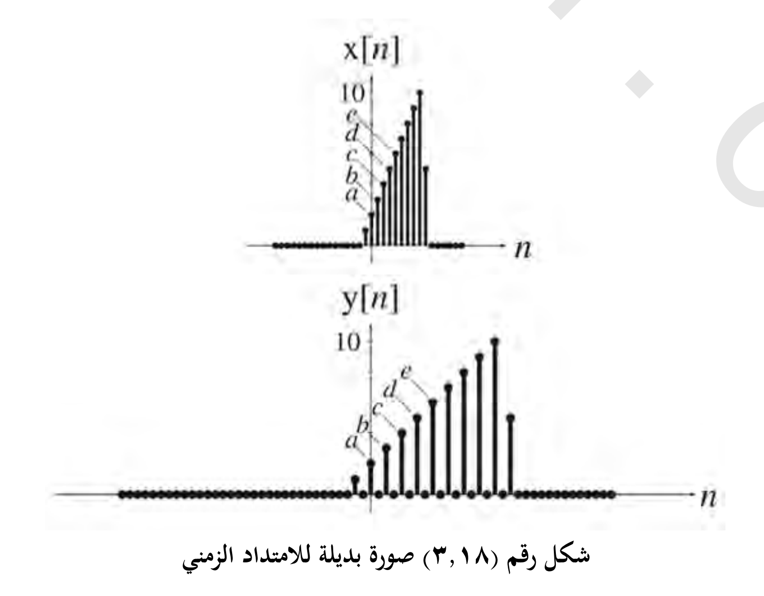
على الرغم من أن الامتداد الزمني ، كما وصفناه مسبقاً ، يبدو غير مفيد ، إلا أن هناك نوعاً من الامتداد الزمني الذي يكون مفيداً في أغلب الأحوال. افترض أن لدينا الدالة الأصلية x[n] وعلينا تكوين دالة جديدة كالتالي :

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{K}\right], & \frac{n}{K} \quad \text{رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

كما هو موضح في شكل (٣,١٨) حيث K=2.




**شكل رقم (٣,١٧) الضغط الزمني لدالة متقطعة زمنياً**




**شكل رقم (٣,١٨) صورة بديلة للامتداد الزمني**

كل القيم في الدوال الممتدة زمنياً تكون معرفة، أو محددة، وكل قيم x التي تحدث عند الزمن المتقطع n تحدث في y عند الزمن المتقطع Kn. لقد تم عمل كل ذلك حقيقة لاستبدال كل القيم غير المعرفة في الامتداد الزمني المسبق بأصفار. إذا أردنا ضغط y بالمعامل K، فإننا سنحصل على كل قيم x مرة أخرى في أماكنها الأصلية، وكل القيم التي تم استقصاؤها عن طريق تقسيم y ستكون أصفاراً.

**مثال ٣,١**

**رسم الإزاحة والتحجيم في الدوال المتقطعة زمنياً**

باستخدام ماتلاب ارسم الدالة $g[n]=10(0.8)^n\sin(3\pi n/16)u[n]$. بعد ذلك ارسم الدوال $g[2n]$ و $g[n/3]$.

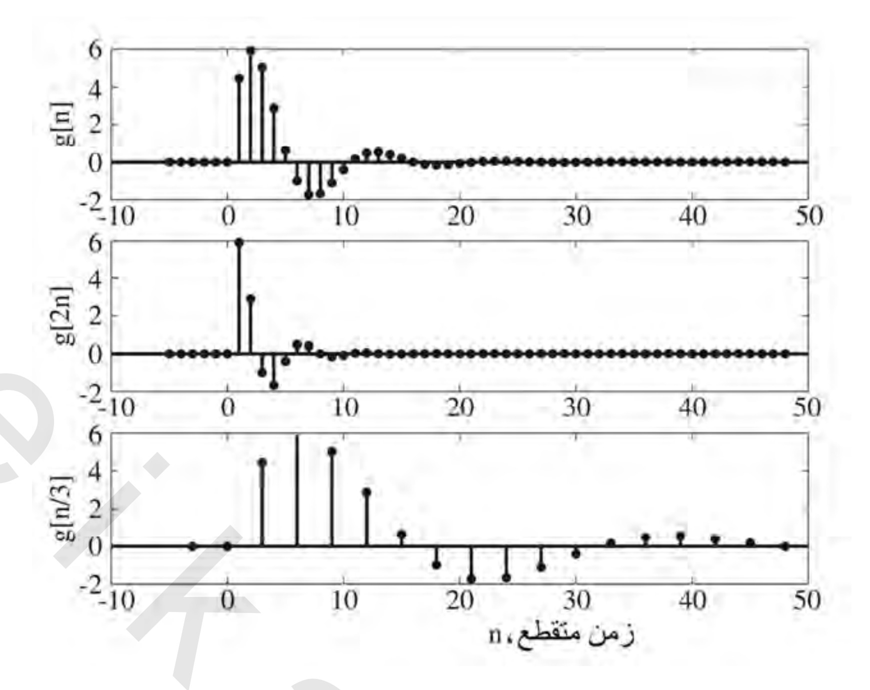
الدوال المتقطعة زمنياً تكون أسهل في برمجتها باستخدام ماتلاب عن الدوال المستمرة زمنياً لأن ماتلاب يكون ضمنيا موجها في اتجاه حساب قيم الدوال عند قيم متقطعة للمتغير المستقل. بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً لا تكون هناك حاجة لتقرير كيف تكون النقاط متقاربة من بعضها لجعل المخطط يبدو مستمراً، لأن الدالة ليست مستمرة. طريقة جيدة للتعامل مع رسم الدوال ورسم الدوال المحجمة زمنياً هي تعريف، أو تحديد الدالة الأصلية كملف m. ولكننا نحتاج للتأكيد على أن تعريف الدالة يشتمل على سلوكها المتقطع زمنياً، وللقيم غير الصحيحة للزمن المتقطع تكون الدالة غير محددة. يتعامل ماتلاب مع النتائج غير المحددة عن طريق إعطائها القيمة الخاصة NaN. المشكلة الأخرى في البرمجة هي كيفية التعامل مع وصف لدالتين مختلفتين في نطاقين مختلفين لـ n. يمكننا أن ننفذ ذلك باستخدام العمليات المنطقية والنسبية كما هو في البرنامج التالي g.m :

```
function y = g(n),
% حساب الدالة
y = 10*(0.8).^n.*sin(3*pi*n/16).*usD(n);
I = find(round(n) ~= n);   % حساب كل القيم غير الصحيحة
y(I) = NaN;        %"NaN" وضع كل القيم غير الصحيحة تساوي
```

مازلنا يجب أن نقرر على أي مدى من الأزمنة المتقطعة سنرسم الدالة. حيث إن الدالة تكون صفراً للأزمنة السالبة، فإننا يجب أن نمثل هذا المدى الزمني بنقط قليلة على الأقل لنبين أنها ستبدأ عند الزمن صفر. بالنسبة للأزمنة الموجبة فإنها ستأخذ شكل دالة الجيب المتناقصة أسياً. إذا رسمنا القليل من الثوابت الزمنية للتناقص الأسي، فإن الدالة ستكون عملياً صفراً بعد هذا الزمن. وعلى ذلك فإن المدى الزمني يجب أن يكون كالتالي مثلاً $5<n<16$. لكي نرسم تمثيلا معقولا للدالة الأصلية. ولكن الدالة الممتدة زمنياً $g[n/3]$ ستكون أوسع على المدى الزمني المتقطع، مما سيتطلب زمناً متقطعاً أكثر لكي نرى سلوك الدالة. ولذلك، لكي نرى كل الدوال على التدريج نفسه للضغط، دعنا نضع مدى الزمن المتقطع يساوي $5<n<48$.

شكل (٣,١٩) يبين خرج هذا البرنامج.

```
% رسم دالة متقطعة زمنياً وتحويلات منضغطة وممتدة لها
% حساب قيم الدالة الأصلية والنسخ المحجمة في هذا الجزء
n = .5:48 ;          % وضع الأزمنة المتقطعة لحساب الدالة
g0 = g(n) ;          % حساب قيم الدالة الأصلية
g1 = g(2*n) ;        % حساب قيم الدالة المضغوطة
g2 = g(n/3) ;        % حساب قيم الدالة الممتدة
% عرض الدالة الأصلية والدوال المحجمة زمنياً في هذا الجزء
%
% رسم الدالة الأصلية
%
subplot(3,1,1) ;                 % رسم الثلاثة مخططات فوق بعضها عمودياً
p = stem(n,g0,'k','fi lled');  % رسم الدالة الأصلية مستخدما الرسم المسماري
set(p,'LineWidth',2','MarkerSize',4);   % وضع حجم الخطوط والنقط
ylabel('g[n]');                          % وضع أسماء محاور الدالة الأصلية
%
% رسم الدالة المنضغطة زمنياً
%
subplot(3,1,2);                  % رسم الثلاثة مخططات الثانية فوق بعضها عمودياً
p = stem(n,g1,'k','fi lled');  % رسم الدالة المنضغطة بمخطط المسامير
set(p,'LineWidth',2','MarkerSize',4);   % وضع حجم الخطوط والنقط
ylabel('g[2n]');                         % تسمية محاور الدالة المضغوطة
%
% رسم الدالة الممتدة زمنياً
%
subplot(3,1,3);                  % رسم المجموعة الثالثة من المخططات فوق بعضها عمودياً
p = stem(n,g2,'k','fi lled') ;         % رسم الدالة الممتدة بمخطط المسامير فوق بعضها عمودياً
set(p,'LineWidth',2','MarkerSize',4);  % وضع حجم الخطوط والنقاط
xlabel('Discrete time, n');              % تسمية محاور الدالة الممتدة
ylabel('g[n/3]');                        % تسمية المحور الرأسي
```




**شكل رقم (٣,١٩) رسم الدوال g[n] و g[2n] و g[n/3]**

## (٣,٦) الفرق والتراكم

كما أن التفاضل والتكامل مهمان للدوال المستمرة زمنياً، فإن العمليات المكافئة لهما، وهي الفرق والتراكم كذلك مهمان بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً. التفاضل الأول لأي دالة مستمرة زمنياً g(t) يتم في العادة تعريفه كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}$$

ويمكن تعريفها أيضاً كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t)-g(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

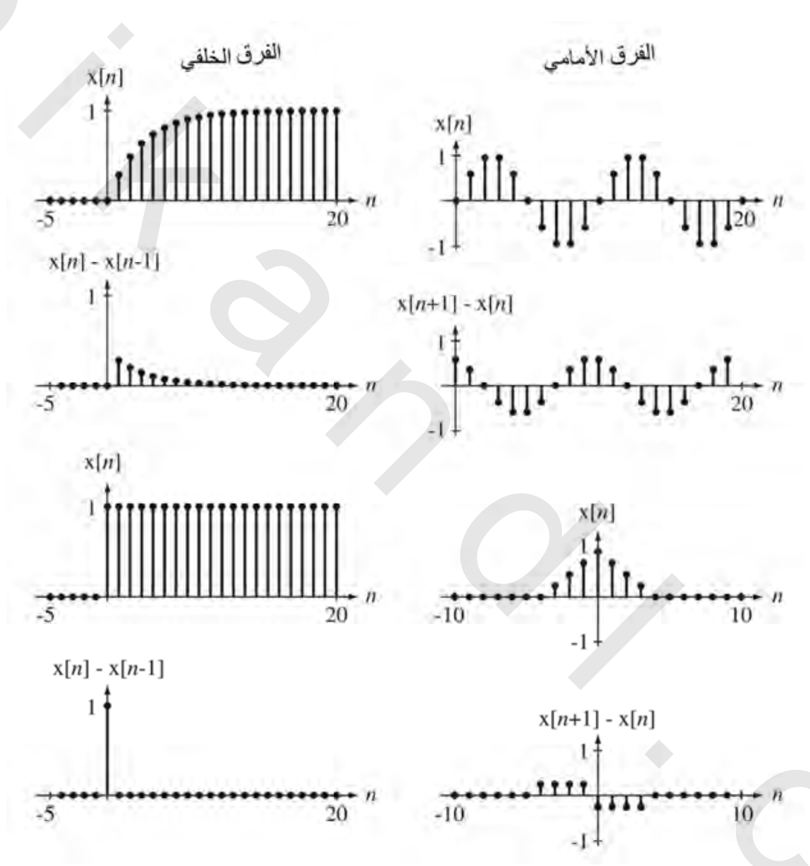
أو

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t-\Delta ف)}{\Delta t}$$

في النهاية، فإن كل هذه التعريفات تعطي التفاضل نفسه (إذا كانت موجودة). ولكن إذا ظلت Δt محددة، فإن هذه التعبيرات ليست متماثلة تماماً. العملية المكافئة للتفاضل والتي تجري على الإشارات المتقطعة زمنياً هي عملية الفرق. الفرق الأمامي الأول لأي دالة متقطعة زمنياً g[n] هو g[n+1].g[n]. (انظر ملحق الويب D للمزيد من الفرق والمعادلات الفرقية). الفرق العكسي الأول لأي دالة متقطعة زمنياً هو g[n].g[n.1]، والتي تمثل الفرق الأمامي الأول g[n.1]. شكل (٣.٢٠) يوضح بعض الدوال المتقطعة زمنياً وفروقها الأولى الأمامية والعكسية.

إن عملية الفرق المطبقة على عينات من دالة مستمرة زمنياً تعطي نتيجة تشبه إلى حد كبير (ولكن لا تشبه تماماً) العينات المأخوذة من تفاضل هذه الدالة المستمرة زمنياً (مع معامل تحجيم معين).

مقابل التكامل في الأزمنة المتقطعة هو التراكم (أو المجموع). إن تراكم الدالة g[n] يعرّف كما يلي : $\sum_{m=-\infty}^{n} g[m]$. إن مشكلة الإلتباس التي تحدث في تكامل الدالة المستمرة زمنياً توجد في الدالة المتقطعة زمنياً أيضاً، وهي أن تراكم أي دالة لا يكن وحيداً أو فريداً. العديد من الدوال يمكن أن يكون لها الفرق الأمامي نفسه أو العكسي من الدرجة الأولى، ولكن كما هو الحال في التكامل، فإن هذه الدوال تختلف عن بعضها البعض بثابت مضاف.




**شكل رقم (٣,٢٠) بعض الدول وفروقها الأمامية أو الخلفية**

افترض الدالة h[n]=g[n].g[n.1]، التي تمثل الفرق العكسي للدالة g[n]. بأخذ التراكم للطرفين نحصل على :

$$\sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} \quad (g[m] - g[m-1]$$

أو

$$\sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \cdots + (g[-1] - g[-2]) + (g[0] - g[-1]) + \cdots + (g[n] - g[n-1])$$

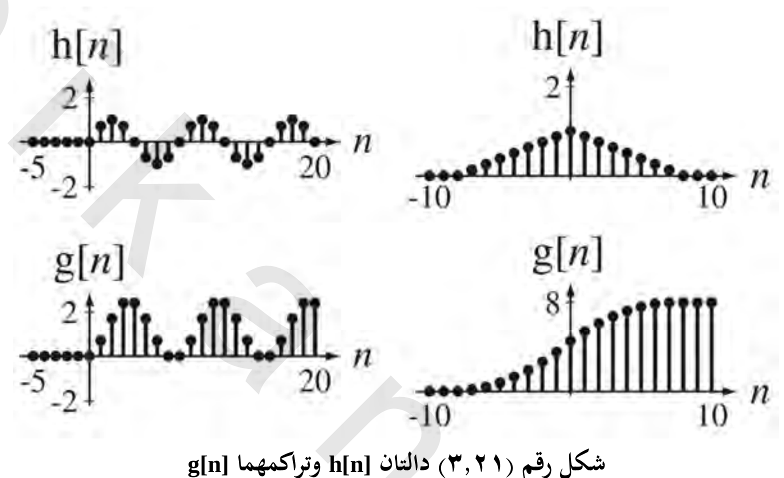
بتجميع قيم g[n] التي تحدث عند الوقت نفسه ، فإن :

$\sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \cdots + (g[-1] - g[-1]) + (g[0] - g[0]) + \cdots + (g[n-1] - g[n-1]) + g[n]$

وبالتالي فإن :

$\sum_{-\infty}^{n} h[m] = g[n]$

وهذه النتيجة تبين أن التراكم والفرق العكسي الأول هما عبارة عن عمليتين كل منهما عكس الآخر. وبالتالي فإن الفرق العكسي لتراكم أي دالة g[n] سيكون هو الدالة نفسها g[n] . شكل (٣,٢١) يبين دالتين h[n] وتراكمهما g[n]. في كل رسمه في شكل (٣,٢١) تم عمل التراكم اعتماداً على افتراض أن قيم الدالة h[n] قبل المدى الزمني للرسم كانت أصفاراً.




**شكل رقم (٣,٢١) دالتان h[n] وتراكمهما g[n]**

بطريقة مماثلة لعلاقة التكامل والتفاضل بين دالة الخطوة المستمرة زمنياً والنبضة المستمرة زمنياً، فإن تتابع الوحدة يساوي تراكم وحدة النبضة $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$، ووحدة النبضة تكون هي الفرق العكسي الأول للتتابع δ[n]=u[n]-u[n-1]. أيضاً، تكون دالة الانحدار تساوي تراكم دالة التتابع المؤخرة بوحدة زمنية واحدة كما يلى :

$ramp[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m-1]$

كما أن دالة التتابع تساوي الفرق الأمامي الأول لدالة الانحدار u[n]=ramp[n+1]-ramp[n] والفرق العكسي الأول للدالة ramp[n+1].

يمكن للماتلاب أن يحسب الفروق للدوال المتقطعة زمنياً باستخدام الدالة الضمنية في ماتلاب diff. الدالة diff تأخذ متجه طوله N كمعامل وتعطي متجه من الفروق الأمامية طوله N-1. يمكن أيضاً للماتلاب أن يحسب تراكم أي دالة باستخدام الدالة الضمنية cumsum (المجموع التراكمي). الدالة cumsum تأخذ متجها كدخل وتعطي متجها آخر كخرج طوله يساوي طول متجه الدخل ويساوي تراكم العناصر في متجه الدخل كما في المثال التالي :

```
»a = 1:10
a =
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
»diff(a)
ans =
```

```
    1 1 1 1 1 1 1 1 1
»cumsum(a)
ans =
    1 3 6 10 15 21 28 36 45 55
»b = randn(1,5)
b =
    1.1909 1.1892 -0.0376 0.3273 0.1746
»diff(b)
ans =
   -0.0018 -1.2268 0.3649 -0.1527
»cumsum(b)
ans =
   1.1909 2.3801 2.3424 2.6697 2.8444
```

من الواضح من هذه الأمثلة أن الدالة cumsum تفترض أن التراكم يكون صفراً قبل العنصر الأول في المتجه.

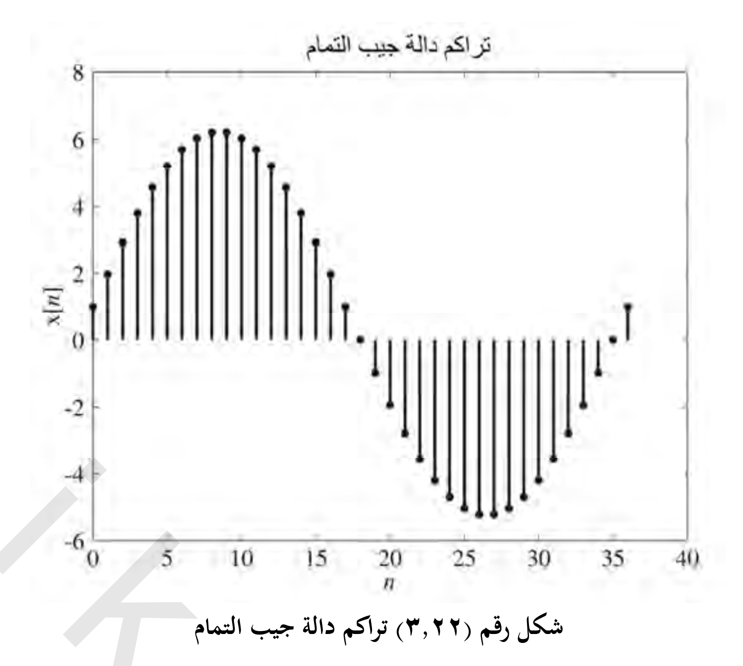
**مثال ٣,٢**

**رسم تراكم دالة باستخدام ماتلاب**

باستخدام ماتلاب، ارسم تراكم الدالة x[n]=cos(2πn/36) من n=0 حتى n=36 مع افتراض أن التراكم قبل الزمن n=0 يساوي صفراً.

```
% برنامج يوضح تراكم دالة على زمن محدد باستخدام الدالة الضمنية cumsum
n = 0:36 ;          % متجه الزمن المقطع
x = cos(2*pi*n/36);   % x[n] قيمة الدالة
% رسم تراكم الدالة x[n]
p = stem(n,cumsum(x),'k','fi lled');
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4);
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24);
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24);
```

شكل (٣,٢٢) يبين خرج هذا البرنامج.

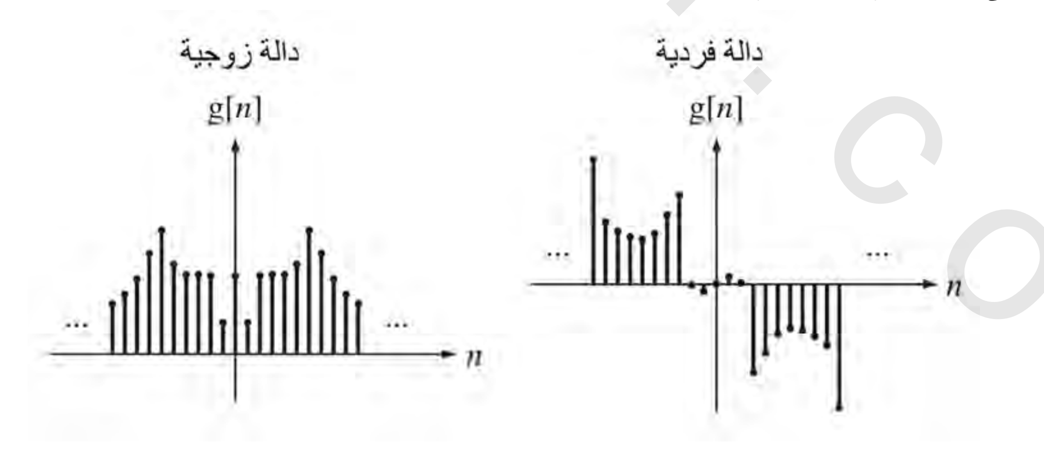



**شكل رقم (٣،٢٢) تراكم دالة جيب التمام**

لاحظ أن تركم دالة جيب التمام يشبه إلى حد كبير (ولكن لا يشبه تماماً) دالة الجيب. إن ذلك يحدث نتيجة أن عملية التراكم تكافيء عملية التكامل للدوال المستمرة زمنياً، ونعرف أن تكامل دالة جيب التمام يساوي دالة الجيب.

## (٣،٧) الإشارات الزوجية والفردية

مثلما يحدث في الدوال المستمرة زمنياً، فإن الدوال المتقطعة زمنياً يمكن تصنيفها إلى دوال زوجية وأخرى فردية. العلاقات المحددة لهذه الخواص مكافئة تماماً لنظيراتها في الدوال المستمرة زمنياً. إذا كانت الدالة g[n]=g[-n]، فإنها تكون دالة زوجية، وإذا كانت الدالة g[n]=-g[-n]، فإن هذه الدالة تكون فردية. شكل (٢،٢٣) يوضح بعض الأمثلة على الدوال الزوجية والفردية.




**شكل رقم (٣،٢٣) أمثلة على الدوال الزوجية والفردية**

الجزء الزوجي والجزء الفردي في أي دالة g[n] يمكن حسابهما بالطريقة نفسها كما كان في حالة الدوال المستمرة زمنياً :

$$g_e[n] = \frac{g[n]+g[-n]}{2}, \quad and \quad g_o[n] = \frac{g[n]-g[-n]}{2}$$ المعادلة رقم (٣,٧)

الدالة الزوجية يكون لها جزء فردي يساوي صفراً ، والدالة الفردية يكون لها جزء زوجي يساوي صفراً.

**مثال ٣,٣**

**الأجزاء الزوجية والفردية لأي دالة**

احسب الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة $g[n]=\sin(2\pi n/7)(1+n^2)$.

$$g_e[n] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)+\sin\left(-\frac{2\pi n}{7}\right)(1+(-n)^2)}{2}$$

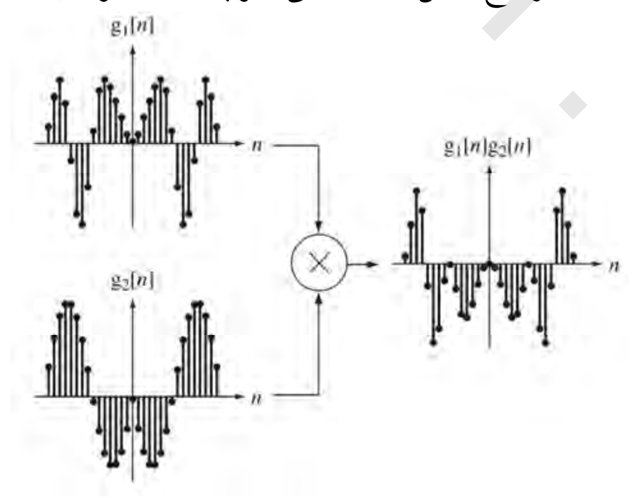
$$g_e[n] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)-\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)}{2} = 0$$

$$g_o[n] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)-\sin\left(-\frac{2\pi n}{7}\right)(1+(-n)^2)}{2} = \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)$$

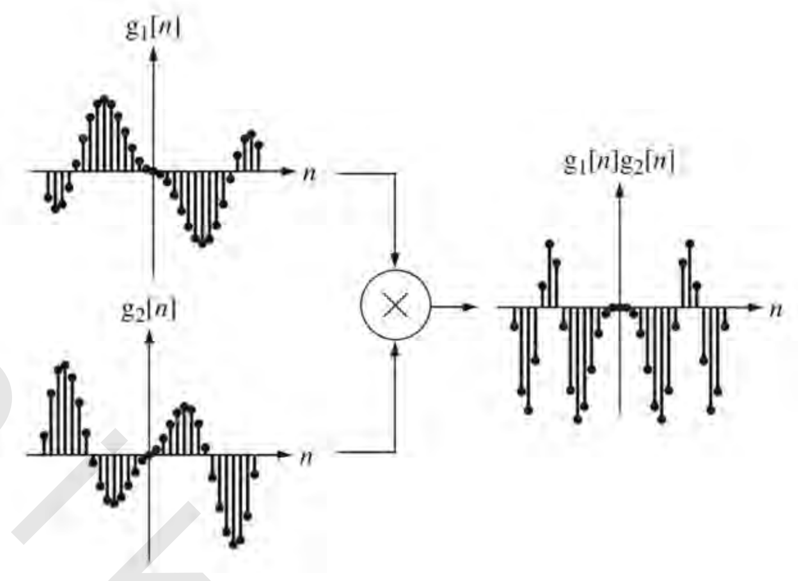
وعلى فهذه الدالة g[n] دالة فردية.

**الجمع بين الإشارات الزوجية والفردية**

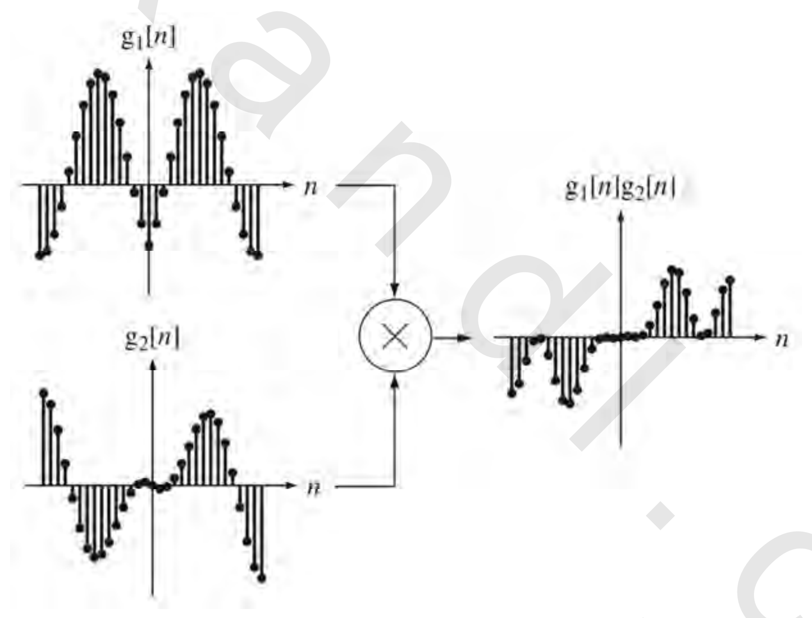
كل خواص تجميع الدوال التي يتم تطبيقها على الدوال المستمرة زمنياً تطبق أيضاً على الدوال المتقطعة زمنياً. إذا كان هناك دالتان زوجيتان ، فإن مجموعهما ، والفرق بينهما ، وحاصل ضربهما ، ناتج قسمتهما يكون زوجياً أيضاً. وإذا كان لدينا دالتان فرديتان ، فإن مجموعهما ، والفرق بينهما يكون فردياً ، ولكن حاصل ضربهما وناتج قسمتهما يكون زوجيا. إذا كانت إحدى الدالتين فردية والأخرى زوجية ، فإن حاصل ضربهما وناتج قسمتهما يكون فردياً. شكل (٣,٢٤) حتى شكل (٣,٢٦) توضح بعض الأمثلة على ضرب الدوال الزوجية والفردية.




**شكل رقم (٣,٢٤) حاصل ضرب دالتين زوجيتين**




**شكل رقم (٣,٢٥) حاصل ضرب دالتين فرديتين**




**شكل رقم (٣,٢٦) حاصل ضرب دالة زوجية وأخرى فردية**

### الجمع المتماثل المحدد للإشارات الزوجية والفردية

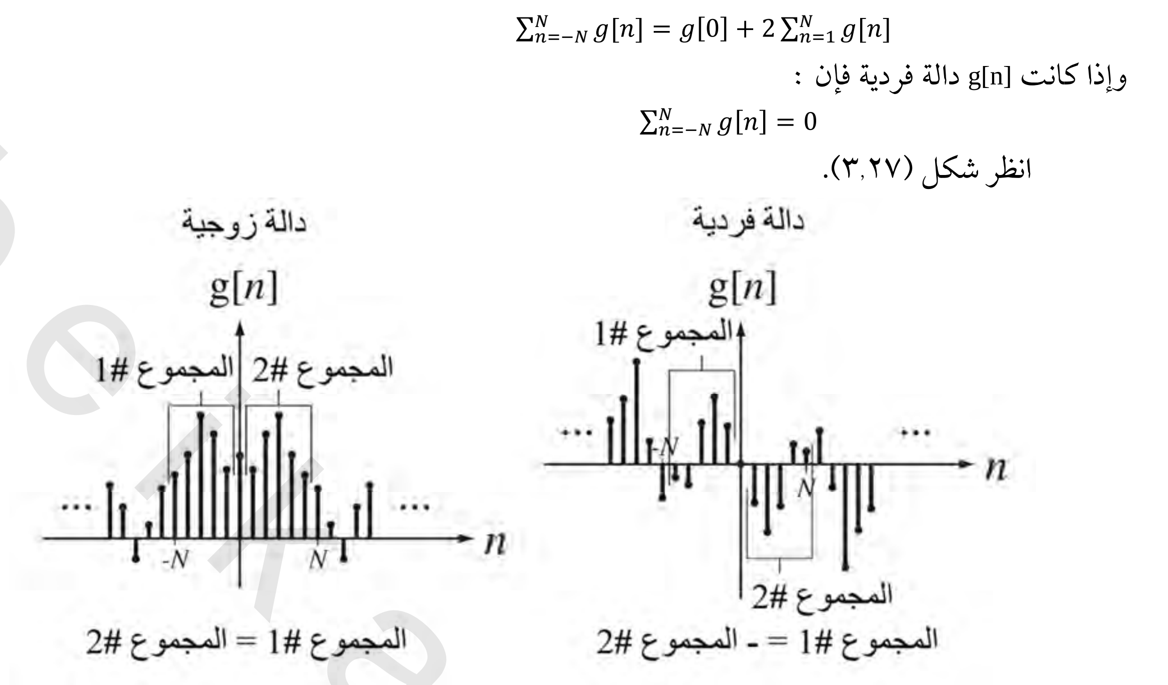
التكامل المحدود للدوال المستمرة زمنياً على حدود متماثلة يكافئ التجميع للدوال المتقطعة زمنياً على الحدود المتماثلة. هذه الخواص محققة لمجموع الدوال المقطعة زمنياً التي تكون مشابهة (ولكنها ليست مماثلة تماماً) لمثيلتها بالنسبة للتكامل في حالة الدوال المستمرة زمنياً. إذا كانت الدالة g[n] دالة زوجية و N عبارة عن رقم صحيح موجب، فإن :

$$\sum_{n=-N}^{N} g[n] = g[0] + 2\sum_{n=1}^{N} g[n]$$

وإذا كانت g[n] دالة فردية فإن :

$$\sum_{n=-N}^{N} g[n] = 0$$

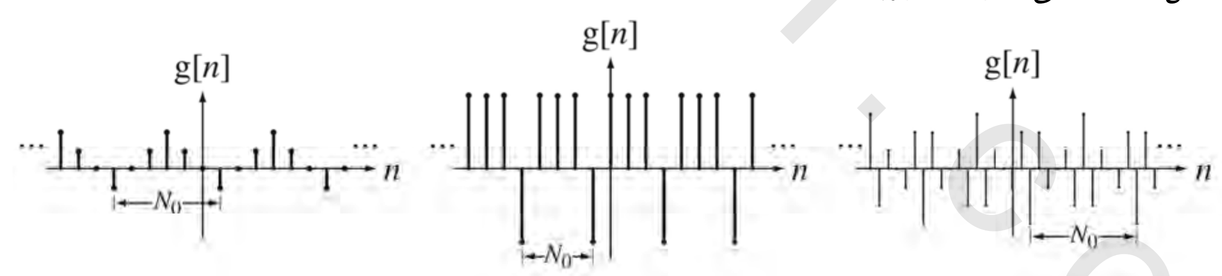
انظر شكل (٣,٢٧).




**شكل رقم (٣,٢٧) مجموع دوال زوجية وفردية متقطعة زمنياً**

### (٣,٨)الإشارات الدورية

الدالة الدورية هي الدالة التي لا تتغير مع الإزاحة الزمنية $n \to mN$ ، حيث N هي دورة الدالة و m عبارة عن ثابت صحيح. الدورة الأساسية $N_0$ هي أقل زمن منقطع تبدأ عنده الدالة في إعادة نفسها. شكل (٣,٢٨) يوضح بعض الأمثلة على الدوال الدورية.




**شكل رقم (٣,٢٨) أمثلة على دوال دورية بدورة أساسية N0**

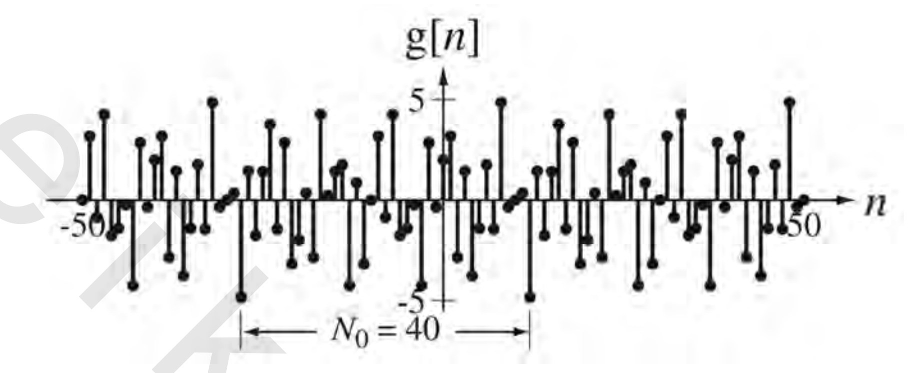
التردد الأساسي للدالة هو $F_0=1/N_0$ دورة/العينة ، أو $\Omega_0=2\pi/N_0$ راديان/العينة. لاحظ أن وحدات التردد في الأزمنة المتقطعة ليست الهرتز Hz أو الراديان/الثانية ؛ لأن وحدات الزمن المتقطع ليست الثانية.

**مثال ٣,٤**

**الدورة الأساسية لدالة**

ارسم الدالة $g[n]=2\cos(9\pi n/4)-3\sin(6\pi n/5)$ على المدى $-50<n<50$. وضح من الرسم الدورة الأساسية.

شكل (٣,٢٩) يوضح الدالة g[n].




**شكل (٣,٢٩) الدالة g[n]=2cos (9πn/4).3sin(6πn/5)**

كاختبار على هذا الحل التخطيطي، فإن هذه الدالة يمكن كتابتها على الصورة : $g[n]=2\cos(2\pi(9/8)n)-3\sin(2\pi(3/5)n)$. الدورتان الأساسيتان لدالتي الجيب هما 8 و 5 وبالتالي فإن LCM لهما يساوي 40 وهي التي ستمثل الدورة الأساسية للدالة g[n].

## (٣,٩)طاقة وقدرة الإشارة

**طاقة الإشارة**

تعرف طاقة الإشارة بأنها :

$$E_x = \sum_{n\pm\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$ المعادلة رقم (٣,٨)

ووحداتها هي ببساطة مربع وحدات افشارة نفسها.

**مثال ٣,٥**

**طاقة الإشارة**

احسب طاقة الإشارة $x[n]=(1/2)^n u[n]$.

من تعريف طاقة الإشارة يمكننا كتابة ما يلي :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

يمكن إعادة كتابة هذه التتابعة اللانهائية كما يلي :

$$E_x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

يمكن استخدام معادلة حساب مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية كما يلي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = -, \quad |r| < 1$$

لنحصل على ما يلي :

$$E_x = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

**قدرة الإشارة**

للعديد من الإشارات المستخدمة في تحليل الإشارات والأنظمة ، فإن المجموع :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

لا يتقارب أو لايؤول إلى مجموع محدد ، نتيجة أن طاقة الإشارة تكون لانهائية ، وهذا يحدث في العادة نتيجة أن الإشارة ليست محددة الزمن. دالة وحدة التتابع تعتبر مثالا على إشارة لها طاقة غير نهائية. بالنسبة للإشارة من هذا النوع ، فإنه من المريح أن يتم التعامل مع متوسط قدرة الإشارة بدلاً من طاقة الإشارة. تعريف متوسط قدرة أي إشارة يكون كما يلي :

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$ المعادلة رقم (٣,٩)

وهذه تعتبر متوسط قدرة الإشارة على كل الزمن. (لماذا تكون النهاية العليا في علامة المجموع N-1 بدلاً من N؟).

بالنسبة للإشارات الدورية ، فإن حساب متوسط قدرة الإشارة من الممكن أبسط. في هذه الحالة تكون قيمة المتوسط لأي دالة دورية تساوي المتوسط على أي دورة كاملة كما يلي :

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2$$ المعادلة رقم (٣,١٠)

حيث $n_0$ رقم صحيح ، والرمز $\sum_{n=<N>}$ يعني المجموع على مدى من قيم n المتتابعة التي يكون طولها N ، حيث N من الممكن أن تكون أي دورة لـ $|x[n]|^2$.

**مثال ٣,٦**

**حساب طاقة وقدرة الإشارة باستخدام ماتلاب**

باستخدام ماتلاب احسب الطاقة أو القدرة للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (0.9)^{|n|} \sin(\frac{2\pi n}{4})$

(ب) $x[n] = 4\delta_5[n] - 7\delta_7[n]$

وبعد ذلك ، قارن النتائج بالحسابات التحليلية.

```
% برنامج لحساب الطاقة أو القدرة لبعض الإشارات كأمثلة
% (أ)
n = -100:100 ; % وضع متجه من الأزمنة المتقطعة لحساب
      % قيمة الدالة
      % حساب قيمة الدالة ومربعاتها
x = (0.9)-^abs(n)-*sin(2*pi*n/4) ; xsq = x-^2 ;
Ex = sum(xsq) ; % استخدام دالة المجموع لحساب الطاقة
            % الكلية وعرض النتيجة
disp([‘(b) Ex = ‘,num2str(Ex)]);
% (ب)
N0 = 35;   % الدورة الأساسية تساوي ٣٥
n = 0:N0-1; % وضع متجه من الأزمنة المتقطعة
% على مدار دورة واحدة يتم حساب قيمة الدالة عليها
% حساب قيمة الدالة ومربعاتها
x = 4*impND(5,n) - 7*impND(7,n) ; xsq = x-^2 ;
Px = sum(xsq)/N0; % استخدام دالة المجموع ى ماتلاب
            % لحساب متوسط القدرة وعرض النتيجة
disp([‘(d) Px = ‘,num2str(Px)]);
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي :

(أ) $E_x=4.7107$

(ب) $P_x=8.6$

الحسابات التحليلية ستكون كالتالي :

(أ) $$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|(0.9)^{|n|} sin(\tfrac{2\pi n}{4})\right|^2$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left|(0.9)^{|n|} sin(\tfrac{2\pi n}{4})\right|^2 + \sum_{n=-\infty}^{0} \left|(0.9)^{|n|} sin(\tfrac{2\pi n}{4})\right|^2 - \underbrace{|x[n]|^2}_{=0}$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^{-2n} sin^2(\tfrac{2\pi n}{4}) + \sum_{n=-\infty}^{0} (0.9)^{-2n} sin^2(\tfrac{2\pi n}{4})$$

$$E_x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^{-2n} (1 - \cos(\pi n)) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{0} (0.9)^{-2n} (1 - \cos(\pi n))$$

باستخدام التماثل الزوجي للدالة ، ووضع n→-n في المجموع الثاني من المعادلة السابقة :

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty}(0.9)^{-2n}(1-\cos(\pi n))$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty}\left((0.9)^{2n} - (0.9)^{2n}\frac{e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}}{2}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(0.81)^n - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(0.81e^{j\pi})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(0.81e^{-j\pi})^n\right]$$

باستخدام معادلة مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

$$E_x = \frac{1}{1-0.81} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0.81e^{j\pi}} + \frac{1}{1-0.81e^{-j\pi}}\right]$$

$$E_x = \frac{1}{1-0.81} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+0.81} + \frac{1}{1+0.81}\right] = \frac{1}{1-0.81} - \frac{1}{1+0.81} = 4.7107$$

(ب)

$$P_x = \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>}|x[n]|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}|x[n]|^2$$
$$= \frac{1}{35}\sum_{n=0}^{34}|4\delta_5[n] - 7\delta_7[n]|^2$$

النبضات في دالتي تتابع النبضات تتطابق فقط عند المضاعفات الصحيحة لـ 0.35 ولذلك فإنها في هذا المجموع تتطابق فقط عند n=0. ولذلك فإن شدة النبضة عند n=0 ستكون .3. كل النبضات الأخرى تحدث منفردة ومجموع المربعات سيكون هو نفسه مربع المجموع ، لذلك يمكننا كتابة :

$$P_x = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}(-3)^2 + 4^2 + (-7)^2 + 4^2 + (-7)^2 + 4^2 \\ +4^2 + (-7)^2 + 4^2 + (-7)^2 + 4^2\end{pmatrix}$$

وهذا عند قيم n التالية من اليسار لليمين : n=0, n=5, n=7, n=10, n=14, n=15, n=20, n=21, n=25, n=28, n=30

$$P_x = \frac{9+6x4^2+4x(-7)^2}{35} = \frac{9+96+196}{35} = 8.6$$

## (٣,١٠) ملخص لبعض النقاط المهمة

١- يمكن تكوين الإشارات المتقطعة زمنياً من الإشارات المستمرة زمنياً عن طريق أخذ العينات.

٢- الإشارة المتقطعة زمنياً لا تكون معرّفة عن قيم الزمن غير الصحيحة.

٣- الإشارات المتقطعة زمنياً والمشكّلة عن طريق أخذ عينات من إشارات دورية مستمرة زمنياً من الممكن ألا تكون دورية.

٤- من الممكن لوصفين مختلفين تحليليا أن ينتجا دوال متطابقة متقطعة زمنياً.

٥- أي صورة مزاحة زمنياً لدالة متقطعة زمنياً تكون معرفة فقط عند القيم الصحيحة لأزمنة الإزاحة.

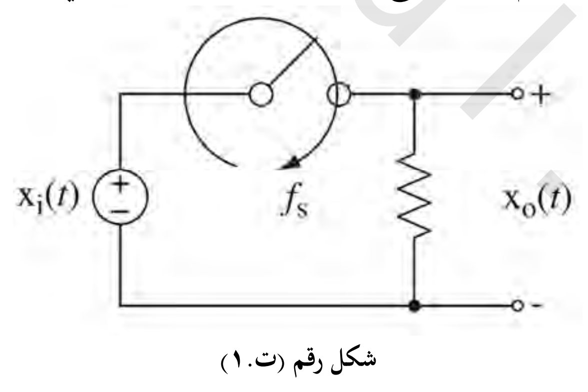
٦- التحجيم الزمني لأي دالة متقطعة زمنياً يمكن أن ينتج عنها تقسيم أو قيم غير محددة، وهذه ظاهرة لا تحدث عند إجراء التحجيم للدوال المستمرة زمنياً.

**تمارين مع إجاباتها**

(في كل تمرين، يتم وضع الإجابات بطريقة عشوائية).

**دوال الإشارة**

١- شكل (ت.١) يبين دائرة كهربية تم توصيل الجهد $x(t)=A\sin(2\pi f_0 t)$ دورياً على المقاومة عن طريق المفتاح. يدور المفتاح بتردد مقداره $f_s$ يساوي 500 دورة في الدقيقة rpm. افترض أن المفتاح يكون مغلقاً عند الزمن t=0، وفي كل مرة يتم غلق المفتاح، فإنه يظل مغلقاً لمدة 10 ميللي ثانية.



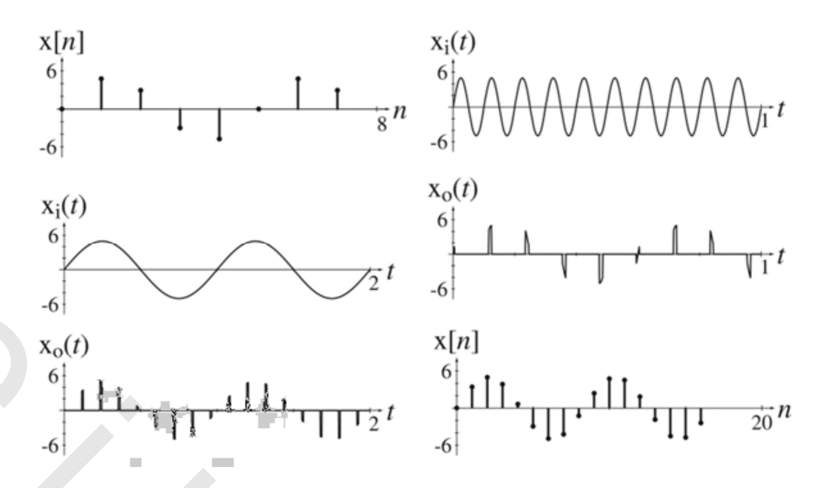

**شكل رقم (ت.١)**

(أ) إذا كانت A=5 و $f_0=1$، ارسم استجابة الجهد $x_0(t)$ عندما $0<t<2$.

(ب) إذا كانت A=5 و $f_0=10$، ارسم استجابة الجهد $x_0(t)$ عندما $0<t<1$.

(ج) إن ذلك يعتبر محاكاة لدائرة أخذ عينات مثالية. إذا كانت عملية أخذ العينات مثالية، ما هي الإشارات x[n] التي يمكن إنتاجها في الجزءين (أ) و (ب)؟ ارسم هذه الإشارات مع الزمن المتقطع n.

**الإجابة :**




**شكل رقم** (إجابة ت.١)

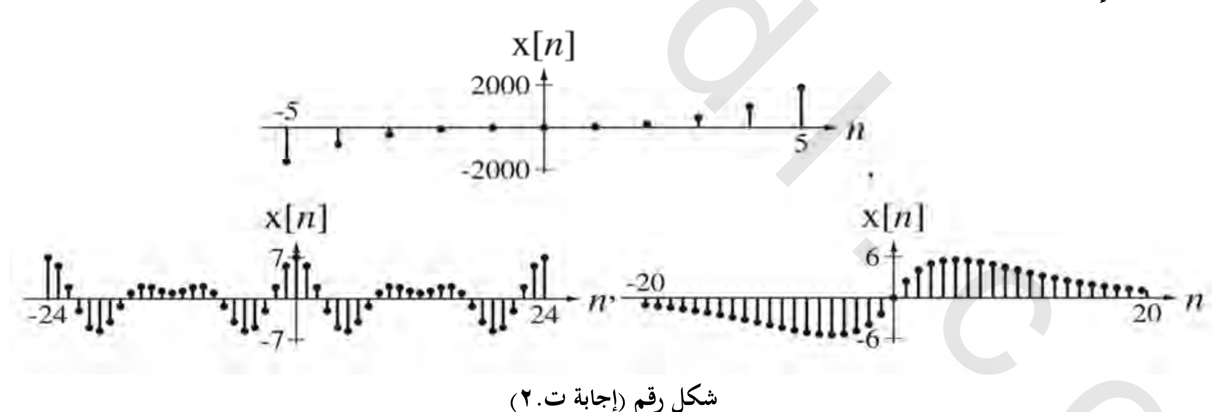
٢- ارسم الدوال التالية :

(أ) $x[n]=4\cos(2\pi n/12)-3\sin(2\pi(n-2)/8)$ ، عندما $-24\leq n<24$

(ب) $x[n]=3ne^{-|n/5|}$ ، عندما $-20\leq n<20$

(ت) $x[n]=21(n/2)^2+14n^3$ ، عندما $-5\leq n<5$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (إجابة ت.٢)

٣- افترض أن $x_1[n]=5\cos(2\pi n/8)$ و $x_2[n]=-8e^{-(\frac{n}{6})^2}$ ، ارسم المجاميع التالية من الإشارتين في المدى $-20\leq n<20$. إذا كانت الإشارة لها بعض القيم المحددة وغير المحدد فاهمل القيم غير المحددة.

(أ) $x[n]=x_1[n]x_2[n]$

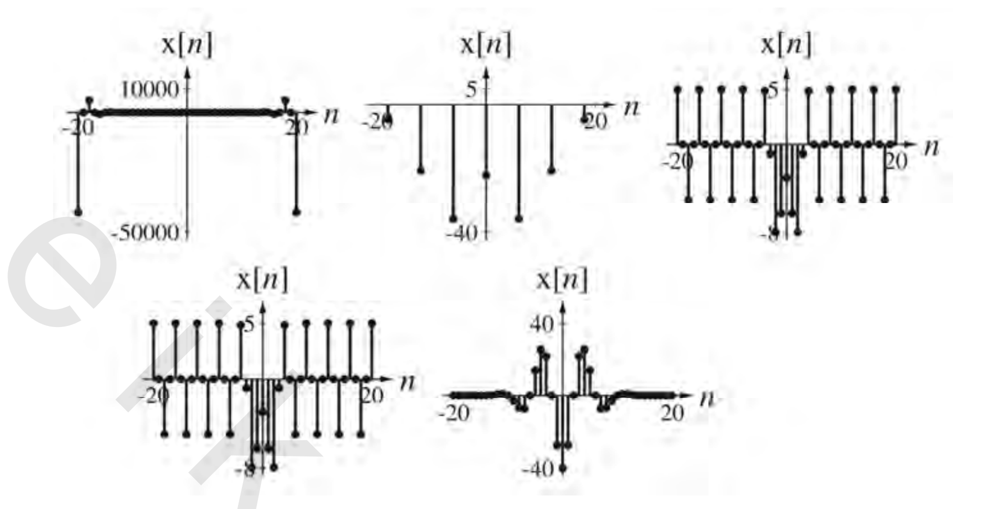
(ب) $x[n]=4x_1[n]+2x_2[n]$

(ج) $x[n]= x_1[2n]x_2[3n]$

(د) $x[n]= x_1[2n]/x_2[.n]$

(ه) $x[n]= 2x_1[n/2]+4x_2[n/3]$

**الإجابة :**

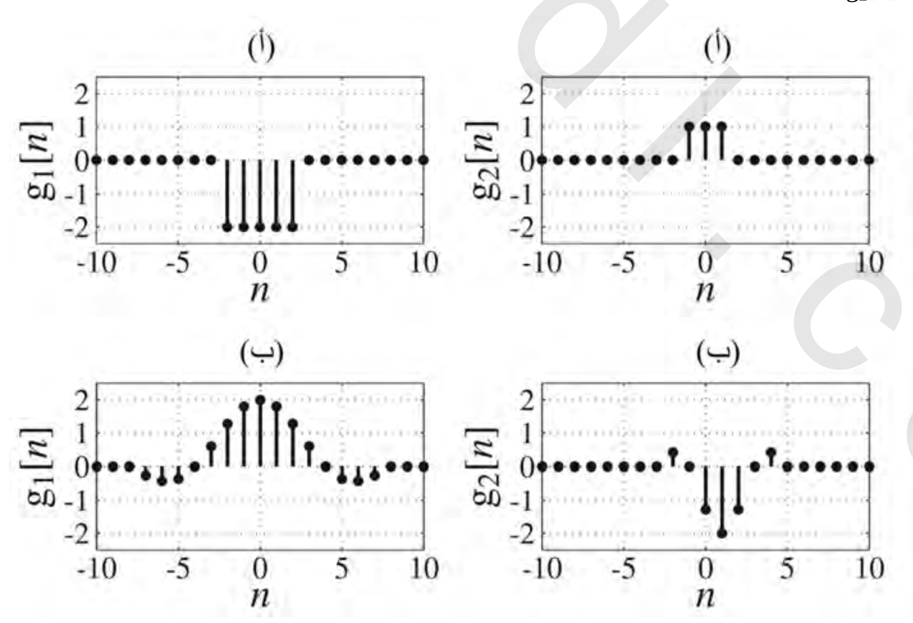



**شكل رقم (إجابة ت.٣)**

## التحجيم والإزاحة

٤- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (ت.٤) حدد الثوابت الموجودة في الدالة التالية :

$.g_2[n]=Ag_1[a(n-n_0)]$




**شكل رقم (ت.٤)**

**الإجابة :**

$A=-1/2$ ، $n_0=0$ ، و $a=2$ أو $a=-2$ أو $a=-2$ ، و $A=-1$ ، $n_0=1$ ، و $a=2$ أو $-2$

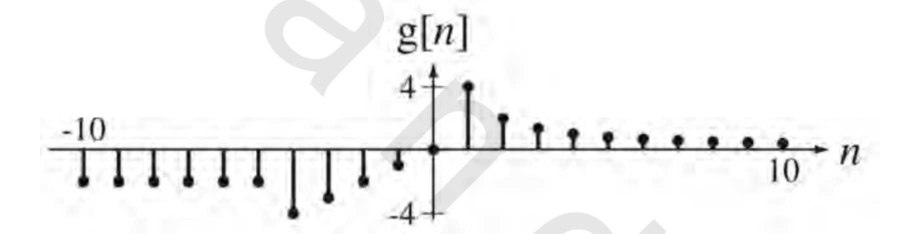
.

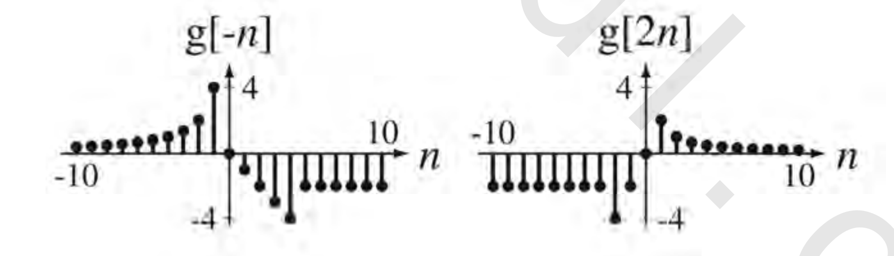
٥- افترض الدالة g[n] المعرفة كما يلي :

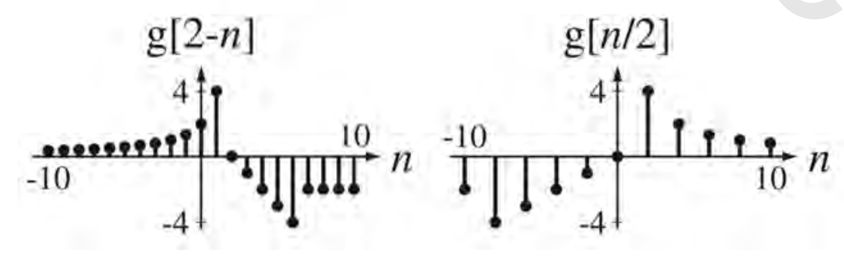
$$g[n]=\begin{cases}-2, & n<-4\\ n, & -4\le n<1\\ \frac{4}{n}, & 1\le n\end{cases}$$

ارسم g[-n] و g[2-n] و g[2n] و g[n/2].

**الإجابة :**



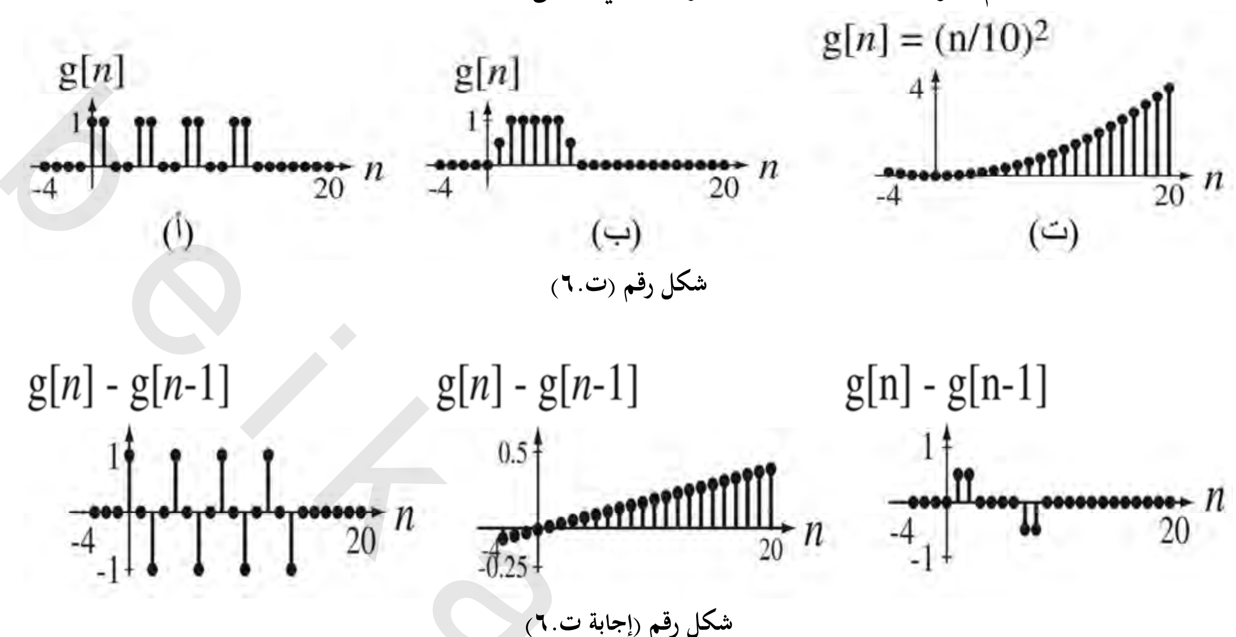




**شكل رقم (إجابة ت.٥)**

**الفرق والتراكم**

٦- ارسم الفروق العكسية للدوال الموضحة في شكل (ت.٦)



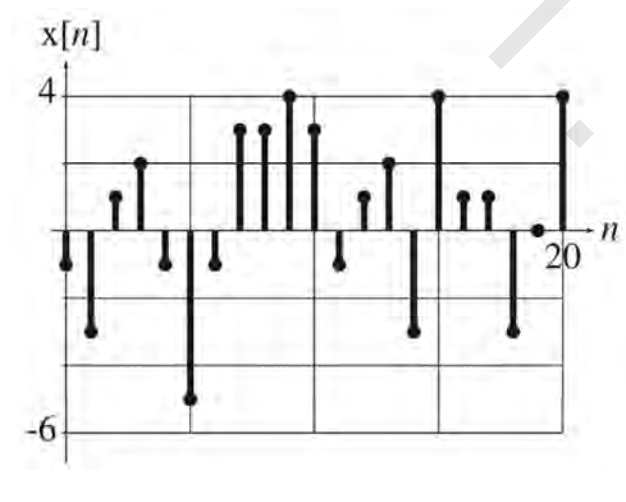

**شكل رقم (ت.٦)**

**شكل رقم (إجابة ت.٦)**

٧- الإشارة x[n] معرفة في شكل (ت.٧). افترض أن y[n] تمثل الفرق العكسي الأول للإشارة x[n]، وافترض أن z[n] تمثل تراكم x[n]. (افترض أن x[n] تساوي صفرا لكل قيم n الأقل من الصفر).

(أ) ما هي قيمة y[4] ؟

(ب) ما هي قيمة z[6] ؟




**شكل رقم (ت.٧)**

**الإجابة :** 8- و 3-

٨- افترض أن g[n]=u[n+3]-u[n-5] :

(أ) ما هو مجموع كل قيم g[n]؟

(ب) إذا كانت h[n]=g[3n] ، فما هو مجموع كل قيم h[n]؟

**الإجابة :** 8 و 3

٩- ارسم التراكم g[n] لكل من الدوال h[n] التالية التي تساوي صفراً لكل n<-16 :

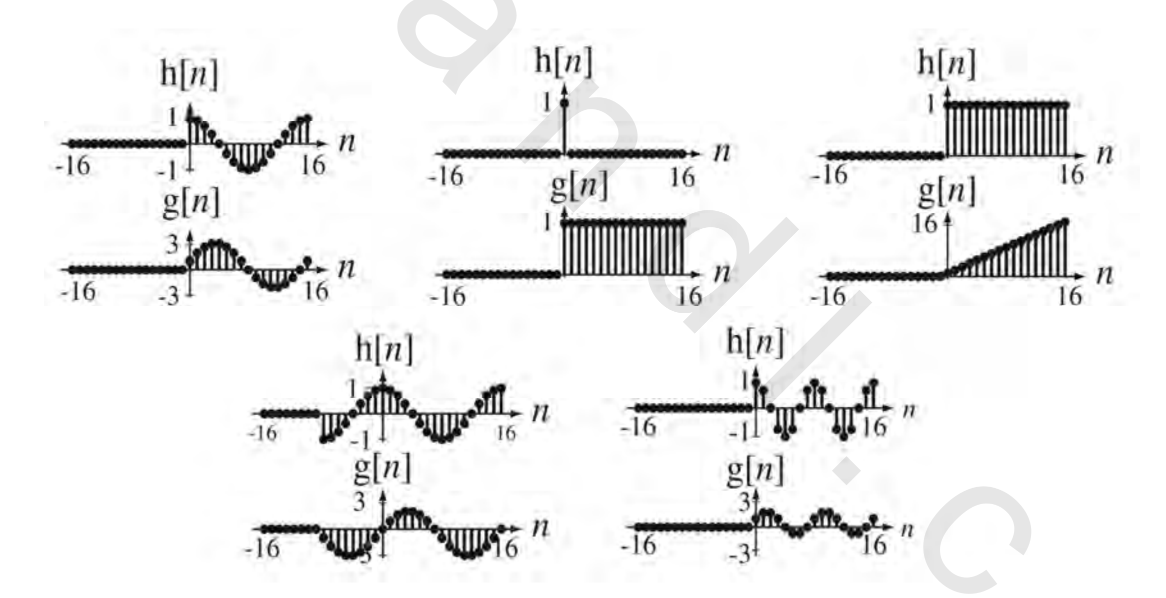
(أ) h[n]=δ[n]

(ب) H[n]=u[n]

(ج) h[n]=cos(2πn/16)u[n]

(د) h[n]=cos(2πn/8)u[n]

(ه) h[n]=cos(2πn/16)u[n+8]




**شكل رقم (إجابة ت.٩)**

## الإشارات الزوجية والفردية

١٠- احسب وارسم الأجزاء الزوجية والفردية للدوال التالية :

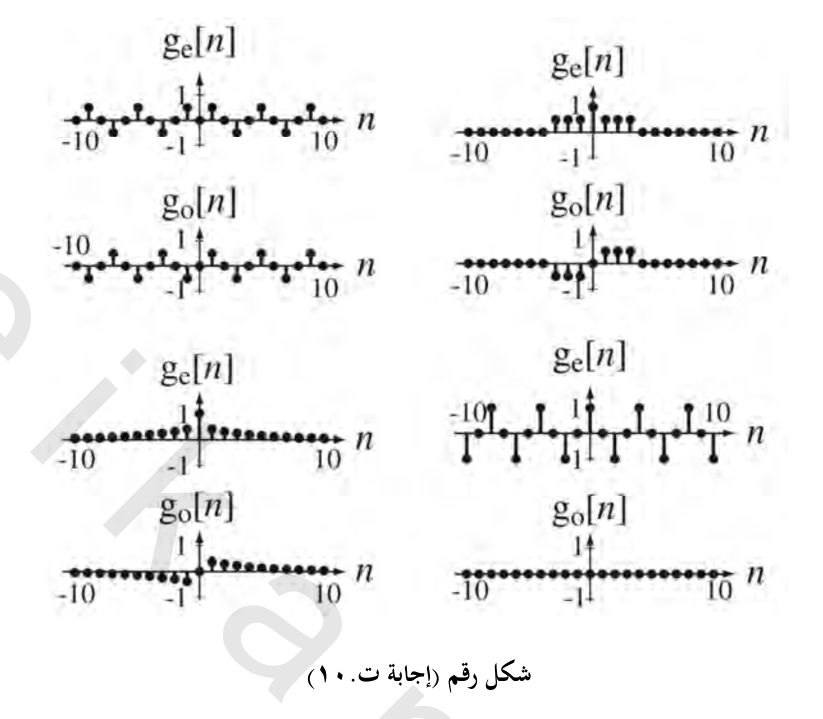
(أ) g[n]=u[n]-u[n-4]

(ب) $g[n]=e^{-n/4}u[n]$

(ج) g[n]=cos(2πn/4)

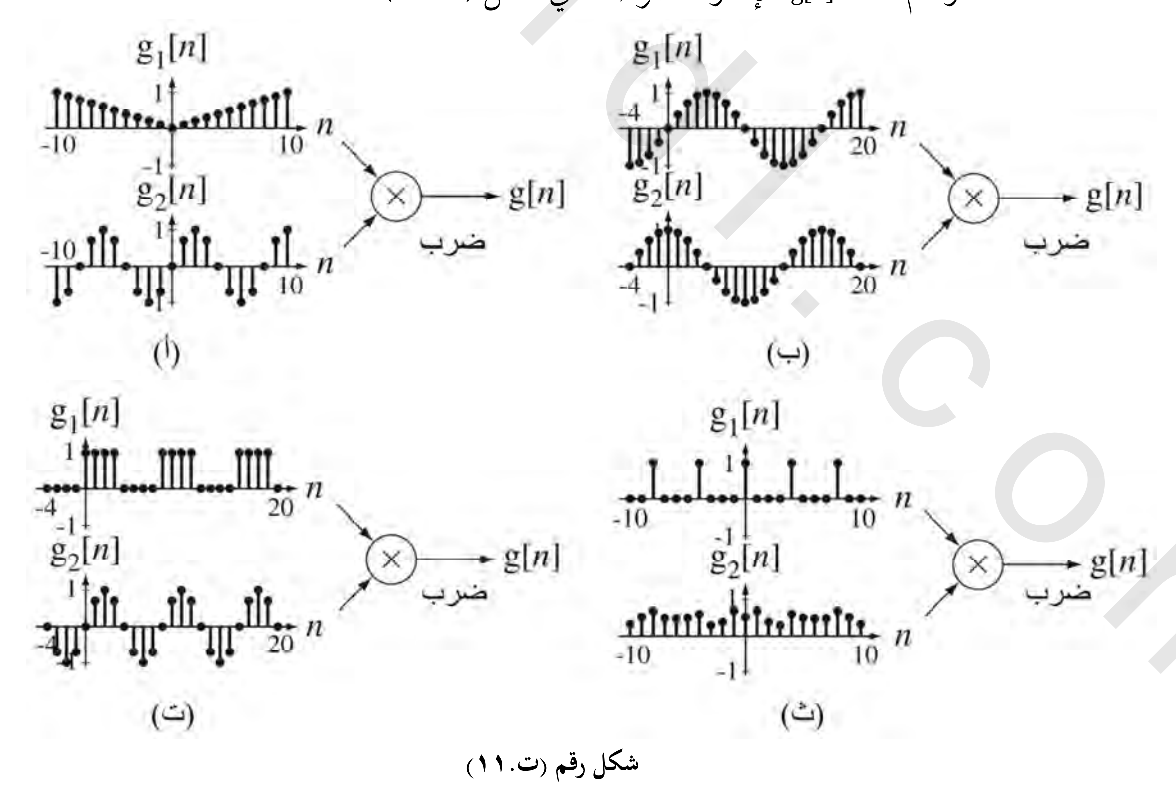
(د) g[n] ]=sin(2πn/4)

**الإجابة :**

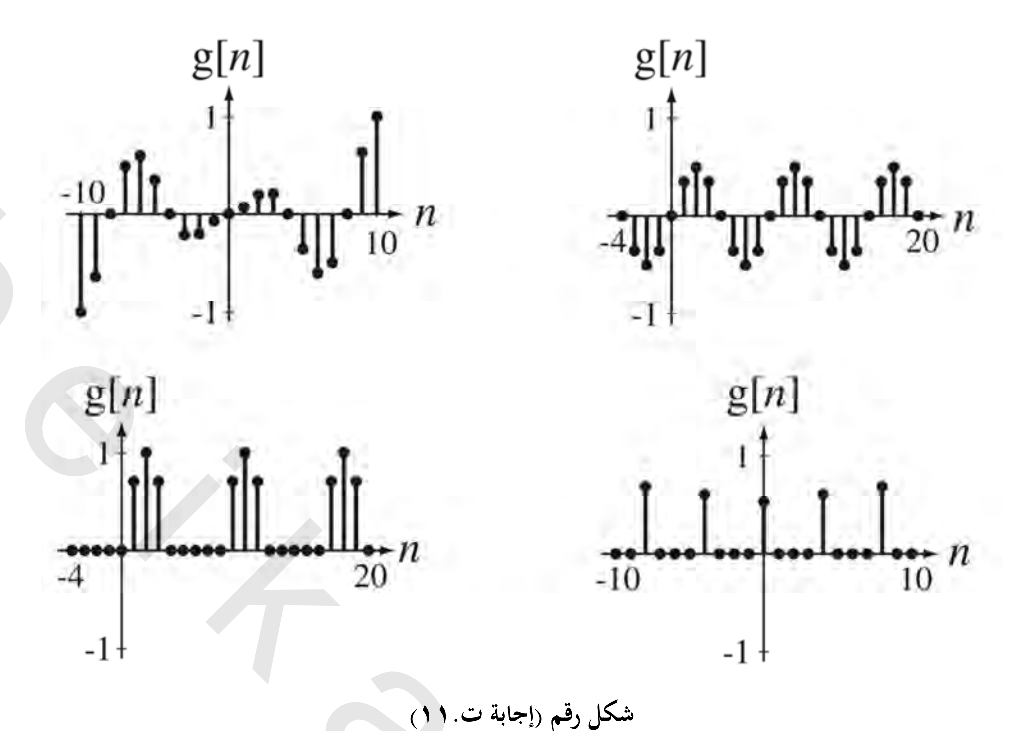



**شكل رقم (إجابة ت.١٠)**

١١- ارسم الدالة g[n] للإشارات الموضحة في شكل (ت.١١) :




**شكل رقم (ت.١١)**




شكل رقم (إجابة ت.١١)

**الإشارات الدورية**

١٢- احسب الدورة الأساسية لكل من هذه الدوال :

(أ) $g[n]=\cos(2\pi n/10)$

(ب) $g[n]=\cos(\pi n/10)$

(ج) $g[n]=\cos(2\pi n/5)+\cos(2\pi n/7)$

(د) $g[n]=e^{j2\pi n/20}+e^{-j2\pi n/20}$

(ه) $g[n]=e-^{j2\pi n/4}+e^{-j2\pi n/4}$

(و) $g[n]=\sin(13\pi n/8)-\cos(9\pi n/6)$

(ز) $g[n]=e^{-j6\pi n/21}+\cos(22\pi n/36)-\sin(11\pi n/33)$

**الإجابة :** 10 و 20 و 12 و 20 و 252 و 16 و 35

١٣- ارسم الدوال التالية وحدد من الأشكال الدورة الأساسية لكل دالة (إذا كانت دورية) :

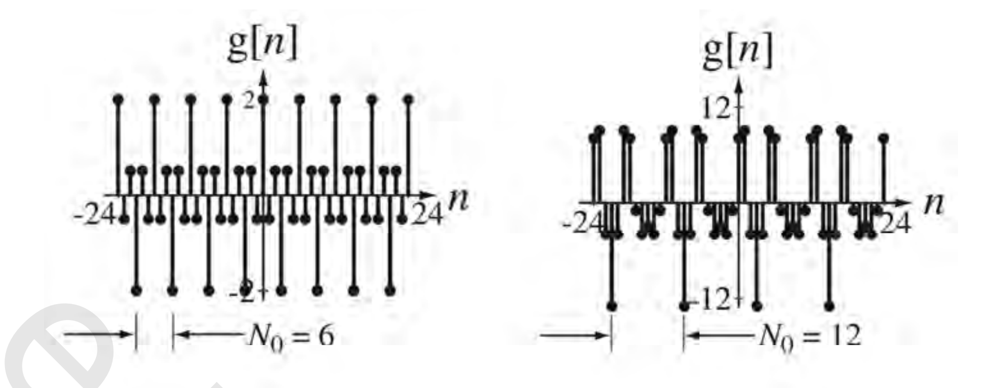
(أ) $g[n]=5\sin(2n/4)+8\cos(2\pi n/6)$

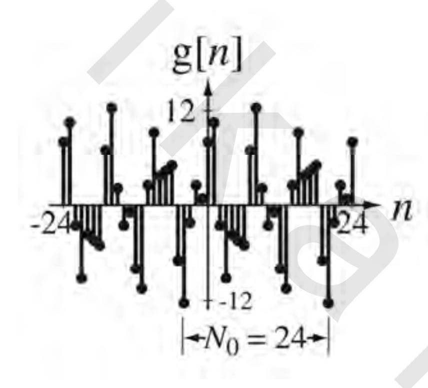
(ب) $g[n]=5\sin(7n/4)+8\cos(14n/8)$

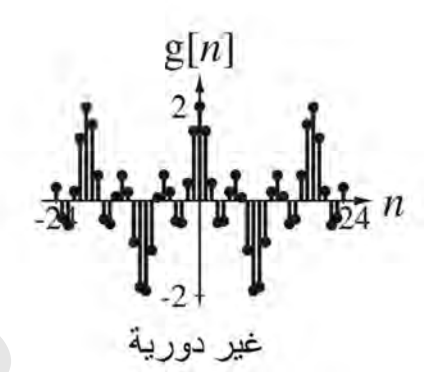
(ج) $g[n]=Re(e^{j\pi n}+e^{-jn/}3)$

(د) $g[n]=Re(e^{jn}+e^{-jn/3})$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (إجابة ت.١٣)

١٤- إذا كانت $g[n]=15\cos(-2\pi n/12)$ و $h[n]=15\cos(2\pi Kn)$ ما هما أصغر قيمتين موجبتين للثابت K التي تكون عندهما $g[n]=h[n]$ لكل قيم n ؟

**الإجابة :** 1/12 و 11/12

## طاقة وقدرة الإشارة

١٥- احسب طاقة الإشارة لكل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n]=A\delta[n]$

(ب) $x[n]=\delta_{N_0}[n]$

(ج) $x[n]=\text{ramp}[n]$

(د) $x[n]=\text{ramp}[n]-2\text{ramp}[n-4]+\text{ramp}[n-8]$

**الإجابة :** $A^2$ و ∞ و 44 و ∞

١٦- تتكون إشارة من التتابع الترددي الدوري التالي ... ,2- ,4 ,2- ,2- ,24- ,4 ... ، ما هو متوسط قدرة هذه الإشارة ؟

**الإجابة :** 10

١٧- الإشارة x[n] دورية ودورتها No=6. بعض القيم المختارة لـ x[n] هي : x[0]=3 و x[-1]=1 و x[-4]=-2 و x[-8]=-2 و x[3]=5 و x[7]=-1 و x[10]=-2 و x[-3]=5 ، ما هو متوسط قدرة هذه الإشارة ؟

**الإجابة :** 7.333

١٨- احسب متوسط قدرة الإشارة لإشارة دورية معرفة على دورة واحدة بالعلاقة :

x[n]=2n ، عندما $-2 \le n < 2$.

**الإجابة :** 6

١٩- احسب متوسط قدرة الإشارة لـ $x[n]=-5+3\sin(2\pi n/4)$.

**الإجابة :** 29.5

٢٠- احسب متوسط قدرة الإشارة للإشارات التالية :

(أ) x[n]=A

(ب) X[n]=u[n]

(ت) $x[n]=\delta_{No}[n]$

(ث) x[n]=ramp[n]

**تمارين بدون إجابات**

**دوال الإشارات**

٢١- ارسم الدوال الأسية والجيبية التالية :

(أ) $g[n]=-4\cos(2\pi n/10)$

(ب) $g[n]=-4\cos(2.2\pi n/10)$

(ج) $g[n]=-4\cos(1.8\pi n/10)$

(د) $g[n]=2\cos(2\pi n/6) - 3\sin(2\pi n/6)$

(ه) $g[n]=(3/4)^n$

(و) $g[n]=2(0.9)^n \sin(2\pi n/6)$

٢٢- للدوال المعرفة على اليسار، احسب قيمة الدالة التي على اليمين :

(أ) g[3] $g[n]=\frac{3n+6}{10}e^{-2n}$

(ب) g[5] $g[n] = Re\left(\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$

(ج) g[4] $g[n]=(j2\pi n)^2+j10\pi n-4$

**الإزاحة والتحجيم**

٢٣- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=2u[n+2]$

(ب) $g[n]=u[5n]$

(ت) $g[n]=-2ramp[-n]$

(ث) $g[n]=10ramp[n/2]$

(ج) $g[n]=7\delta[n-1]$

(ح) $g[n]=7\delta[2(n-1)]$

(خ) $g[n]=-4\delta[2n/3]$

(د) $g[n]=-4\delta[2n/3.1]$

(ذ) $g[n]=8\delta_4[n]$

(ر) $g[n]=8\delta_4[2n]$

٢٤- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=u[n]+u[-n]$

(ب) $g[n]=u[n]-u[-n]$

(ت) $g[n]=\cos(2\pi n/12)\delta_3[n]$

(ث) $g[n]=\cos(2\pi n/12)\delta_3[n/2]$

(ج) $g[n] = \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{12}\right)u[n+1] - \cos\left(\frac{2\pi n}{12}\right)u[n]$

(ح) $g[n] = \sum_{m=0}^{n} \cos\left(\frac{2\pi m}{12}\right)u[m]$

(خ) $g[n] = \sum_{m=0}^{n}(\delta_4[m] - \delta_4[m-2])$

(د) $g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n}(\delta_4[m] + \delta_3[m])(u[m+4] - u[m-5])$

(ذ) $g[n]=\delta_2[n+1]-\delta_2[n]$

(ر) $g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n+1} \delta[m] - \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

٢٥- ارسم المقدار والزاوية لكل من الدوال التالية مع K :

(أ) $g[k]=20\sin(2\pi K/8)e^{-j\pi K/4}$

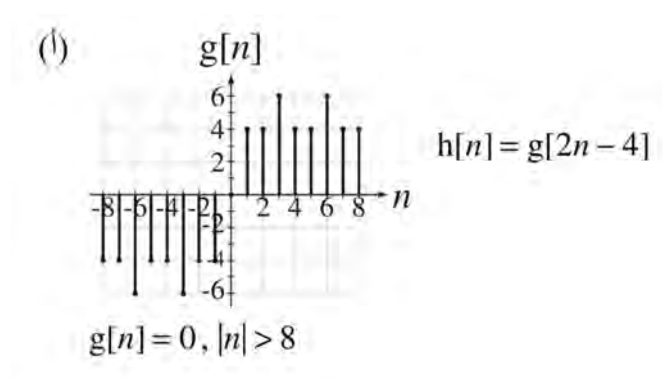
(ب) $g[k]=(\delta[K+8]-2\delta[K+4]+\delta[K]-2\delta[K-4]+\delta[K-8])e^{j\pi k/8}$

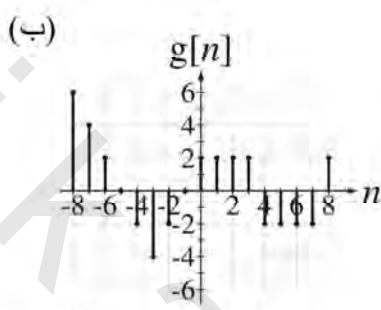
٢٦- باستخدام ماتلاب، لكل دالة من الدوال التالية ارسم الدالة الأصلية والدالة المزاحة و/أو المحجمة :

(أ) $g[n] = \begin{cases} 5, & n \le 0 \\ 5-3n, & 0 < n \le 4 \\ -23+n^2, & 4 < n \le 8 \\ 41, & n > 8 \end{cases}$ ، ارسم g[3n] مع n

(ب) $g[n]=10\cos(2\pi n/20)\cos(2\pi n/4)$ ، ارسم 4g[2(n+1)] مع n

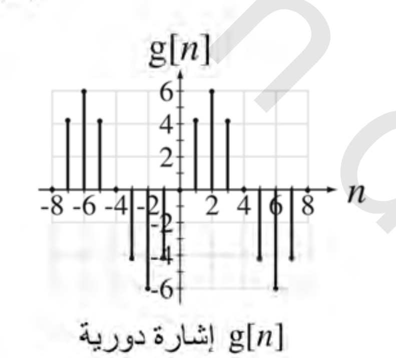
٢٧- افترض الدالة المحددة في شكل (ت.٢٧)، ارسم الدالة h[n] الموضحة :




$h[n] = g[n/2]$

(ت)




$h[n] = g[n/2]$

**شكل رقم** (ت.٢٧)

٢٨- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=5\delta[n-2]+3\delta[n+1]$

(ب) $g[n]=5\delta[2n]+3\delta[4(n-2)]$

(ج) $g[n]=5(u[n-1]-u[4-n])$

(د) $g[n]=8\cos(2\pi n/7)$

(ه) $g[n]=-10e^{n/4}u[n]$

(و) $g[n]=-10(1.284)^{n}u[n]$

(ز) $g[n] = |(j/4)^{n}u[n]|$

(ح) $g[n]=ramp[n+2]-2ramp[n]+ramp[n-2]$

(ط) $g[n]=5\cos(2\pi n/8)u[n/2]$

٢٩- ارسم مقدار وزاوية كل من الدوال التالية مع k في المدى $-10<k<10$

(أ) $X[k]=\frac{1}{1+jk/2}$

(ب) $X[k]=\frac{jk}{1+jk/2}$

(ج) $X[k]=\delta_2[k]e^{-j2\pi k/4}$

## الفرق والتكامل

٣٠- ارسم تراكم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=\cos(2\pi n)u[n]$

(ب) $g[n]=\cos(4\pi n)u[n]$

٣١- في المعادلة $\sum_{m=-\infty}^{n} u[m] = g[(n-n_0)/N_w]$

(أ) ما هو اسم الدالة g؟

(ب) أوجد قيمة كل من $n_0$ و $N_w$.

٣٢- ما هي القيمة العددية لكل من التراكمات التالية :

(أ) $\sum_{n=0}^{10} ramp[n]$

(ب) $\sum_{n=0}^{6} 1/2^n$

(ج) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]/2^n$

(د) $\sum_{n=-10}^{10} \delta_3[n]$

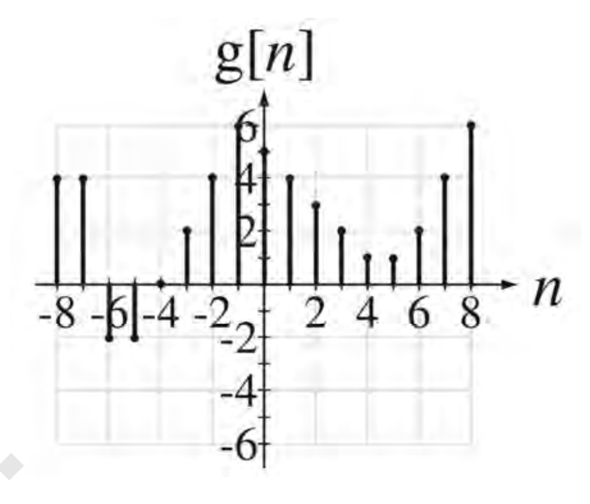
(ه) $\sum_{n=-10}^{10} \delta_3[2n]$

## الإشارات الزوجية والفردية

٣٣- احسب وارسم مقدار وزاوية الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة "المتقطعة الـ k" التالية :

$$G[k]=\frac{10}{1-j4k}$$

٣٤- احسب وارسم الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة الموضحة في شكل (ت.٣٤).




**شكل (ت.٣٤)**

٣٥- ارسم الجزء الزوجي والجزء الفردي للإشارات التالية :

(أ) $x[n]=\delta_3[n-1]$

(ب) $x[n]=15\cos(2\pi n/9+\pi/4)$

**الإشارات الدورية**

٣٦- باستخدام ماتلاب، ارسم كل من الدوال التالية. إذا كانت أي واحدة من هذه الدوال دورية، احسب الدورة تحليلياً وتحقق من هذه الدورة من الرسم :

(أ) $g[n]=\sin(3\pi n/2)$

(ب) $g[n]=\sin(2\pi n/3)+\cos(10\pi n/3)$

(ج) $g[n]=5\cos(2\pi n/8)+3\sin(2\pi n/5)$

(د) $g[n]=10\cos(n/4)$

(ه) $g[n]=-3\cos(2\pi n/7)\sin(2\pi n/6)$

(العلاقات المثلثية ستكون مفيدة هنا)

**طاقة وقدرة الإشارة**

٣٧- احسب طاقة الإشارة لكل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n]=2\delta[n]+5\delta[n-3]$

(ب) $x[n]=u[n]/n$

(ج) $x[n]=(-1/3)^n u[n]$

(د) $x[n]=\cos(\pi n/3)(u[n]-u[n-6])$

٣٨- احسب متوسط قدرة كل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n]=(-1)^n$

(ب) $x[n]=A\cos(2\pi F_0 n+\theta)$

(ج) $x[n]=\begin{cases} A, & n=\cdots,0,1,2,3,8,9,10,11,16,17,18,19,\ldots \\ 0, & n=\cdots,4,5,6,7,12,13,14,15,20,21,22,23,\ldots \end{cases}$

(د) $x[n]=e^{-j\pi n/2}$

٣٩- إذا كانت $x[n]=\begin{cases} 6n, & -2\leq n<2 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ و $y[n]=x[2n]$ ، احسب طاقة الإشارة $y[n]$.

الفصل الرابع

# وصف الأنظمة

## (٤,١) المقدمة والأهداف

لقد تم تحديد كلمتي الإشارة والنظام بصورة عامة في الفصل ١. تحليل الأنظمة عبارة عن طريقة منضبطة تم تطويرها عن طريق المهندسين. يستخدم المهندسون النظريات والأدوات الرياضية لتطبيقها من أجل معرفة عالم الطبيعة لتصميم أشياء تقوم بأعمال معينة تكون مفيدة للبشرية. هذه الأشياء التي يقوم المهندسون بتصميمها هي الأنظمة، ولكن كما أشرنا في الفصل ١، فإن تعريف النظام يكون أوسع من ذلك. إن مصطلح أو لفظ "نظام" يكون أوسع من أن يوجد له تحديد أو تعريف معين. إن النظام من الممكن أن يكون تقريباً أي شيء.

واحدة من طرق تعريف النظام هي أنه: أي شيء يؤدي أو ينفذ دالة معينة. طريقة أخرى لتعريف النظام هي أنه: أي شيء يستجيب عندما تتم إثارته. يمكن للنظام أن يكون نظاماً كهربياً، أو نظاماً ميكانيكياً، أو نظاماً حيوياً، أو نظام حاسوب، أو نظاماً اقتصادياً، أو نظاماً سياسياً، وهكذا. الأنظمة المصممة بواسطة المهندسين تكون أنظمة صناعية، والأنظمة المشكلة حيوياً على مدار فترة زمنية خلال التطور والارتقاء الحضاري تكون أنظمة طبيعية. بعض الأنظمة يمكن تحليلها بالكامل باستخدام الرياضيات، وبعض الأنظمة تكون على درجة من التعقيد يصعب معها التحليل الرياضي جداً. بعض الأنظمة لم يتم الفهم الدقيق لها نتيجة الصعوبة في قياس خواصها. هندسياً، فإن مصطلح النظام يقصد به النظام الاصطناعي الذي تتم إثارته ببعض الإشارات وهو يستجيب بإشارات أخرى.

لقد تم تطوير العديد من الأنظمة في الأزمنة السابقة عن طريق الحرفيين الذين صمموا ونفذوا أنظمتهم اعتماداً على خبراتهم وملاحظاتهم، مع الاستخدام الظاهري للرياضيات المبسطة. أحد الفروق المهمة بين المهندسين والحرفيين تكمن في استخدام المهندسين للرياضيات المكثفة والعالية، وبالذات حساب التفاضل والتكامل لوصف وتحليل الأنظمة.

**أهداف الفصل**

١- تقديم مسميات أو مصطلحات تصف الخواص المهمة لأي نظام.
٢- توضيح عملية النمذجة للأنظمة باستخدام المعادلات التفاضلية والفرقية والمخططات الصندوقية.
٣- تطوير طرق لتصنيف الأجهزة تبعا لخواصها .

## (٤,٢) أنظمة الزمن المستمر

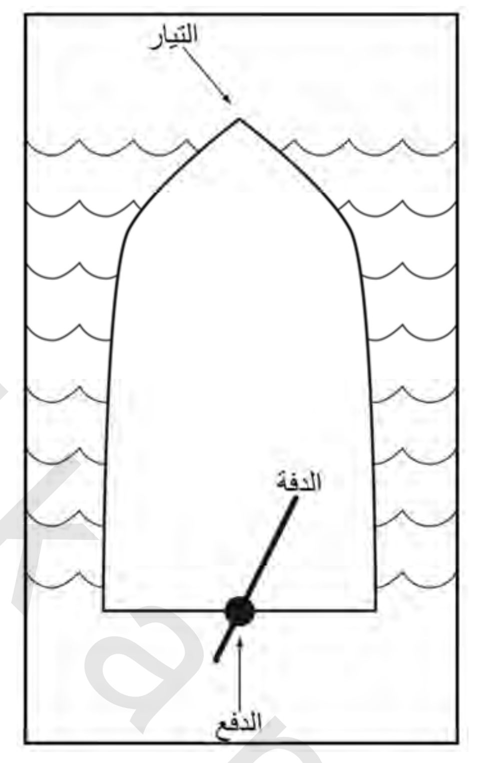
**نمذجة الأنظمة**

واحدة من أهم العمليات في تحليل الإشارات والأنظمة هي نمذجة هذه الأنظمة: بمعنى وصف هذه الأنظمة رياضياً أو منطقياً أو تخطيطياً. النموذج الجيد هو النموذج الذي يشتمل على كل التأثيرات المهمة في النظام بدون أن يبلغ درجة من التعقيد يصعب معها استخدامه.

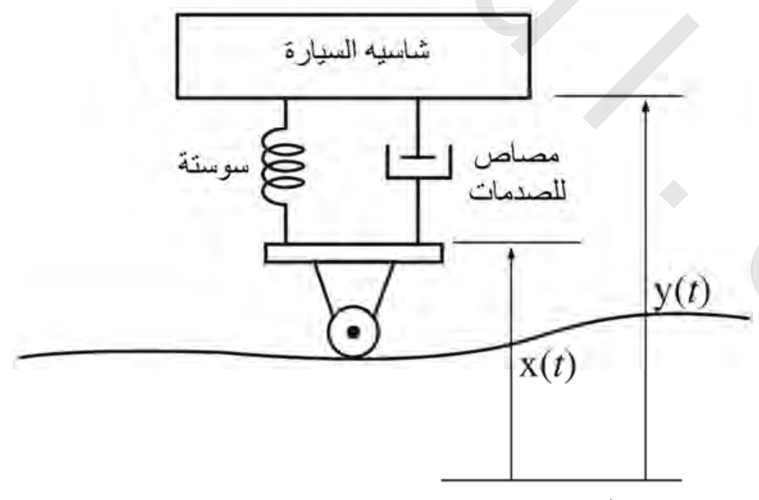
أحد المصطلحات الشائعة في تحليل الأنظمة هي أنه إذا تمت إثارة النظام عن طريق إشارات دخل يتم تطبيقها على واحد أو أكثر من مداخل النظام، فإنه يظهر واحد أو أكثر من الاستجابات أو إشارات الخرج على واحد أو أكثر من مخارج النظام. إثارة النظام تعني تطبيق طاقة معينة تتسبب في أن يستجيب النظام. من الأمثلة على ذلك القارب الذي يتم دفعة عن طريق موتور وتوجيهه عن طريق الدفة. عملية الدفع التي تتم عن طريق المروحة، ووضع الدفة، وتيار الماء، كلها إثارات للنظام، واتجاه القارب وسرعته هي استجابات لهذا النظام كما في شكل (٤,١).

لاحظ العبارة السابقة التي تقول إن اتجاه وسرعة القارب هي استجابات للنظام، ولكنها لم تقل إنها الاستجابات للنظام، مما قد يعني أنه لا توجد أي استجابات أخرى. عملياً كل نظام يكون له العديد من الاستجابات، بعضها يكون مهماً والآخر لا يكون مهماً. في حالة القارب، تكون سرعة واتجاه القارب من الاستجابات المهمة، ولكن اهتزاز هيكل القارب، والأصوات الصادرة عن تناثر الماء على الجانبين، والأثر المتولد خلف القارب، واهتزازات القارب، والعديد من الظواهر الطبيعية تكون غير مهمة، ومن الممكن إهمالها في التحليل العملى لهذا النظام.

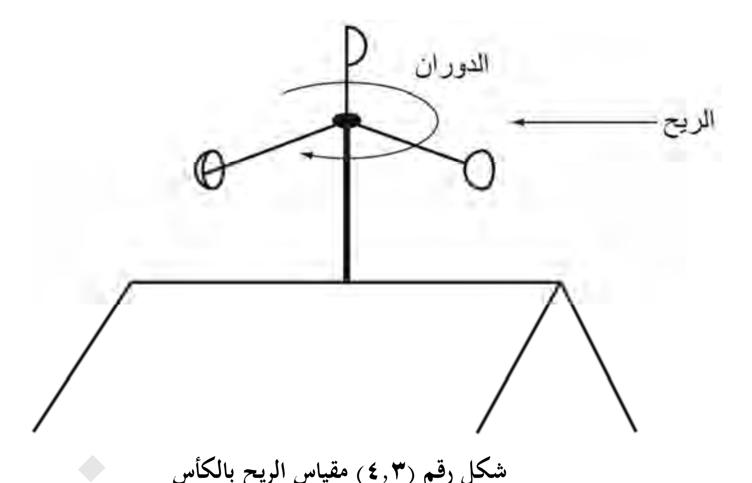
نظام التعليق في السيارة تتم إثارته عن طريق سطح الطريق مع مرور السيارة عليه، وموضع شاسيه (الهيكل المعدني) السيارة بالنسبة للطريق يكون من الاستجابات المهمة، كما في شكل (٤,٢). عندما نقوم بضبط حرارة الحجرة، فإن وضع الثرموستات ودرجة حرارة الحجرة يمثلان إشارتي دخل لنظام تسخين وتبريد الحجرة، وأما استجابة النظام، فهي وجود الهواء الساخن، أو البارد الذي يغير درجة حرارة الحجرة لكي تقترب من الدرجة الموضوعة على الثرموستات (منظم الحرارة).




**شكل رقم (٤,١) مخطط مبسط للقارب**




**شكل رقم (٤,٢) نموذج مبسط لنظام التعليق في السيارة**




**شكل رقم (٤،٣) مقياس الريح بالكأس**

هناك فصيل كامل من الأنظمة، وهو أجهزة القياس، تكون كلها أنظمة وحيدة الدخل ووحيدة الخرج. تتم إثارة هذه الأنظمة عن طريق الظاهرة الطبيعية التي يراد قياسها، وتكون الاستجابة هي مؤشر الجهاز يبين قيمة هذه الظاهرة الطبيعية. من أمثلة الجيدة على ذلك مقياس شدة الريح باستخدام الكؤوس. إن الرياح تثير الجهاز والاستجابة تكون هي سرعة الدوران وهي تعتبر استجابة مهمة كما في شكل (٤،٣).

شيء لا يتم في العادة التفكير فيه كنظام وهو الجسر على أي طريق سريع. ليست هناك إشارة دخل واضحة تنتج استجابة مطلوبة. الجسر المثالي قد لا يستجيب على الإطلاق عند إثارته. تتم إثارة الجسر عن طريق حركة المرور التي تمر عليه، والرياح التي قد تهب عليه، وتيارات الماء التي تدفع قواعده الهيكلية، والجسر يتحرك. من الأمثلة المأساوية التي تبين استجابة الجسر عند إثارته كانت فشل كوبري تاكوما ناروز في ولاية واشنطون. في أحد الأيام شديدة العواصف كانت استجابة الجسر لهذه العواصف هي التأرجح بعشوائية حتى سقط قطعا نتيجة القوى المؤثرة عليه. وهذا يعتبر مثالا مأساويا على الأهمية القصوى للتحليل الجيد. إن الشروط التي يستجيب عندها الجسر بهذه القوة يجب الكشف عنها في عملية التصميم بحيث يمكن تغيير التصميم لتجنب هذه المأساة.

إن خلية حيوية واحدة في الحيوان تعتبر نظاماً غاية في التعقيد، وبالذات مع اعتبار حجمها. يتكون الجسم البشري من عدد هائل من هذه الخلايا، ولذلك فإنه يعتبر تقريباً من الأنظمة التي لا يتصور مدى تعقيدها. ولكنه يمكن نمذجته كنظام أكثر تبسيطا في بعض الأحوال لحساب أحد تأثيراته المنفردة. في الديناميكية الصيدلية يتم في العادة نمذجة الجسم البشري كحجيرة واحدة، أو حجم يحتوي سائل. عملية تعاطي الدواء هو الإثارة وتركيز الدواء في الجسم هو الاستجابة المهمة. معدلات إدخال الدواء وإخراجه تحدد تغير تركيز الدواء مع الزمن.

**المعادلات التفاضلية**

سنعطي فيما يلي بعض الأمثلة على التفكير المستخدم في نمذجة الأنظمة باستخدام المعادلات التفاضلية. هذه الأمثلة قد تم تقديمها مسبقاً في الفصل ١.

**مثال ٤,١**

**نمذجة نظام ميكانيكي**

رجل طوله 1.8 متر واحد و٨ سنتيمترات ووزنه 80 كيلوجراماً قفز وهو مربوطٌ بحبل مطاطي من فوق جسر على أحد الأنهار. الجسر على بعد 200 متر من سطح الماء، وطول الحبل المطاطي غير المشدود يساوي 30 متراً. ثابت السوستة للحبل المطاط هو Ks=11N/m، مما يعني أن الحبل عند شده، فإنه يقاوم هذا الشد بقوة مقدارها 11 نيوتيناً لكل متر استطالة. مطلوب عمل نموذج ديناميكي رياضي للموضع الديناميكي للرجل كدالة في الزمن وارسم موضع الرجل مع الزمن في أول 15 ثانية.

عندما يقفز الرجل من على الجسر فإنه يدخل في سقوط حر حتى يصل الحبل إلى أقصى طول غير مشدود له، وهذا يحدث عندما تكون قدما الرجل عند 30 متر تحت الجسر. الموضع الابتدائي للرجل وسرعته الابتدائية يكونان أصفاراً (سيكون الجسر هو الموضع الابتدائي أو المرجع). موضع الرجل سيساوي تكامل سرعته وسرعته هي تكامل عجلة سقوطه. لذلك ففي أثناء زمن هذا السقوط الابتدائي الحر ستكون سرعته 9.8t m/s، حيث t هي الزمن بالثانية، وموضعه سيكون $4.9t^2$ m تحت الجسر. بالتعويض بالمسافة 30 متراً التي تساوي طول الحبل غير المشدود نحصل على الزمن 2.47s. عند هذا الزمن ستكون سرعته تساوي 24.25 متر على الثانية في اتجاه الأسفل. عند هذه النقطة يتغير التحليل: لأن الحبل المطاط يبدأ تأثيره، وتكون هناك قوتان مؤثرتان على الرجل:

١- الانجذاب لأسفل تحت تأثير الجاذبية الأرضية mg، حيث m هي وزن الرجل، و g هي عجلة الجاذبية الأرضية.

٢- الانجذاب لأعلى تحت تأثير الحبل المطاطي Ks(y(t)-30)، حيث y(t) هي الموضع الرأسي للرجل تحت الجسر كدالة في الزمن.

وعلى ذلك، فباستخدام قاعدة أن القوة تساوي الكتلة في العجلة وحقيقة أن العجلة هي التفاضل الثاني للموضع، فإنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$mg - K_s(y(t)-30)=my''(t)$$

أو

$$my''(t)+K_s y(t)=mg+30K_s$$

وهذه تمثل معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية، ذات معاملات ثابتة وغير متجانسة. حل هذه المعادلة هو مجموع الحل المتجانس والحل الخاص.

الحل المتجانس هو مجموع خطي من الدوال المميزة للمعادلة. الدوال المميزة هي صور دالية يمكنها أن تحقق هذه الصورة من المعادلة. توجد هناك دالة مميزة لكل قيمة مميزة. القيم المميزة هي المعاملات في الدوال المميزة التي

تجعلها تحقق هذه المعادلة بالذات. القيم المميزة هي حلول المعادلة المميزة، وهي $m\lambda^2+K_s=0$. حلول هذه المعادلة تكون على الصورة $\lambda = \pm\sqrt{K_s/m}$. (انظر الملحق ث للمزيد عن حلول المعادلات التفاضلية). حيث إن القيم المميزة تكون قيماً مركبة، فإنه يكون من المريح أكثر أن نعبر عن هذه الحلول كمجموع من دوال الجيب وجيب التمام الحقيقية بدلاً من اثنين من الدوال الأسية المركبة. وعلى ذلك فإن الحل المتجانس يمكن التعبير عنه في الصورة :

$$y_h(t) = K_{h1}\sin\left(\sqrt{K_s/mt}\right) + K_{h2}\cos\left(\sqrt{K_s/mt}\right)$$

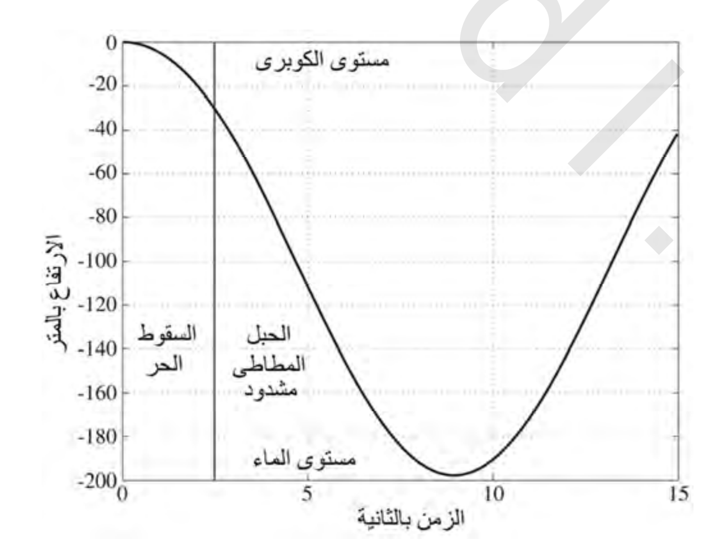
الحل الخاص يكون في صورة مجموع خطي للدالة المؤثرة وكل تفاضلاتها الفريدة. في هذه الحالة تكون الدالة المؤثرة ثابتاً وكل تفاضلاتها تساوي صفراً، ولذلك فإن الحل الخاص يكون على الصورة $y_p(t)=K_p$ وهي عبارة عن ثابت. بالتعويض في الحل الخاص نحصل على: $y_p(t)=mg/K_s+30$. الحل الكلي يساوي مجموع الحل المتجانس والخاص، كما يلي :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K_{h1}\sin\left(\sqrt{\frac{K_s}{m}}\,t\right) + K_{h2}\cos\left(\sqrt{\frac{K_s}{m}}\,t\right) + \text{mg/Ks} + 30$$

الشروط الحدودية، هي: $y(2.47)=30$ و $y'(2.47)=24.25$. بالتعويض بقيم عددية للمعاملات، وتطبيق الشروط الحدودية نحصل على :

$$y(t)=.16.85\sin(0.3708t).95.25\cos(0.3708t)+101.3, \quad t>2.47$$

التغيرات الابتدائية في موضع الرجل الرأسي مع الزمن تكون قطع مكافئ. بعد ذلك وعند 2.47s يصبح الحل جيبياً بحيث يصبح الحلان وتفاضلاتهما مستمرين عند الزمن 2.47s كما هو موضح في شكل (٤،٤).




**شكل رقم (٤،٤) الموضع الراسي للرجل مع الزمن (مستوى الجسر هو المستوى صفر).**

في المثال ٤,١ تصف المعادلة التالية النظام:

$$My''(t)+K_s y(t)=mg+30K_s$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة. الجانب الأيمن من المعادلة يسمى الدالة المؤثرة. إذا كانت الدالة المؤثرة صفراً، يكون لدينا معادلة تفاضلية متجانسة ويكون حل هذه المعادلة هو الحل المتجانس. في تحليل الإشارات والأنظمة يطلق على هذا الحل استجابة الدخل الصفري. هذا الحل يكون مختلفاً عن الصفر إذا كانت الشروط الابتدائية للنظام مختلفة عن الصفر، بمعنى أن النظام به طاقة مخزنة. إذا كان النظام ليس به طاقة مخزنة والدالة المؤثرة لا تساوي الصفر، فإن هذا الحل يسمى استجابة الحالة صفر.

هناك العديد من العمليات الطبيعية التي تم إهمالها في النموذج الحسابي المستخدم في المثال ٤,١ ومنها كمثال:

١- مقاومة الهواء
٢- الطاقة المفقودة في الحبل المطاط
٣- المركبة الأفقية لسرعة الرجل
٤- دوران الرجل أثناء السقوط
٥- تغير عجلة الجاذبية كدالة في الموضع
٦- تغير مستوى الماء في النهر

إهمال هذه العوامل جعل النموذج الحسابي أكثر بساطة عنمًّا كان يمكن عليه لو لم يتم إهمال هذه العوامل. نمذجة الأنظمة تكون في الغالب مفاضلة بين الدقة وبساطة النموذج.

**مثال ٤,٢**

**نمذجة نظام موائع ميكانيكي**

خزان مياه اسطواني مساحة مقطعة $A_1$ ومستوى الماء فيه هو $h_1(t)$ وتتم تغذيته من مدخل تدفق حجمي للماء $f_1(t)$ وله فوهة خروج عند الارتفاع $h_2$ مساحة وقطعها الفعالة $A_2$ يخرج من خلالها تدفق حجمي $f_2(t)$ كما في شكل (٤,٥). أكتب المعادلة التفاضلية لمستوى الماء في الخزان كدالة في الزمن وارسم مستوى الماء مع الزمن للخزان الذي يكون في البداية فارغاً، مع الافتراضات المختلفة للتدفق الداخل.

مع افتراضات معينة للتبسيط، فإن سرعة الماء الخارج من الفوهة يعطي بمعادلة تورشيللي Torcelli كما يلي:

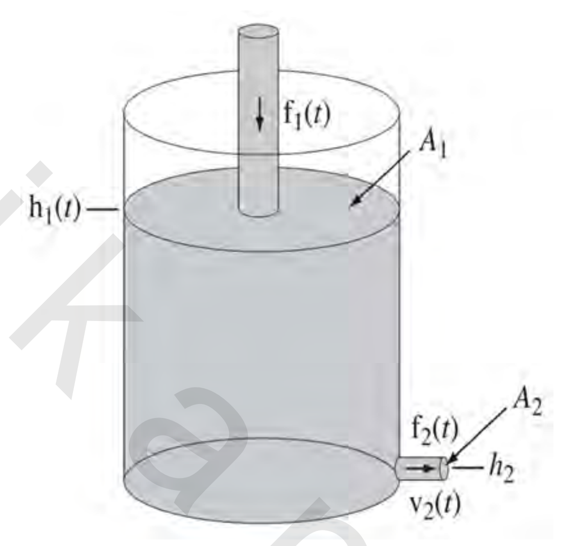
$$v_2(t) = \sqrt{2g[h_1(t) - h_2}$$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8 m/s^2$. حجم الماء في الخزان يساوي $A_1 h_1(t)$ ومعدل تغيره يساوي التدفق الداخل مطروحاً منه التدفق الخارج:

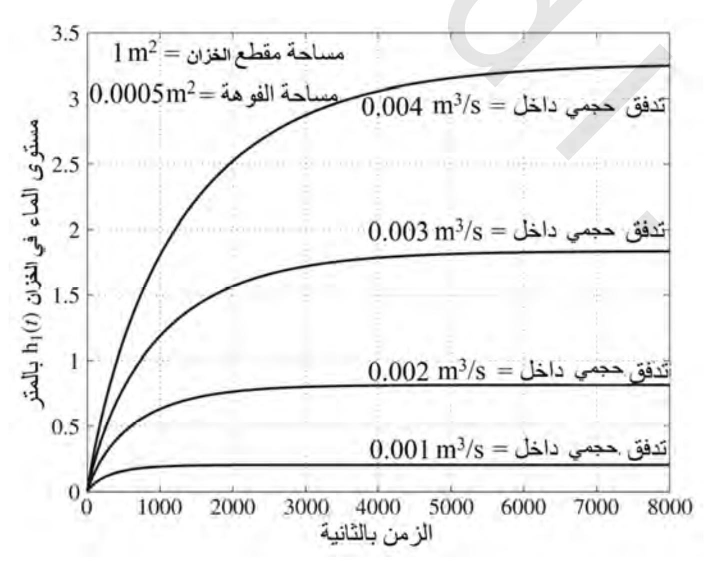
$$\frac{d}{dt}(A_1 h_1(t)) = f_1(t) - f_2(t)$$

والمعدل الحجمي للتدفق الخارج يساوي حاصل ضرب المساحة الفعالة $A_2$ للفوهة وسرعة التدفق الخارج، $f_2(t)=A_2v_2(t)$. بربط هذه المعادلات يمكننا كتابة معادلة تفاضلية واحدة لمستوى الماء في الخزان كما يلي:

$$A_1 \frac{d}{dt}(h_1(t)) + A_2\sqrt{2g[h_1(t) - h_2]} = f_1(t)$$ المعادلة رقم (٤,١)




**شكل رقم (٤,٥) خزان بفوهة يتم ملأه من أعلى.**

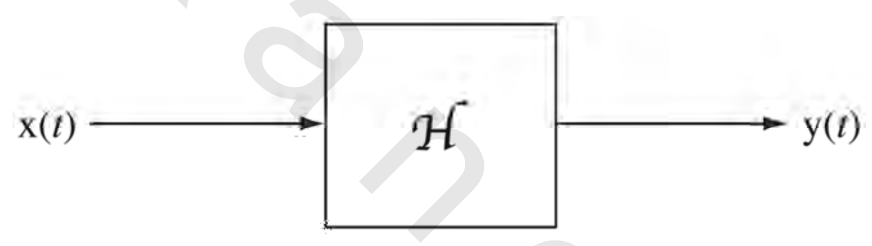



**شكل رقم (٤,٦) مستوى الماء مع الزمن لأربع حالات مختلفة من التدفق الحجمي الداخل مع اعتبار الخزان فارغاً في البداية**

شكل (٤.٦) يبين تغير مستوى الماء في الخزان مع الزمن لأربع حالات من تدفق الدخل الثابت مع اعتباره كان فارغا في البداية. مع تدفق الماء الداخل، يزداد مستوى الماء، وزيادة مستوى الماء يزيد من تدفق الماء الخارج. يظل مستوى الماء في الارتفاع إلى أن يصبح التدفق الخارج يساوي التدفق الداخل، وبعد هذا الزمن يثبت مستوى الماء. كما ذكرنا في الفصل١، عندما يزداد التدفق الداخل بمقدار الضعف، فإن المستوى النهائي للماء يزداد بمقدار أربع مرات، وهذا نتيجة حقيقة أن المعادلة التفاضلية (٤.١) كانت غير خطية. طريقة لإيجاد حل هذه المعادلة سيتم تقديمها بعد ذلك في هذا الفصل.

**المخطط الصندوقي**

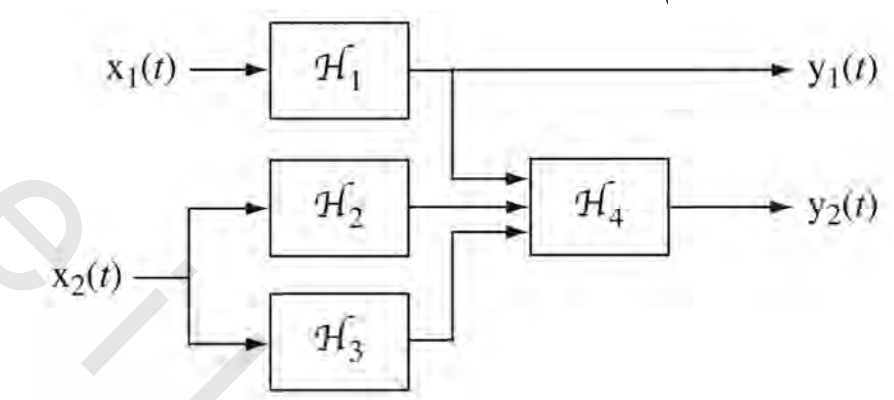
في تحليل الأنظمة يكون من المفيد جداً التعبير عن هذه الأنظمة بالمخططات الصندوقية. أي نظام بدخل واحد وخرج واحد يمكن التعبير عنه بالمخطط الموضح في شكل (٤.٧). الإشارة عند الدخل x(t) يتم العمل عليها بالمعامل H لكي تنتج الإشارة y(t) عند الخرج. المعامل H يمكن أن يقوم بأي عملية تقريباً يمكنك أن تتخيلها.




**شكل رقم (٤.٧) نظام بدخل واحد وخرج واحد.**

في العادة يتم وصف وتحليل النظام كتجميع من عدد من المكونات. أي واحد من هذه المكونات يكون نظاماً أبسط، وأصغر، وفي العادة يكون نظاماً قياسياً بمعنى معين، ويكون معلوم الخواص. ما هو المكون بالتقابل مع النظام يعتمد على الحالة أو الموقف. بالنسبة لمصمم أي دائرة كهربية، تكون المكونات هي المقاومات أو المكثفات أو الملفات أو مكبرات العمليات، وهكذا، وتكون الأنظمة هي مثلاً مكبرات القدرة، أو المحول الرقمي التماثلي، أو دائرة التعديل، أو المرشح، وهكذا. بالنسبة لمصمم أي نظام اتصالات، تكون المكونات هي المكبرات أو دوائر التعديل، أو المرشحات، أو الهوائيات، والأنظمة تكون في هذه الحالة وصلات ميكروية، أو خطوط سنترال من الألياف الضوئية، أو مكاتب سنترال تليفونات. بالنسبة لمصمم السيارة، تكون المكونات هي، العجلات، أو الموتور، أو المصدات، أو الأضواء، أو المقاعد، ويكون النظام هو السيارة نفسها. في الأنظمة المعقدة الكبيرة مثل الخطوط الجوية التجارية، وشبكات التليفونات، والناقلات العملاقة، ومحطات الطاقة يكون هناك العديد من المستويات في ترتيب المكونات والأنظمة.

بمعرفة كيفية التوصيف الرياضي لكل المكونات في أي نظام وكيف تتفاعل هذه المكونات مع بعضها، فإنه بإمكان المهندس أن يتوقع باستخدام الرياضيات، كيف سيعمل النظام بالكامل بدون بنائه في الحقيقة واختباره. شكل (٤،٨) يبين مخططاً صندوقياً لنظام مكون من مكونات.




**شكل رقم (٤،٨) نظام له دخلان وخرجان ويتكون من أربع مكونات موصلة مع بعضها بعضا.**

في المخططات الصندوقية يمكن لكل إشارة دخل أن تذهب لأي عدد من البلوكات، ويمكن لكل إشارة خرج من أي بلوك أن تذهب لأي عدد آخر من البلوكات. هذه الإشارات لا تتأثر نتيجة توصيلها إلى أي عدد من البلوكات. لا يوجد هناك تأثير حملي كما هو الحال في تحليل الدوائر الكهربية. بالمقارنة بالدوائر الكهربية، فإنه يمكن التفكير في هذه البلوكات على أن لها معاوقة دخل لانهائية ومعاوقة خرج تساوي صفراً.

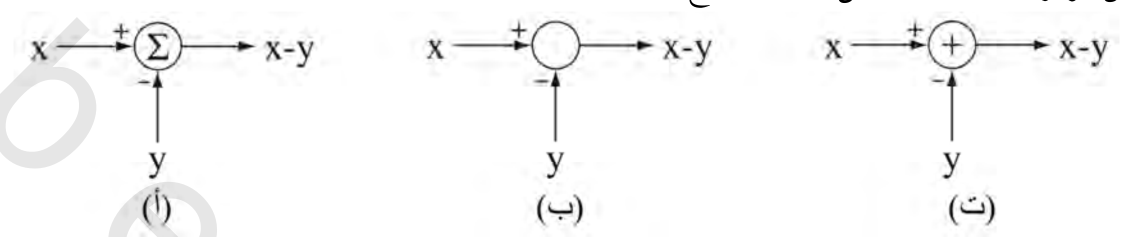
عند رسم المخطط الصندوقي لأي نظام، فإن بعض العمليات تظهر باستمرار بحيث تم تخصيص رمز تخطيطي للبلوكات الخاصة بها. هذه العمليات هي المكبرات، ووصلات التجميع، والتكامل.

المكبر يضرب إشارة دخله في ثابت (معامل التكبير) ليعطي الاستجابة الخاصة به. يتم استخدام رموز مختلفة لعملية التكبير في التطبيقات المختلفة لتحليل الأنظمة عن طريق المؤلفين المختلفين. شكل (٤،٩) يبين الأشكال الأكثر شيوعاً. سنستخدم الرمز الموجود في شكل (٤،٩ ت) للتعبير عن المكبر في هذا الكتاب.

x → $K$ → $K$x (أ)　x → $K$ → $K$x (ب)　x —$K$→ $K$x (ت)

**شكل رقم (٤،٩) التعبيرات التخطيطية المختلفة للمكبر في أي مخطط صندوقي للنظام.**

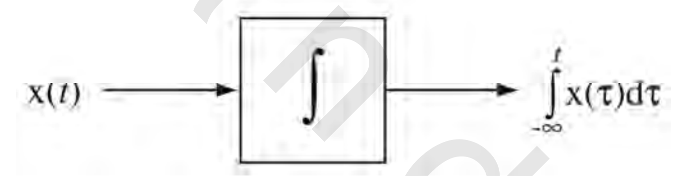
نقطة التجميع تقبل العديد من إشارات الدخل وتعطي مجموع هذه الإشارات. بعض الإشارات من الممكن عكس إشارتها قبل أن يتم جمعها، وعلى ذلك فهذا المكون من الممكن أن يعطي الفرق بين إشارتين. شكل (٤،١٠) يبين بعض الرموز المستخدمة لتمثيل نقطة التجميع.




**شكل رقم (٤،١٠) ثلاثة تمثيلات مختلفة لنقاط التجميع في المخطط الصندوقي للأنظمة.**

سنستخدم الرمز الموجود في شكل (٤،١٠ ت) للتعبير عن نقطة التجميع. إذا لم توجد إشارة الجمع، أو الطرح بجانب الدخل، فإنه سيفترض وجود إشارة الجمع.

المكامل، هو مكون عند إثارته بأي إشارة، فإنه يعطي تكامل هذه الإشارة في الخرج كما هو في شكل (٤،١١).




**شكل رقم (٤،١١) رمز المكامل المستخدم في الرسم الصندوقي.**

هناك رموز أيضاً للأنواع الأخرى من المكونات التي تقوم بعمليات خاصة في معالجة الإشارة. كل نظام هندسي تكون له مجموعة الرموز المفضلة له في العمليات التي تكون شائعة في هذا النظام. مخطط النظام الهيدروليكي قد يحتوي رموزاً خاصة للصمام، والبخاخ، والمضخة، والفوهة أو مقدمة الخرطوم. مخطط النظام الضوئي قد يحتوي رموزاً لمصدر الليزر، ومقسم الشعاع، والمستقطب، والعدسة أو المرآة.

في الإشارات والأنظمة هناك مراجع شائعة لنوعين من الأنظمة العامة وهما، نظام الحلقة المفتوحة، ونظام الحلقة المغلقة. نظام الحلقة المفتوحة نظام يستجيب مباشرة لأي إشارة دخل. نظام الحلقة المغلقة نظام يستجيب لإشارة الدخل ولكنه أيضاً يستشعر إشارة الخرج ويغذيها عكسياً لتجمع مع أو تطرح من إشارة الدخل من أجل التحقيق الأفضل لمتطلبات النظام. أي جهاز قياس يكون مكوناً من نظام حلقة مفتوحة. خرج الجهاز يبين ما هي الإثارة بدون أن يحدث أي تغيير فيها. سائق السيارة يعطي الإشارة لتتحرك بسرعة معينة وفي اتجاه معين عن طريق الضغط على دواسة البنزين أو الفرامل وعن طريق لف عجلة القيادة. مع حركة السيارة على الطريق، فإن السائق

يستشعر باستمرار سرعة السيارة وموضع السيارة بالنسبة للطريق والسيارات الأخرى. اعتماداً على ما يستشعره السائق، فإنه يعدل إشارات الدخل (حركة عجلة القيادة، دواسة البنزين، والفرامل) للحفاظ على الاتجاه المطلوب للسيارة، والحفاظ أيضاً على السرعة الآمنة للسيارة والموضع الأمين أيضاً لها.

**مثال ٤,٣**

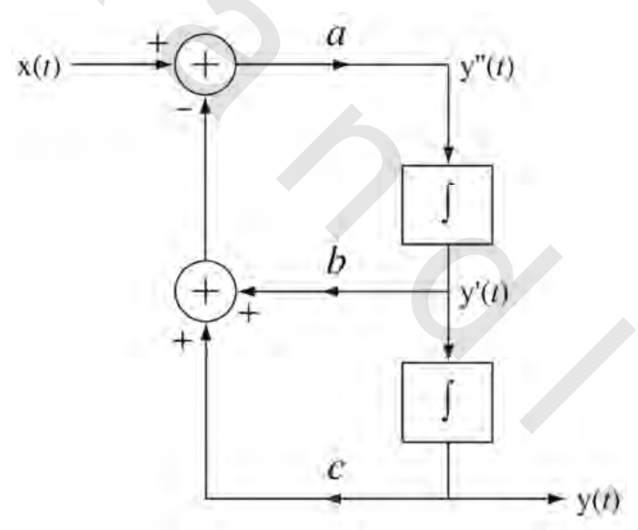
**نمذجة نظام تغذية عكسية مستمر زمنياً**

بالنسبة للنظام الموجود في شكل (٤,١٢):

(أ) أوجد استجابة الدخل الصفري، بمعنى الاستجابة عندما $x(t)=0$، إذا كانت القيمة الابتدائية لـ $y(t)$ هي $y(0)=1$، معدل تغير $y(t)$ الابتدائي هو $y'(t)|_{t=0}=0$، و $a=1$ و $b=0$ و $c=4$.

(ب) افتراض أن $b=5$ وأوجد استجابة الدخل الصفري للشروط الابتدائية نفسها الموضحة في الجزء (أ).

(ج) افترض أن النظام يكون في البداية مستقراً وافترض أن إشارة الدخل تساوي وحدة الخطوة. احسب استجابة الحالة صفر عندما $a=1$ و $b=-1, 1, 5$.




**شكل رقم (٤,١٢) نظام تغذية عكسية مستمر زمنياً.**

(أ) من المخطط الصندوقي يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية لهذا النظام عن طريق إدراك أن إشارة الخرج من نقطة التجميع هي $y''(t)$ وأنها يجب أن تساوي مجموع إشارات الدخل.

$$y''(t)=x(t).[by'(t)+cy(t)]$$

عندما $b=0$ و $c=4$، فإن الاستجابة ستكون موصوفة بالمعادلة $y''(t)+4y(t)=x(t)$. الدالة المميزة ستكون هي الأس المركب $e^{st}$ والقيم المميزة هي حلول المعادلة المميزة $s^2+4=0$ والتي ستكون $s_{1,2}=\pm j2$. الحل المتجانس سيكون $y(t)=K_{h1}e^{j2t}+K_{h2}e^{-j2t}$. حيث إنه لا توجد إثارة للنظام، فإن هذا الحل سيكون هو أيضاً الحل الكلي.

بتطبيق الشروط الابتدائية فإن $y(0)=K_{h1}+K_{h2}=1$ و $y'(t)|_{t=0}=j2K_{h1}-j2K_{h2}=0$ ، وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $K_{h1}=K_{h2}=0.5$. وعلى ذلك فالحل الكلي سيكون $y(t)=0.5(e^{j2t}+e^{-j2t})= \cos(2t), \quad t\geq 0$. أي أنه عندما $b=0$ ، فإن استجابة الدخل الصفري ستكون جيبية.

(ب) الآن عندما $b=5$ ، فإن المعادلة التفاضلية ستكون: $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=x(t)$ ، وستكون القيم المميزة $s_{1,2}=-1, -4$. وسيكون حل المعادلة هو: $y(t)=K_{h1}e^{-t}+K_{h2}e^{-4t}$. بتطبيق الشروط الابتدائية، $y(0)=K_{h1}+K_{h2}=1$ و $y'(t)|_{t=0}=-K_{h1}-4K_{h2}=0$ ، بذلك يمكن إيجاد قيمة الثوابت كالتالي: $K_{h1}=4/3$ و $K_{h2}=-1/3$ وبالتالي نحصل على: $y(t)=(4/3)e^{-t}-(1/3)e^{-4t}, \quad t\geq 0$. هذه الاستجابة للدخل الصفري تقترب من الصفر عندما $t>0$.

(ج) في هذه الحالة تكون $x(t)$ لا تساوي الصفر وسيحتوي الحل الكلي للمعادلة التفاضلية على الحل الخاص أيضاً. بعد $t=0$ تكون إشارة الدخل ثابتة، وبالتالي سيكون الحل الخاص ثابتاً هو الآخر ويساوي $K_p$. ستكون المعادلة التفاضلية كالتالي: $y''(t)+by'(t)+4y(t)= x(t)$. بالحل لإيجاد قيمة $K_p$ سنجد أن $K_p=0.25$ وسيكون الحل الكلي كالتالي: $y''(t) = K_{h1}e^{s_1 t}+K_{h2}e^{s_2 t}+0.25$ حيث $s_{1,2}=\left(-b\pm\sqrt{b^2-16}\right)/2$. ستكون الاستجابة وتفاضلها أصفاراً عندما $t=0$.

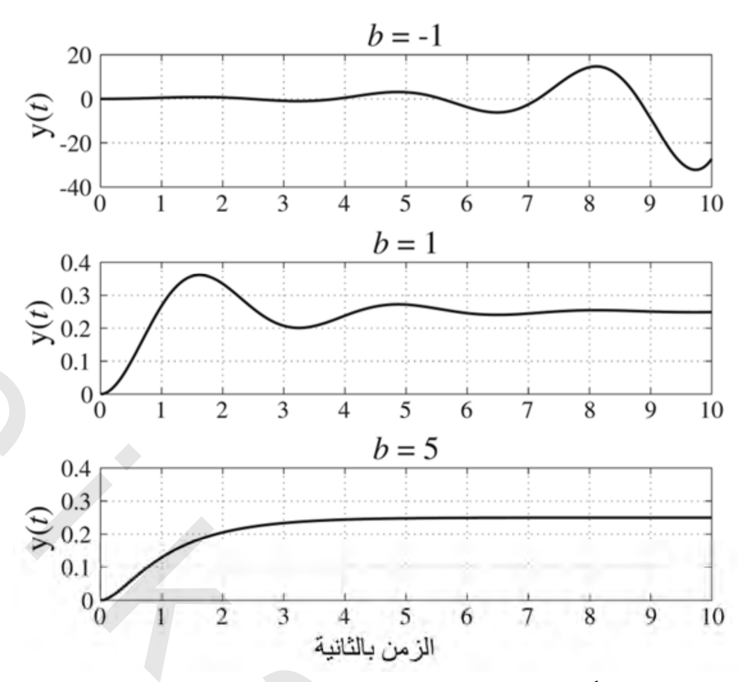
بتطبيق الشروط الابتدائية والحل للثابتين المتبقيين، سنحصل على ما يلي:

| b | $s_1$ | $s_2$ | $K_{h1}$ | $K_{h2}$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0.5+j1.9365 | 0.5-j1.9365 | -0.125-j0.0323 | 0.125+j0.0323 |
| -1 | -0.5+j1.9365 | -0.5-j1.9365 | -0.125-j0.0323 | -0.125+j0.0323 |
| 5 | -4 | -1 | 0.0833 | -0.3333 |

وستكون الحلول كالتالي:

| b | y(t) |
|---|---|
| -1 | $0.25-e^{0.5t}[0.25\cos(1.9365t)-0.0646\sin(1.9365t)]$ |
| 1 | $0.25-e^{0.5t}[0.25\cos(1.9365t)+0.0646\sin(1.9365t)]$ |
| 5 | $0.08333e^{-4t}-0.3333e^{-t}+0.25$ |

هذه الاستجابات للحالة صفر موضحة في شكل (٤,١٣).




**شكل رقم (٤,١٣) استجابات النظام عندما b=-1, 1, 5.**

من الواضح أنه عندما b=-1 فإن استجابة الحالة صفر تزداد بدون توقف وهذا النظام ذو التغذية العكسية لن يكون مستقراً. من الواضح أيضاً أن ديناميكية النظام تتأثر بقوة بهذه التغذية العكسية.

**خصائص النظام**

**مثال تقديمي**

لكي نبني فهماً جيداً للأنظمة الكبيرة والعامة، دعنا نبدأ ببعض الأمثلة البسيطة التي ستوضح بعض الخواص المهمة للأنظمة. إن الدوائر الكهربية تكون معروفة جيداً بالنسبة لمهندسي الكهرباء. الدوائر الكهربية هي أنظمة. من الدوائر الشائعة دائرة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة من النوع RC، وهو نظام أحادي الدخل، أحادي الخرج موضح في شكل (٤,١٤).

$v_{in}(t)$   $i(t)$   $R$   $C$   $v_{out}(t)$   $v_{in}(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow v_{out}(t)$

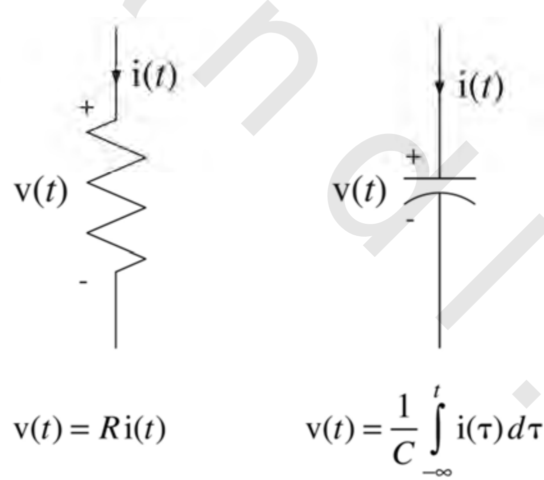
**شكل رقم (٤,١٤) مرشح منفذ للترددات المنخفضة من النوع RC وهو نظام أحادي الدخل أحادي الخرج.**

هذه الدائرة تسمى مرشح منفذ للترددات المنخفضة ؛ لأنه إذا كانت الإثارة دالة جيبية ذات مقدار ثابت، فإن الاستجابة ستكون أكبر عند الترددات المنخفضة منها عند الترددات المرتفعة. وبالتالي فإن النظام يميل لتمرير الترددات المنخفضة وفي الوقت نفسه يوقف أو يحجز الترددات المرتفعة. من الأسماء الشائعة للمرشحات الأخرى: مرشح منفذ للتردات العالية، ومرشح منفذ لنطاق من الترددات، ومرشح مانع أو موقف لنطاق من الترددات. المرشحات المنفذة لنطاق من الترددات تمرر مدى متوسط من الترددات، بينما تمنع الترددات المنخفضة والعالية. سيتم الكشف عن المرشحات بتفاصيل أكثر في الفصل ١١ والفصل ١٥.

الجهد عند دخل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة من النوع RC هو $v_{in}(t)$ يثير النظام وبالتالي يكون الجهد عند الخرج هو $v_{out}(t)$ وهو استجابة النظام. إشارة جهد الدخل يتم تطبيقها على طرفي الدخل ناحية اليسار، وبالتالي تظهر إشارة الخرج على طرفي الخرج ناحية اليمين. يتكون هذا النظام من مكونين معروفين لمهندسي الكهرباء، وهما المقاومة والمكثف. العلاقات الرياضية للجهد والتيار للمقاومة والمكثف معروفة جيداً وموضحة في شكل (٤,١٥).

باستخدام قانون كيرتشوف للجهد، يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية التالية:

$$\underbrace{RCV'out(t)}_{=i(t)} + V_{out}(t) = V_{in}(t)$$




**شكل رقم (٤,١٥) العلاقات الرياضية للجهد والتيار للمقاومة والمكثف.**

حل هذه المعادلة التفاضلية يساوي مجموع الحل المتجانس والحل الخاص. (انظر الملحق ث للمزيد عن حل المعادلات التفاضلية. الحل المتجانس سيكون $v_{out,h}(t)=K_h e^{-t/RC}$ حيث $K_h$ ما زال حتى الآن غير معلوم. يعتمد الحل الخاص على شكل الدخل $v_{in}(t)$. لنفترض أن إشارة جهد الدخل $v_{in}(t)$ ستكون جهد ثابت A فولت. وبالتالي، حيث أن إشارة جهد الدخل ثابتة، فإن الحل الخاص سيكون ثابتاً أيضاً ويساوي $v_{out,p}(t)=K_p$. بالتعويض بذلك في المعادلة التفاضلية والحل سنحصل على $K_p=A$ وسيكون الحل الكلي هو $v_{out}(t)=v_{out,h}(t)+v_{out,p}(t) =K_h e^{-t/RC}+A$. الثابت $K_h$

يمكن إيجاده بمعرفة الخرج عند زمن محدد. سنفترض أننا نعرف أن الجهد على المكثف عندما t=0، وهو $v_{out}(0)$ بالتالي يمكننا كتابة :

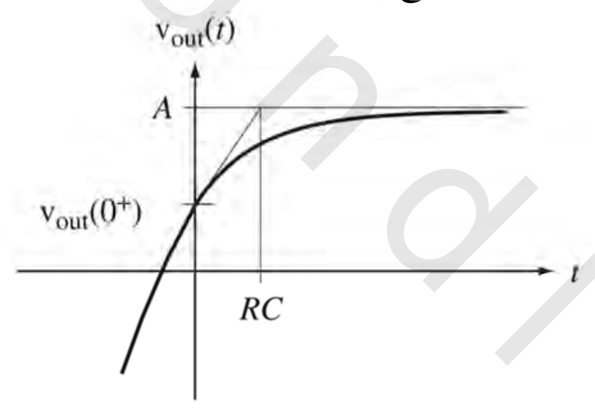
$v_{out}(0)=K_h+A$ ومنها $K_h=v_{out}(0)-A$

ويمكن كتابة إشارة جهد الخرج كالتالي :

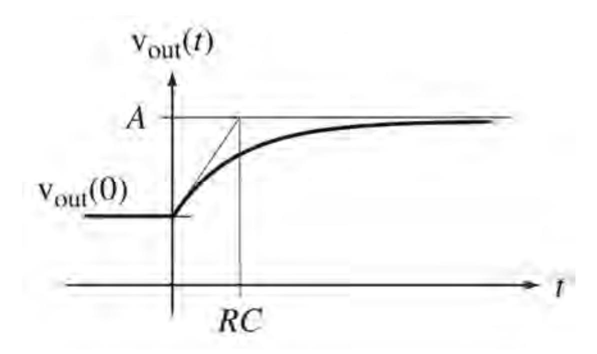
$$v_{out}(t)=v_{out}(0)e^{-t/RC} + A(1-e^{-t/RC})$$ المعادلة رقم (٤,٢)

وهذا الحل موضح في شكل (٤,١٦).

هذا الحل مكتوب وموضح كما لو كان مطبقاً عند كل قيم الزمن t. وهذا مستحيل عملياً، حيث أنه إذا كان مطبقاً عند كل الأزمنة، فإن هذا الحل قد يكون غير محدد مع اقتراب الزمن من الما لانهاية السالبة، والإشارات غير المحددة لا تحدث في الأنظمة الحقيقية الطبيعية. إنه من المؤكد عملياً أن قيمة ابتدائية لجهد الدائرة يتم وضعها على المكثف بأي وسيلة وتظل هناك حتى الزمن t=0. بعد ذلك وعندما t=0 يتم تطبيق الإشارة التي مقدارها A فولت ونهتم بتحليل الدائرة بما يحدث فقط بعد الزمن t=0. هذا الحل يطبق فقط لهذا المدى الزمني ويظل محدوداً به. بمعنى $v_{out}(t)=v_{out}(0)e^{-t/RC}+A(1-e^{-t/RC}),\ t>0$ كما هو موضح في شكل (٤,١٧).




**شكل رقم (٤,١٦) استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة من النوع RC لإثارة ثابتة.**




**شكل رقم (٤,١٧) استجابة دائرة RC لجهد ابتدائي وإثارة ثابتة تم تطبيقها عند الزمن t=0**

هناك أربع محددات للاستجابة الجهدية لهذه الدائرة بالنسبة للأزمنة $t \geq 0$ وهي ، المقاومة R ، والمكثف C ، وقيمة جهد الخرج الابتدائية على المكثف $v_{out}(0)$ ، والجهد المطبق على الدخل $v_{in}(t)$. قيم المقاومة والمكثف يحددان العلاقات البينية بين الجهد والتيار في الدائرة. من المعادلة (٤,٢) يمكننا أن نرى أنه إذا كان جهد الدخل A يساوي صفراً ، فإن الاستجابة ستكون :

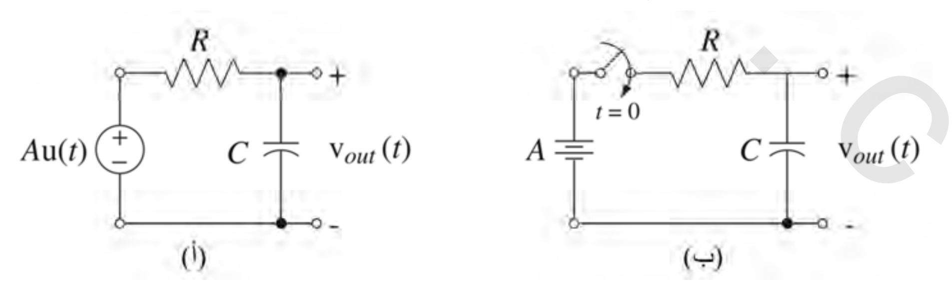
$$v_{out}(t)=v_{out}(0)e^{-t/RC}, \quad t>0$$ لمعادلة رقم (٤,٣)

وإذا كان الجهد الابتدائي على المكثف $v_{out}(0)$ يساوي صفراً ، فإن الاستجابة ستكون :

$$v_{out}(t)=A(1-e^{-t/RC}), \quad t>0$$ عادلة رقم (٤,٤)

وعلى ذلك فالاستجابة في المعادلة (٤,٣) هي استجابة الدخل الصفري ، والاستجابة في المعادلة (٤,٤) هي استجابة الحالة صفر. الحالة صفر تعني عدم وجود طاقة مخزنة في النظام وفي حال المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة ، فإن الحالة صفر تعني أن جهد المكثف الابتدائي يساوي صفراً. بالنسبة لهذا النظام ، فإن الاستجابة الكلية تساوي مجموع استجابة الدخل الصفري واستجابة الحالة صفر.

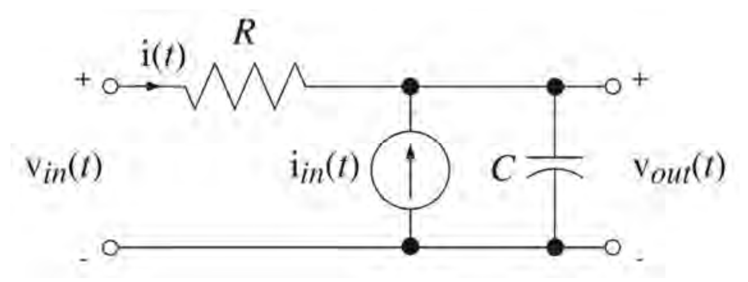
إذا كانت الإثارة تساوي صفراً لكل الأزمنة السالبة ، فإنه يمكننا التعبير عنها بخطوة جهدية $v_{in}(t)=Au(t)$. إذا افترضنا أن الدائرة تم توصيلها بهذه الإثارة على طرفي الدخل لزمن لا نهائي ، وأن الجهد الابتدائي على المكثف عندما $t=0$ سيكون صفراً كما في شكل (٤,١٨ أ). فإن النظام سيكون في البداية في حالته الصفرية وستكون استجابته هي استجابة الحالة صفر. أحياناً يكون التعبير عن الإثارة $v_{in}(t)=Au(t)$ يقصد به التعبير عن الموقف الموضح في شكل (٤,١٨ ب). في هذه الحالة ، فإننا لسنا فقط نطبق جهداً على النظام ، ولكننا في الحقيقة نغير من حالة النظام عن طريق قفل المفتاح. إذا كان الجهد الابتدائي على المكثف يساوي صفراً في كل من الدائرتين الموضحتين في شكل (٤,١٨) ، فإن الاستجابتين للأزمنة $t \geq 0$ ستكونان نفسيهما.




**شكل رقم (٤,١٨) طريقتان لتطبيق جهد ثابت مقداره A فولت على مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة عند الزمن t=0.**

من الممكن أن نقوم بتضمين تأثيرات الطاقة الابتدائية المخزنة في النظام عن طريق حقن إشارة في النظام عندما يكون في حالته الصفرية عند الزمن $t=0$ بإثارة ثانية ولتكن صدمة مثلا. مثلا في دائرة المرشح RC من الممكن أن

نضع الجهد الابتدائي على المكثف عن طريق صدمة تيار من مصدر تيار يكون على التوازى مع المكثف كما في شكل (٤.١٩).




**شكل رقم (٤.١٩) مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة مع صدمة تيار لحقن شحنة في المكثف لتحقيق جهد ابتدائي عليه.**

عند حدوث صدمة التيار فإن كل شحنتها تتدفق في المكثف أثناء فترة تطبيقها (مع العلم أن الصدمة لها فترة زمنية تساوي صفر). إذا كانت شدة الصدمة هي Q، فإن التغير في جهد المكثف نتيجة حقن هذه الشحنة فيه عن طريق صدمة التيار سيكون:

$$\Delta v_{out} = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_{in}(t)\, dt = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} Q\delta(t)\, dt = \frac{Q}{C}$$

وعلى ذلك فإنه باختيار $Q=Cv_{out}(0)$ ستحقق جهد المكثف الابتدائي $v_{out}(0)$. وبالتالي فإن تحليل الدائرة سيستمر كما لو كنا نوجد استجابة الحالة صفر للدخل $v_{in}(t)$ و $i_{in}(t)$ بدلاً من استجابة الحالة صفر للدخل $v_{in}(t)$ واستجابة الدخل الصفري $v_{out}(0)$. الاستجابة الكلية للأزمنة $t>0$ ستكون هي نفسها في الحالتين.

معظم الأنظمة العملية المستمرة زمنياً يمكن نمذجتها (على الأقل تقريبياً) عن طريق المعادلات التفاضلية بالطريقة نفسها لنمذجة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. إن ذلك يكون حقيقياً في الأنظمة الكهربية، والميكانيكية، والكيميائية، والبصرية، والعديد من أنواع الأنظمة الأخرى. ولذلك فإن دراسة الإشارات والأنظمة تكون في غاية الأهمية في مصفوفة عريضة جداً من التخصصات.

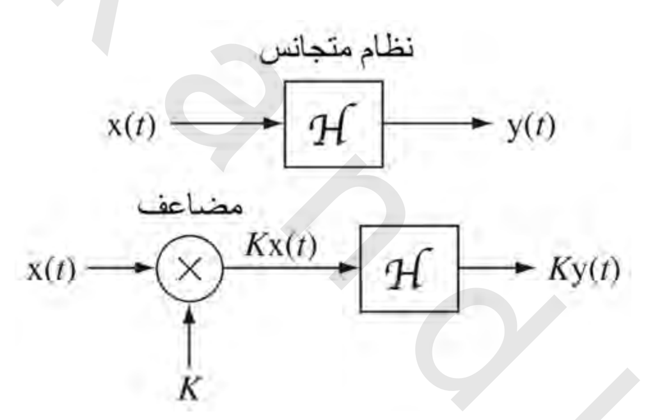
**التجانس**

إذا أردنا مضاعفة جهد إشارة الدخل للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة ليصبح $v_{in}(t)=2Au(t)$، فإن المعامل 2A سيتم حمله خلال التحليل وستصبح استجابة الحالة صفراً مضاعفة هي الأخرى كما يلي: $v_{out}(t)=2A(1-e^{-t/RC})u(t)$. وإذا أردنا أيضاً أن نضاعف جهد المكثف الابتدائي، فإن استجابة الدخل الصفري ستتضاعف. في الحقيقة فإنه إذا ضربنا إشارة جهد الدخل في أي ثابت، فإن استجابة الحالة صفر سيتم ضربها في الثابت نفسه أيضاً. إن جودة النظام التي تجعل العبارات السابقة حقيقية تسمى التجانس.

| |
|---|
| في أي نظام متجانس ، بضرب إشارة الدخل في أي ثابت (بما في ذلك الثوابت المركبة) سيضرب استجابة الحالة صفر في الثابت نفسه. |

شكل (٤.٢٠) يوضح عن طريق المخطط الصندوقي ، ماذا يعني التجانس.

أحد الأمثلة المبسطة جداً على نظام ليس متجانساً هو النظام الموصوف بالعلاقة $y(t)-1=x(t)$. إذا كانت x تساوي واحداً فإن $y=2$ ، وإذا كانت $x=2$ فإن $y=3$. لقد تمت مضاعفة إشارة الدخل ، ولكن إشارة الخرج لم تتضاعف. الذي يجعل هذا النظام غير متجانس هو وجود الثابت 1. على يسار المعادلة. إن هذا النظام له استجابة دخل صفري لا تساوي الصفر. لاحظ أنه إذا أردنا إضافة 1+ لكل من جانبي المعادلة وأعدنا تحديد إشارة الدخل لتصبح $x_{new}(t)=x(t)+1$ بدلاً من x(t) فقط ، فإن y(t) ستصبح $y(t)=x_{new}(t)$ ، وبالتالي فإن مضاعفة $x_{new}(t)$ ستضاعف y(t) ، وبالتالي فإن النظام يصبح متجانساً في ظل هذا التحديد الجديد للدخل.




**شكل رقم (٤,٢٠) رسم صندوقي يوضح مفهوم التجانس لنظام يكون في البداية في حالته الصفرية (K أي ثابت مركب)**

**مثال ٤,٤**

**تحديد إذا كان أي نظام متجانس أم لا**

اختبر تجانس النظام الذي علاقة خرجه ودخله كما يلي :

$$y(t)=\exp(x(t))$$

لنفترض أن $x_1(t)=g(t)$ ، بالتالي فإن $y_1(t)=\exp(g(t))$. افتراض $x_2(t)=Kg(t)$ ، بالتالي فإن $y_2(t)=\exp(Kg(t))=[\exp(g(t))]^k\neq Ky_1(t)$ ، وبالتالي فإن هذا النظام ليس متجانسا.

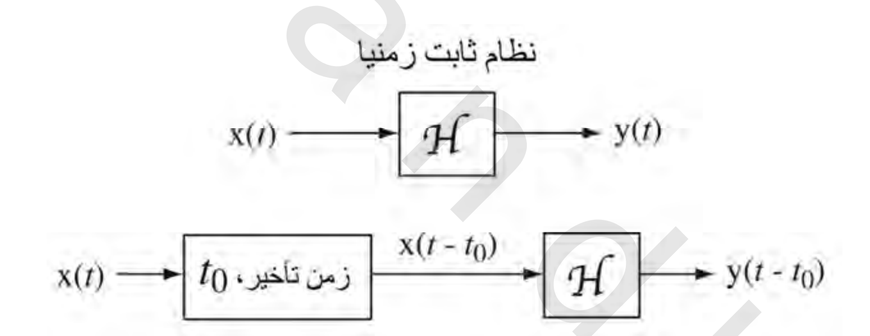
التحليل في المثال ٤.٤ قد يبدو إثباتاً بطريقة رسمية بدون ضرورة لمثل هذه الدالة البسيطة. ولكنه من السهل حدوث التباس في تقييم بعض الأنظمة ، حتى في الأنظمة التي تبدو بسيطة ، إذا لم يتم استخدام مثل هذا النوع من الإثبات المهيكل.

**الثبات الزمني**

افتراض أن النظام الموجود في شكل (٤،١٤) كان في البداية في الحالة صفر ، وتم تأخير الإثارة بزمن مقداره $t_0$ بحيث تغيرت إشارة الدخل إلى $x(t)=Au(t-t_0)$. ماذا سيحدث للاستجابة؟ بالمرور على الحل مرة ثانية سنجد أن استجابة الحالة صفر ستصبح $v_{out}(t) = A\left(1 - e^{-(t-t_0)/RC}\right)u(t - t_0)$ وهي استجابة الحالة صفر الأصلية نفسها مع استبدال t بـ $t-t_0$. وبالتالي فإن تأخير الإشارة قد أخر استجابة الحالة صفر بنفس الكمية بدون التغيير في شكل الدالة. إن الخاصية التي تجعل ذلك يحدث تسمى خاصية الثبات الزمني.

| |
|---|
| إذا كان أي نظام موجود مبدئياً في حالته الصفرية وكانت أي إشارة اختيارية $x(t)$ تعطي الاستجابة $y(t)$ وكانت إشارة الدخل $x(t-t_0)$ تعطي الاستجابة $y(t-t_0)$ لأي زمن تأخير اختياري $t_0$ ، فإن هذا النظام يسمى نظاماً ثابتاً زمنياً. |

شكل (٤،٢١) يوضح مفهوم الثبات الزمني.




**شكل رقم (٤،٢١) رسم صندوقي يوضح مفهوم الثبات الزمني لنظام موجود مبدئياً في الحالة صفر.**

**مثال ٤،٥**

**تحديد إذا كان أي نظام ثابتاً زمنياً أم لا**

اختبر الثبات الزمني للنظام الذي علاقة دخله مع خرجه تعطي بالعلاقة التالية : $y(t)=\exp(x(t))$.

افتراض $x_1(t)=g(t)$ ، وبالتالي $y_1(t)=\exp(g(t))$. افتراض أيضاً $x_2(t)=g(t-t_0)$ وبالتالي $y_2(t)=\exp(g(t-t_0))=y_1(t-t_0)$ ، وعلى ذلك فإن هذا النظام ثابت زمنياً.

**مثال ٤،٦**

**تحديد إذا كان أي نظام ثابتاً زمنياً أم لا**

اختبر الثبات الزمني للنظام الذي علاقة دخله مع خرجه تعطي بالعلاقة التالية : $y(t)=x(t/2)$.

افتراض $x_1(t)=g(t)$، وبالتالي $y_1(t)=g(t/2)$. افترض أيضاً $x_2(t)=g(t-t_0)$ وبالتالي يمكننا كتابة $y_2(t)=g((t/2)-t_0)\neq y_1(t-t_0)=g((t-t_0)/2)$، وعلى ذلك فإن هذا النظام ليس ثابتاً، أي متغيراً زمنياً.

**الجمع**

افترض أن إشارة جهد الدخل للمرشح RC تساوي مجموع جهدين كالتالي: $v_{in}(t)=v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$. للحظة افترض أن $v_{in2}(t)=0$ وافترض أن استجابة الحالة صفر عندما يكون الدخل $v_{in1}(t)$ هو وحده المؤثر ستكون $v_{out1}(t)$. المعادلة التفاضلية في هذه الحالة ستكون:

$$RCv'_{out1}(t)+v_{out1}(t)=v_{in1}(t)$$ المعادلة رقم (٤,٥)

بما أننا نحسب استجابة الحالة صفر، فإن $v_{out1}(0)$. المعادلة (٤,٥) والشرط الابتدائي $v_{out1}(0)=0$ يعطيان الحل الفريد $v_{out1}(t)$. بالطريقة نفسها إذا افترضنا أن $v_{in2}(t)$ يؤثر وحده، فإن استجابة الحالة صفر في هذه الحالة يجب أن تكون على الصورة:

$$RCv'_{out2}(t)+v_{out2}(t)=v_{in2}(t)$$ المعادلة رقم (٤,٦)

وسيكون هناك بالطريقة نفسها حل فريد وهو $v_{out2}(t)$. بإضافة المعادلتين (٤,٥) و (٤,٦) يمكن كتابة:

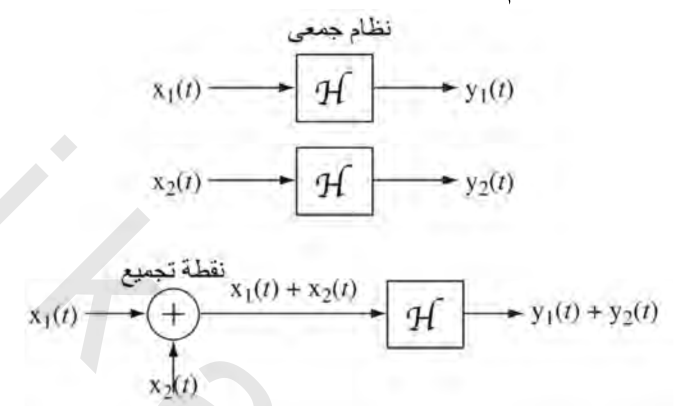
$$RC[v'_{out1}(t)+v'_{out2}(t)]+v_{out1}(t)+v_{out2}(t)=v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$$ المعادلة رقم (٤,٧)

المجموع $v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$ يشغل المكان نفسه في المعادلة (٤,٧) مثلما يفعل $v_{in1}(t)$ في المعادلة (٤,٥) و $v_{out1}(t)+v_{out2}(t)$ و $v'_{out1}(t)+v'_{out2}(t)$ يشغلان المكان نفسه في المعادلة (٤,٧) مثل $v_{out1}(t)$ و $v'_{out1}(t)$ في المعادلة (٤,٥). أيضاً فإن استجابة الحالة صفر ستكون $v_{in1}(0)+v_{in2}(0)=0$. لذلك فإنه إذا كان $v_{in1}(t)$ يعطي $v_{out1}(t)$، فإن $v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$ يجب أن يعطيان الاستجابة $v_{out1}(t)+v_{out2}(t)$ لأن كلاً من الاستجابتين تم تحديدهما بطريقة فريدة على غرار المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية. تعتمد هذه النتائج على حقيقة أن تفاضل مجموع الدالتين يساوي مجموع التفاضل لهاتين الدالتين. إذا كانت الإثارة تساوي مجموع إثارتين، فإن الحل لهذه المعادلة التفاضلية، وليس بالضرورة المعادلات التفاضلية الأخرى، سيكون مجموع الاستجابتين لهاتين الإثارتين عندما تكون كل منهما تؤثر وحدها. النظام الذي يكون فيه الإثارات المضافة تعطي استجابات الحالة صفر مضافة أيضاً تسمى أنظمة جمعية أو تجميعية كما في شكل (٤,٢٢).

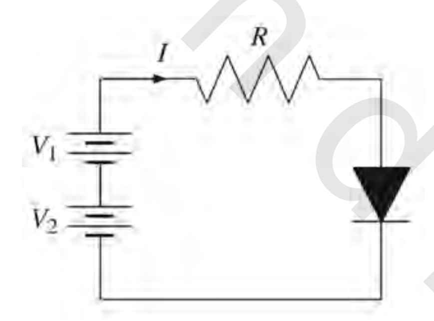
> إذا كان أي نظام عند إثارته بأي إثارة اختيارية $x_1$ يعطي استجابة حالة صفر $y_1$، وعند إثارته بأي إثارة اختيارية ثانية $x_2$ يعطي استجابة حالة صفر $y_2$، و $x_1+x_2$ تعطيان استجابة حالة صفر $y_1+y_2$، فإن هذا النظام يسمى نظاماً جمعياً أو نظام تجميعياً.

مثال شائع جداً على الأنظمة غير الجمعية هو دائرة الدايود (الصمام الثنائي) البسيطة في شكل (٤,٢٣). افترض إشارة جهد الدخل للدائرة هي V هي مصدري الجهد $V_1$ و $V_2$ الموصلان على التوالى ليعطيان الإشارة الكلية

لجهد الدخل تساوي مجموع الإشارتين. افترض أن الاستجابة الكلية هي التيار I ، وافترض استجابات التيار المنفصلة لكل جهد على حدة هي $I_1$ و $I_2$. لكي نجعل النتيجة معقولة سنفترض $V_1>0$ وسنفترض $V_2=-V_1$. الاستجابة لـ $V_1$ وحده هي التيار الموجب $I_1$. الاستجابة لـ $V_2$ وحده صغيرة جداً (مثالياً تساوي صفراً) وهي التيار السالب $I_2$. الاستجابة I للإشارة المجمعة $V_1+V_2$ تساوي صفر، ولكن مجموع الاستجابتين عند جمعهما منفصلين $I_1+I_2$ تساوي تقريباً $I_1$ ولا تساوي صفراً. إذن فهذا النظام ليس تجميعياً.




**شكل رقم (٤،٢٢) مخطط صندوقي يوضح مفهوم التجميع لنظام يبدأ عند الحالة صف.**




**شكل رقم (٤،٢٣) دائرة دايود (صمام ثنائي) في حالة التيار المستمر**

**الخطية والتجميع**

أي نظام يكون متجانساً وتجميعياً يسمى نظاماً خطياً.

| |
|---|
| إذا أثرنا نظاماً خطياً بـ $x_1(t)$ فإنة ينتج استجابة الحالة صفر $y_1(t)$ ، وعند إثارته بـ $x_2(t)$ يعطي استجابة الحالة صفر $y_2(t)$ ، فإنه عند إثارته بـ $x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ سيعطي استجابة الحالة صفر التي تساوي : $y(t)= \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ |

هذه الخاصية للأنظمة الخطية تقودنا إلى مفهوم مهم يسمى التجميع superposition. المصطلح تجميع superposition يأتي من الفعل superpose ، والجزء pose من هذا المصطلح يعنى أن تضع شيئا في مكان معين، والجزء super يعني على القمة. والكلمة على بعضها superpose تعني أن تضع شيئاً على قمة شيء آخر. إن هذا هو ما يحدث

عندما نجمع إشارة دخل مع إشارة أخرى، في نظام خطي. الاستجابة الكلية تكون واحدة من الاستجابتين على قمة (أو مجموعة مع) الاستجابة الأخرى.

حقيقة أن التجميع يتم تطبيقه على النظم الخطية فقط قد يبدو تافها وواضحا، ولكنه له آثار وصلت إلى أبعد الحدود في تحليل الأنظمة. إنها تعني أن استجابة الحالة صفر لأي إشارة دخل اختيارية يمكن إيجادها عن طريق تقسيم إشارة الدخل إلى قطع بسيطة يمكن تجميعها لتعطي إشارة الدخل الأصلية، ثم يتم حساب الاستجابة لكل قطعة مبسطة، وبعد ذلك يتم جمع كل هذه الاستجابات لتعطي الاستجابة الكلية للدخل الكلي. إنها تعني أيضاً أنه يمكننا أن نوجد استجابة الحالة صفر وبعد ذلك، في حسابات مستقلة، نوجد استجابة الدخل الصفري، وبعد ذلك يتم جمعهما لإيجاد الاستجابة الكلية. إنها تسمى طريقة "التقسيم والقهر" لحل مسائل الأنظمة الخطية ولا يمكن أن نبالغ في أهميتها. بدلاً من حل مسألة كبيرة معقدة، فإننا نحل عدداً من المسائل الصغيرة المبسطة. وبعد حل واحدة من المسائل الصغيرة البسيطة، فإن المسائل الأخرى تكون في العادة سهلة الحل؛ لأن العملية تكون متشابهة. الخطية والتجميع تكون هي الأساسات لطرق كبيرة وقوية لتحليل الأنظمة. تحليل النظم غير الخطية يكون أكثر تعقيداً وصعوبة عن تحليل الأنظمة الخطية؛ لأن طريقة القسمة والقهر لا تطبق في العادة على الأنظمة غير الخطية. في العادة تكون الطريقة الوحيدة والعملية لتحليل الأنظمة غير الخطية هي الطريقة الرقمية، بالمقابلة مع الطرق التحليلية.

نظرية التجميع والخطية تطبق أيضاً على الأنظمة الخطية متعددة الدخل متعددة الخرج. إذا كان هناك نظام خطي له دخلان وقمنا بتطبيق الإشارة $x_1(t)$ على الدخل الأول والإشارة $x_2(t)$ على الدخل الثانى وحصلنا على الاستجابة $y(t)$، فإنه يمكننا الحصول على نفس الاستجابة $y(t)$ إذا جمعنا الاستجابة من الدخل الأول وحده $y_1(t)$ والاستجابة من الدخل الثاني وحده $y_2(t)$.

**الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً LTI**

إن أكثر الأنظمة شيوعا حتى الآن في التحليل من أجل تصميم الأنظمة العملية هي الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً. إذا كان هناك نظام خطي وثابت زمنياً، فإنه يسمى نظام LTI. تحليل الأنظمة ال LTI يُمثِّل الأغلبية الساحقة للموضوعات في هذا الكتاب.

واحد من آثار الخطية التي ستكون مهمة فيما بعد يمكن إثباتها الآن. افترض نظام LTI تمت إثارته بإشارة $x_1(t)$ ليعطي استجابة الحالة صفر $y_1(t)$. أيضاً، افترض أن $x_2(t)$ يعطي استجابة الحالة صفر $y_2(t)$. باستدعاء خاصية الخطية، فإن $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ ستعطي استجابة الحالة صفر $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$. الثوابت $\alpha$ و $\beta$ من الممكن أن تكون أرقاماً، بما في ذلك الأرقام المركبة. افترض $\alpha=1$ و $\beta=j$، فإن $x_1(t)+jx_2(t)$ ستعطي الاستجابة $y_1(t)+jy_2(t)$. إننا مبدئيا نعرف أن $x_1(t)$ تعطي $y_1(t)$ وأن $x_2(t)$ تعطي $y_2(t)$، وعلى ذلك يمكننا أن ننص على القاعدة العامة التالية:

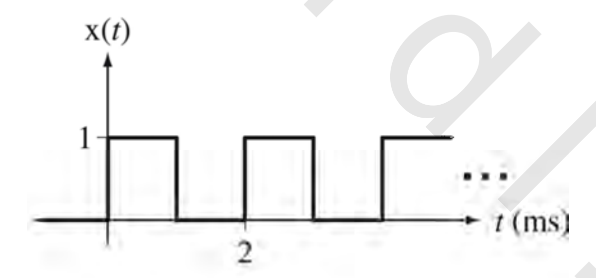
عندما تعطي إثارة مركبة استجابة معينة من نظام LTI ، فإن الجزء الحقيقي من الإثارة يعطي الجزء الحقيقي من الاستجابة والجزء التخيلي من الاستجابة يعطي الجزء التخيلي من الاستجابة.

إن ذلك يعنى أنه بدلاً من تطبيق الإثارة الحقيقية على النظام لإيجاد استجابته الحقيقية ، فإنه يمكننا تطبيق إثارة مركبة يكون جزأها الحقيقي هو الإثارة الطبيعية ، ثم نحسب الاستجابة المركبة ، وبعد ذلك نأخذ جزأها الحقيقي على أنه الاستجابة الطبيعية الحقيقية للإثارة الطبيعية الحقيقية. إن هذه تعتبر طريقة ملتوية لحل مشاكل الأنظمة ، ولكن نتيجة أن الدوال المميزة للأنظمة الحقيقية تكون أسساً مركبة وحيث إن الترميز المدمج الذي ينتج عند تطبيقها في تحليل الأنظمة ، فإنها تكون أحياناً طريقة أكثر كفاءة في التحليل عن الطرق المباشرة. هذه الفكرة الأساسية هي واحد من الأساسيات التي تعتمد عليها الطرق التحويلية وتطبيقاتها التي ستقدم في الفصل ٦ حتى الفصل ٩.

**مثال ٤,٧**

**استجابة مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة لموجة مربعة باستخدام ماتلاب**

استخدم أساسيات التجميع لإيجاد استجابة مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة لموجة مربعة تبدأ عند الزمن t=0. افترض الثابت الزمني RC=1 ms ، وافترض أن الزمن بين واحدة من الحواف الصاعدة للموجة المربعة والتالية لها يساوي 2ms ، وافترض أيضاً أن مقدار الموجة المربعة يساوي ١ فولت كما في شكل (٤,٢٤).




**شكل رقم (٤,٢٤) موجة مربعة تستخدم في إثارة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة.**

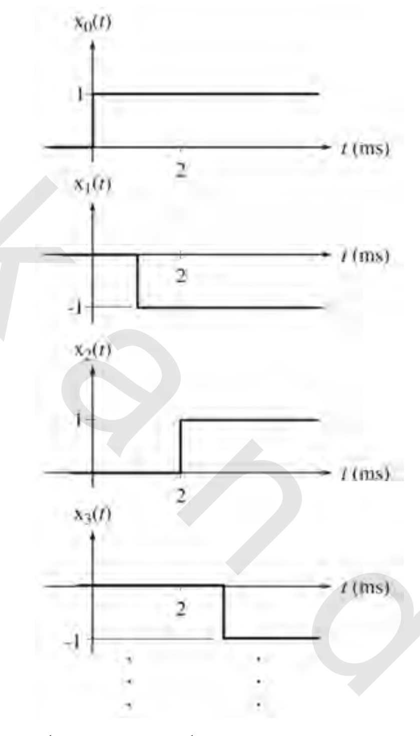
ليس هناك علاقة رياضية لاستجابة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة للموجة المربعة ، ولكننا نعرف استجابته لوحدة الخطوة. يمكن تمثيل الموجة المربعة بمجموع بعض وحدات الخطوة السالبة والموجبة المزاحة زمنياً. ولذلك يمكن تمثيل x(t) تحليلياً بالعلاقة التالية :

$$x(t)= x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+\ldots$$
$$x(t)=u(t)-u(t-0.001)+u(t-0.002)-u(t-0.003)+\ldots$$

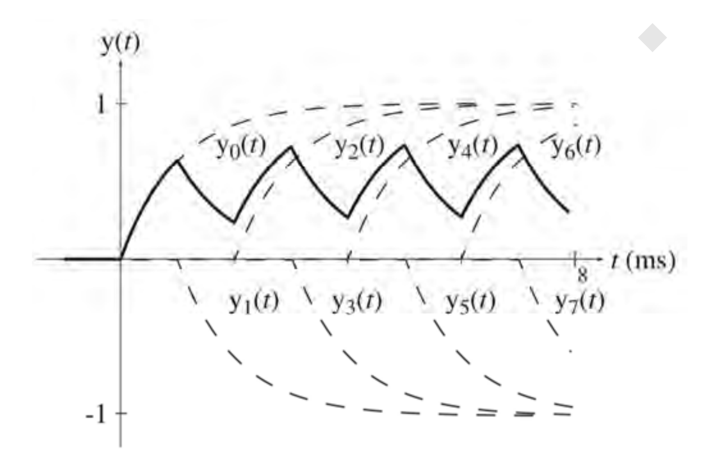
المرشح RC المنفذ للرددات المنخفضة هو نظام خطي ثابت زمنياً. ولذلك فإن استجابة هذا النظام ستساوي مجموع استجابات دوال الخطوة السابقة كل على حدة. الاستجابة لوحدة خطوة موجبة غير مزاحة تساوي $y_0(t)=(1-e^{-1000t})u(t)$. باستدعاء خاصية الثبات الزمني يمكننا كتابة ما يلي :

$$y_1(t)=-(1-e^{-1000(t-0.001)})u(t-0.001)$$
$$y_2(t)=(1-e^{-1000(t-0.002)})u(t-0.002)$$
$$y_3(t)=-(1-e^{-1000(t-0.003)})u(t-0.003)$$


وهكذا




**شكل رقم (٤,٢٥) وحدة الخطوة التي يمكن إضافتها لتشكل الموجة المربعة.**




**شكل رقم (٤,٢٦) استجابة المرشح للموجة المربعة**

باستدعاء خواص الخطية والتجميع يمكن كتابة ما يلي :

$$y(t)=y_0(t)+y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)+\dots$$

$$y(t)=(1-e^{-1000t})u(t)-(1-e^{-1000(t-0.001)})u(t-0.001)+(1-e^{-1000(t-0.002)})u(t-0.002)$$
$$(1-e^{-1000(t-0.003)})u(t-0.003)+\dots \quad .$$

(انظر شكل (٤,٢٦))

نظرية التجميع تعتبر أساساً لطريقة قوية جداً لإيجاد استجابة النظام الخطي. الخواص البارزة للمعادلات التي تصف الأنظمة الخطية هي أن المتغير غير المستقل وتكاملاته وتفاضلاته تظهر في القوة أو الأس الأول فقط. لكي نوضح هذا القانون، افترض نظاماً تكون فيه الإثارة والاستجابة يتعلقان بالمعادلة التفاضلية $ay''(t)+by^2(t)=x(t)$ حيث $x(t)$ هي الإثارة و $y(t)$ هي الإثارة. إذا تغيرت $x(t)$ إلى $x_{new}(t)=x_1(t)+x_2(t)$، فإن المعادلة التفاضلية ستصبح $ay''_{new}(t)+by^2_{new}(t)=x_{new}(t)$. المعادلات التفاضلية لـ $x_1(t)$ و $x_2(t)$ كل منها تؤثر على حدة ستكون كما يلي :

$$ay''_1(t)+by_1^2(t)=x_1(t) \quad \text{و} \quad ay''_2(t)+by_2^2(t)=x_2(t)$$

مجموع هاتين المعادلتين يمكن كتابته كما يلي :

$$a\left[y''_1(t)+y''_2(t)\right]+b\left[y_1^2(t)+y_2^2(t)\right]=x_1(t)+x_2(t)=x_{new}(t)$$

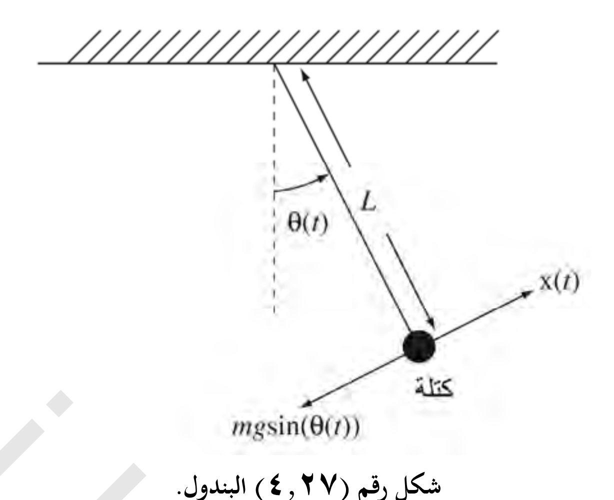
والتي لا تساوي على العموم للمعادلة التالية :

$$a[y_1(t)+y_2(t)]''+b[y_1(t)+y_2(t)]^2=x_1(t)+x_2(t)=x_{new}(t)$$

هذا الفرق سببه هو الحد $y^2(t)$ الذي لا يتطابق مع المعادلة التفاضلية التي تصف النظام. لذلك لا يمكن تطبيق نظرية التجميع في هذا النظام.

من الطرق الشائعة جداً في تحليل الإشارات والأنظمة استخدام طرق الأنظمة الخطية لتحليل الأنظمة غير الخطية. هذه العملية تسمى "جعل النظام خطيا". طبيعي، فإن هذا التحليل لن يكون دقيقاً؛ لأن النظام ليس خطياً في الحقيقة وعملية تحويله إلى نظام خطي لا تجعله خطياً بالضبط. بدلاً من ذلك، فإن عملية تحويل النظام غير الخطي إلى نظام خطي تستبدل المعادلات غير الخطية للنظام بمعادلات خطية تقريباً. يمكن تحليل العديد من الأنظمة غير الخطية بطريقة مفيدة باستخدام طرق الأنظمة الخطية إذا كانت إشارات الدخل والخرج صغيرة بما فيه الكفاية. كمثال على ذلك افترض البندول الموضح في شكل (٤,٢٧). افترض أن الكتلة مثبتة بحبل ليس له كتلة وصلب طوله L. إذا تم تطبيق قوة مقدارها $x(t)$ على الكتلة m، فإنها تستجيب عن طريق الحركة. الجمع الاتجاهي للقوى المؤثرة على الكتلة والمماسة لاتجاه الحركة تساوي حاصل ضرب الكتة والعجلة في الاتجاه نفسه. بمعنى، $x(t)-mg\sin(\theta(t))=mL\theta''(t)$ أو :

$$mL\theta''(t)+mg\sin(\theta(t))=x(t) \qquad \text{المعادلة رقم (٤,٨)}$$




**شكل رقم (٤,٢٧) البندول.**

حيث m هي الكتلة عند نهاية البندول، و x(t) هي القوة المطبقة على الكتلة والمماسة لاتجاه الحركة، و L هي طول البندول، و g هلي عجلة الجاذبية الأرضية، و θ(t) هي الموضع الزاوي للبندول. هذا النظام تمت إثارته بـ x(t) وكانت استجابته هي θ(t). المعادلة (٤,٨) هي معادلة غير خطية، ولكن إذا كانت θ(t) صغيرة بما فيه الكفاية، ففي هذه الحالة sin(θ(t)) يمكن تقريبها بقيمة θ(t).

$$mL\theta''(t)+mg\theta(t)\cong x(t)$$ المعادلة رقم (٤,٩)

حيث هذه تمثل معادلة خطية. وعلى ذلك فبالنسبة للاضطرابات الصغيرة حول موضع الاستقرار، فإن هذا النظام يمكن تحليله في العادة باستخدام المعادلة (٤,٩).

**الاستقرار**

في المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة، كانت إشارة الدخل هي خطوة جهد، وكانت محددة، مما يعنى أن قيمتها المطلقة كانت أقل من قيمة محددة B عند كل الأزمنة، أي أن $|x(t)|<B$ عند كل الأزمنة. استجابة المرشح RC لهذه الإشارة المحددة كانت أيضاً إشارة محددة.

| |
|---|
| أي نظام تكون استجابة الحالة صفر له محددة عند إثارته بأي إثارة محددة، يسمى نظاماً مستقرا محدد الدخل محدد الخرج bounded input bounded output, BIBO. |

أكثر أنواع الأنظمة شيوعاً التي تتم دراستها في الإشارات والأنظمة هي الأنظمة التي تكون علاقة خرجها بدخلها هي معادلة تفاضلية، خطية، ذات معاملات ثابتة. المعادلة المميزة للمعادلات التفاضلية من هذا النوع تكون

أسية مركبة. ولذلك فإن الحل المتجانس يكون في صورة مجموعة من الأسس المركبة الخطية. سلوك كل واحد من هذه الأسس المركبة يتم تحديده عن طريق القيم المميزة المصاحبة له. كل واحد من هذه الأسس المركبة يكون على الصورة $e^{st}=e^{\sigma t}e^{jwt}$ حيث $s=\sigma+jw$ هي القيمة المميزة، و $\sigma$ هي الجزء الحقيقي و w هي الجزء التخيلي لها. الكمية $e^{jwt}$ مقدارها يكون واحداً عند جميع الأزمنة. والكمية $e^{\sigma t}$ يتناقص مقدارها مع زيادة الزمن في الاتجاه الموجب إذا كانت $\sigma$ سالبة ويزداد مقدارها إذا كانت $\sigma$ موجبة. إذا كانت $\sigma$ تساوي صفراً، فإن الكمية $e^{\sigma t}$ تساوي واحداً. إذا كان الأس يتزايد مع الزمن، فإن النظام يكون غير مستقر؛ لأنه لن يكون هناك حدا يمكن وضعه على استجابة النظام. إذا كانت $\sigma=0$، فإنه يمكن أن يكون هناك دخل محدود يجعل إشارة الخرج تزداد بدون حدود. إشارة الدخل التي يكون لها شكل الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية نفسه (الذي يكون محدوداً إذا الجزء الحقيقي من القيمة المميزة يساوي صفراً) سيعطي استجابة غير محدودة (انظر مثال ٤،٨).

| |
|---|
| لأي نظام LTI مستمر زمنياً موصوف بمعادلة تفاضلية محددة، إذا كان الجزء الحقيقي لأي قيمة مميزة أكبر من أو يساوي صفر (غير سالب)، فإن هذا النظام سيكون غير مستقر. |

**مثال ٤،٨**

**إيجاد الإثارة المحددة التي تعطي استجابة غير محدودة**

افترض المكامل المحدد بالمعادلة $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$. احسب القيم المميزة لحل هذه المعادلة واحسب الإثارة المحددة التي ستنتج استجابة غير محددة.

بتطبيق معادلة ليبنيز Leibniz لتفاضل التكاملات التي من هذا النوع، فإنه بتفاضل الطرفين يمكن تكوين المعادلة التفاضلية $y'(t)=x(t)$. تعتبر هذه المعادلة معادلة تفاضلية بسيطة بقيمة مميزة واحدة والحل المتجانس يكون ثابتاً لأن القيمة المميزة تساوي صفر. لذلك فإن هذا النظام يكون غير مستقر. الإثارة المحددة التي يكون لها نفس شكل الحل المتجانس ستنتج استجابة غير محددة. في هذه الحالة، فإن الإثارة الثابتة ستنتج استجابة غير محددة. حيث أن الاستجابة هي تكامل الإثارة، فإنه يجب أن يكون واضحا أنه مع تقدم الزمن، فإن مقدار الاستجابة للإثارة الثابتة تتزايد خطياً بدون نهاية محددة.

**السببية**

نلاحظ في تحليل الأنظمة التي افترضناها حتى الآن، أن كل نظام يستجيب فقط أثناء أو بعد أن تتم إثارته، وهذا يجب أن يبدو منطقياً وطبيعياً. كيف يمكن لنظام أن يستجيب قبل إثارته ؟ إن ذلك يبدو منطقيا؛ لأننا نعيش في عالم طبيعي تكون فيه الأنظمة الطبيعية الحقيقية تستجيب عادة بينما أو بعد أن تتم إثارتها. ولكن، كما سنكتشف

فيما بعد عند افتراض المرشحات المثالية (في الفصل ١١)، فإن بعض طرق تصميم الأنظمة من الممكن أن تؤدي إلى نظام يستجيب قبل أن تتم إثارته، وهذا النظام لا يمكن بناؤه في الطبيعة.

إن حقيقة أن استجابة النظام الحقيقي تحدث بينما، أو بعد، أن تتم إثارته هي من فكرة التأثير والسبب التي هي من أساسيات المنطق السليم. أي تأثير لا بد له من سبب، وهذا التأثير يحدث أثناء أو بعد تطبيق السبب.

| أي نظام تكون استجابته للحالة صفر تحدث فقط أثناء أو بعد إثارته يسمى نظاماً سببياً. |
| --- |

كل الأنظمة الحقيقية الطبيعية تكون أنظمة سببية؛ لأنها لا تستطيع أن تنظر في المستقبل وتستجيب قبل أن تتم إثارتها.

إن المصطلح سببي causal يتم تطبيقه عامة على الإشارات. الإشارة السببية هي إشارة تكون صفراً قبل الزمن t=0. إن هذا المصطلح يأتي من حقيقة أنه إذا تم تطبيق إشارة تساوي صفراً قبل الزمن t=0 على نظام سببي، فإن الاستجابة تكون صفراً أيضاً قبل الزمن t=0. بهذا التعريف، فإن الاستجابة ستكون إشارة سببية لأنها تمثل استجابة نظام سببي لإثارة سببية. المصطلح "عكس سببي" يتم استخدامه أحيانا لوصف الإشارات التي تكون صفر بعد الزمن t=0.

توجد في العادة في تحليل الإشارات والأنظمة ما يسمى أو ما يطلق عليه الاستجابة المعززة. واحدة من الحالات الشائعة هي التي تكون فيها إشارة الدخل دورية. الإشارة الدورية ليست لها بداية محددة، لأنه إذا كانت الإشارة x(t) دورية، فإن ذلك يعنى أن x(t)=x(t+nT)، حيث T هي الدورة و n رقم صحيح. مهما كان الزمن السابق الذي ننظر من خلاله، فإن الإشارة تكرر نفسها دورياً. لذلك، فإن العلاقة بين إشارة الدخل الدورية والاستجابة المعززة لأي نظام LTI (التي تكون أيضاً دورية، بالدورة نفسها)، لا يمكن استخدامها لتحديد إذا كان النظام سببياً أم لا. لذلك، فإن النظام يجب أن تتم إثارته عن طريق إشارة اختبار يكون لها زمن محدد تكون صفراً قبله وهذا في تحليل الأنظمة بغرض السببية. إحدى الإشارات البسيطة لاختبار الأنظمة LTI بغرض السببية من الممكن تكون وحدة الصدمة δ(t). إنها تساوي صفراً قبل t=0 وتساوي صفراً بعد t=0. إذا كانت استجابة الحالة صفر للنظام لوحدة صدمة تحدث عند t=0 لا تساوي صفراً قبل t=0، فإن هذا النظام لا يكون سببياً. الفصل ٥ يقدم طرقاً لتحديد كيف يستجيب نظام LTI للصدمات.

**الذاكرة**

استجابات الأنظمة التي تعاملنا معها حتى الآن تعتمد فقط على الإثارات الحاضرة والماضية. في حالة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة، تتحدد الشحنة على المكثف عن طريق التيار الذي مر خلال هذا المكثف في

الماضى. بهذه الآلية فإن المرشح يتذكر بعضاً من ماضيه. الاستجابة الحالية لهذا النظام ستعتمد على هذه الإثارة الماضية أو السابقة، وهذه الذاكرة، بجانب الإثارة الحالية، تحددان الاستجابة الحاضرة للنظام.

إذا كانت استجابة حالة صفراً لأي نظام عند أي زمن اختياري تعتمد على الإثارة المطبقة عليه عند أي أزمنة ماضية، فإن هذا النظام يكون له ذاكرة، ويكون هذا النظام نظاماً ديناميكياً.

هناك أنظمة تعتمد استجابتها الحالية على القيمة الحالية فقط للإثارة. مقسم الجهد باستخدام المقاومات يعتبر مثالاً جيداً لهذه الأنظمة كما في شكل (٤,٢٨).

**شكل (٤,٢٨) مقسم جهد باستخدام المقاومات**

$$v_o(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_i(t)$$

إذا كانت استجابة أي نظام عند أي زمن اختياري تعتمد فقط على الإثارة عند الزمن نفس ه، فإن هذا النظام ليس له ذاكرة، وهذا النظام يكون نظام ساكن أو إستاتيكياً.

إن مفاهيم السببية والذاكرة تتعلق ببعضها بعضا. جميع الأنظمة الساكنة تعتبر سببية. يمكن عمل اختبار للذاكرة بنوع الإشارة نفسها التي تستخدم في اختبار السببية، وهي وحدة الصدمة. إذا كانت استجابة أي نظام LTI لوحدة الصدمة $\delta(t)$ لا تساوي صفر عند أي زمن مختلف عن الزمن $t=0$، فإن هذا النظام تكون له ذاكرة.

**عدم الخطية الساكنة**

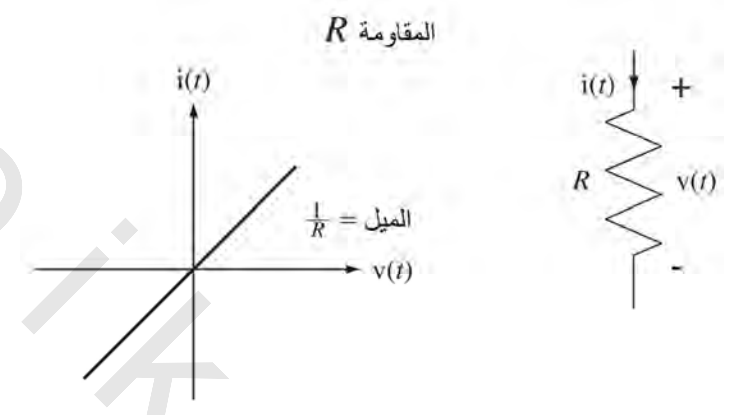
لقد رأينا مسبقاً مثالاً على نظام خطي، باستجابة لا تساوي صفراً، لدخل يساوي صفراً. هذا النظام غير خطي؛ لأنه ليس متجانساً. عدم الخطية هذه ليست نتيجة ضمنية أو جوهرية لعدم خطية المكونات نفسها، ولكنها بدلا من ذلك تكون نتيجة لحقيقة أن الاستجابة للدخل الصفري للنظام تكون غير مساوية للصفر.

المعنى الأكثر شيوعاً للمصطلح نظام غير خطي عملياً هو أنه، حتى عندما تكون استجابته للدخل الصفري تساوي صفراً، فإن إشارة الخرج تكون دالة غير خطية في إشارة الدخل. إن ذلك يكون غالباً نتيجة المكونات في النظام التي لها عدم خطية ساكنة. النظام غير الخطي إستاتيكياً هو النظام الذي لا تكون له ذاكرة والعلاقة بين خرجه ودخله تكون دالة غير خطية. من أمثلة المكونات غير الخطية إستاتيكياً الدايودات، والترانزستورات، وكاشفات قانون التربيع. هذه المكونات تكون غير خطية؛ لأنه إذا تغيرت إشارة الدخل بمعامل معين، فإن إشارة الخرج تتغير بمعامل مختلف.

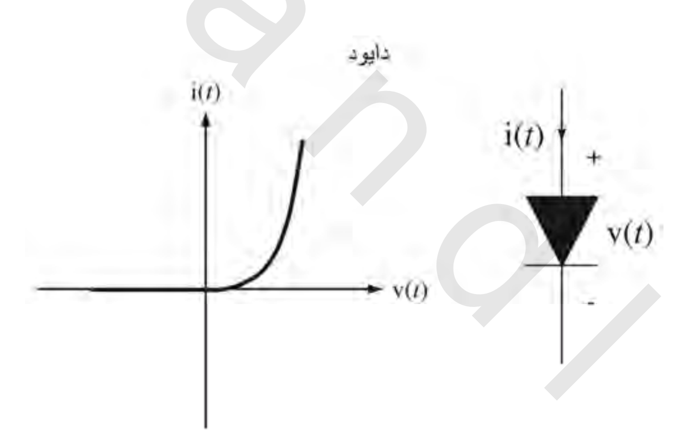
الفرق بين المكونات الخطية وغير الخطية من هذا النوع يمكن توضيحها عن طريق رسم العلاقة بين إشارتي الخرج والدخل. بالنسبة للمقاومة، التي هي نظام ساكن أو استاتيكي، فإن العلاقة تتحدد بقانون أوم:

$$v(t)=Ri(t)$$

حيث العلاقة بين الجهد والتيار تكون خطية كما في شكل (٤,٢٩).



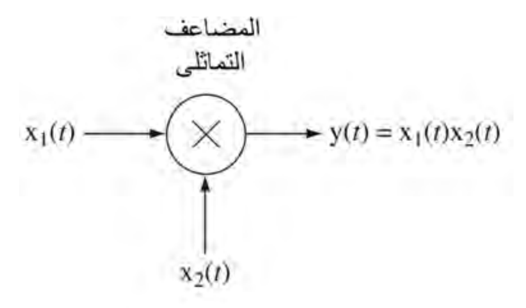

**شكل رقم (٤,٢٩) علاقة الجهد بالتيار للمقاومة.**

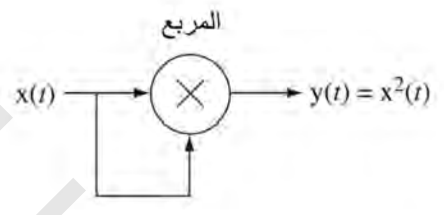



**شكل رقم (٤,٣٠) علاقة الجهد بالتيار لدايود (صمام ثنائي)عند درجة حرارة ثابتة.**

يعتبر الدايود (الصمام الثنائي) مثالاً جيداً للمكونات غير الخطية إستاتيكياً. علاقة الجهد بالتيار للدايود (الصمام الثنائي) تكون على الصورة $i(t)=I_s(e^{qv(t)/kt}-1)$، حيث $I_s$ هي تيار التشبع العكسي، و q هي شحنة الإلكترون، و k هو ثابت بولتزمان، و T هي درجة المطلقة، كما هو موضح في شكل (٤,٣٠).

مثال آخر على المكونات غير الخطية إستاتيكياً هو المضاعف التماثلي الذي يستخدم في التربيع. المضاعف التماثلي له دخلين وخرج واحد، وإشارة الخرج تساوي حاصل ضرب الإشارتين المطبقين على الدخلين. هذا النظام ليس له ذاكرة، أي أنه إستاتيكي، لأن إشارة الخرج الحالي تعتمد فقط على إشارة الدخل الحالي كما في شكل (٤,٣١).

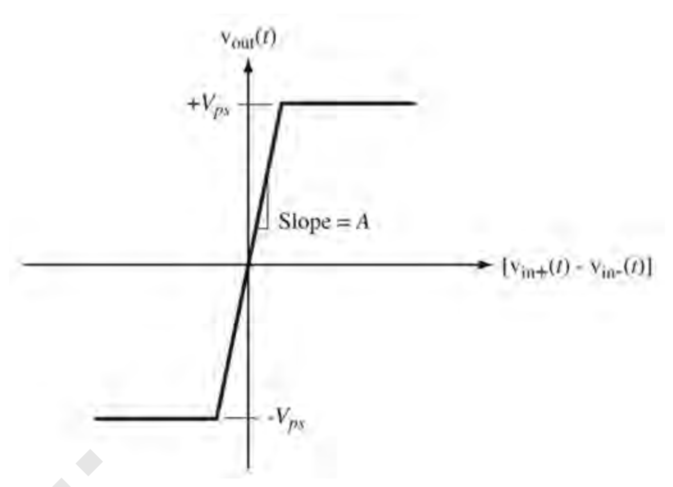



**شكل (٤,٣١) مضاعف ومربع تماثلي.**

إشارة الخرج $y(t)$ تساوي حاصل ضرب إشارتي الدخل $x_1(t)$ و $x_2(t)$. إذا كانت كل من $x_1(t)$ و $x_2(t)$ يمثلان الإشارة نفسها $x(t)$ ، فإن $y(t)=x^2(t)$. هذه العلاقة تمثل علاقة غير خطية إستاتيكياً لأنه إذا تم ضرب الدخل في معامل معين $A$ ، فإن الاستجابة سيتم ضربها في المعامل $A^2$ ، مما يجعل النظام غير متجانس.

من الأمثلة الشائعة جداً على عدم الخطية الإستاتيكية هي ظاهرة التشبع في مكبر العمليات الحقيقي ، بالمقابلة مع المكبر المثالي. مكبر العمليات له دخلان ، الدخل العكس والدخل غير العاكس ، والخرج. عند تطبيق إشارات الجهد على الدخلين ، فإن جهد الخرج لمكبر العمليات يساوي مضاعفاً ثابتاً للفرق بين جهدي إشارتي الدخل ، حتى نقطة معينة. بالنسبة للفروق البسيطة ، فإن العلاقة $v_{out}(t)=A[v_{in+}(t)-v_{in-}(t)]$. ولكن إشارة جهد الخرج تكون مقيدة بطاقة مصدر الجهد ويمكنها فقط الاقتراب من هذه القيمة للجهد ؛ ولا يمكن أن تزيد عليها. ولذلك ، إذا كان الفرق بين إشارتي جهد الدخل كبيراً بدرجة كافية تجعل إشارة جهد الخرج المحسوبة من المعادلة : $v_{out}(t)=A[v_{in+}(t)-v_{in-}(t)]$ خارج الحدود $-V_{ps}$ حتى $+V_{ps}$ (حيث ps تعني مصدر القدرة power supply) ، حيث سيتشبع مكبر العمليات ، وسيكون خرج المكبر مساوياً لهذه القيمة ولن يتعداها. عندما يكون مكبر العمليات متشبعاً ، تصبح العلاقة بين إشارتي الخرج والدخل غير خطية إستاتيكياً ، وهذا موضح في شكل (٤,٣٢).




**شكل (٤,٣٢) علاقة الخرج مع الدخل لمكبر عمليات متشبع.**

حتى وإن كان أي نظام غير خطي إستاتيكياً، فإن الطرق الخطية لتحليل الأنظمة من الممكن أن تكون مازالت مفيدة في تحليل هذه الأنظمة. انظر إلى ملحق الويب (ت) لمثال على استخدام الأنظمة الخطية من أجل التحليل التقريبي للأنظمة غير الخطية.

**الانعكاسية invertibility**

يتم في العادة حساب استجابة الحالة صفراً عند تحليل الأنظمة بمعلومية إثارة معينة. ولكننا أحياناً نوجد الإثارة بمعلومية استجابة الحالة صفر، إذا كان النظام قابل للانعكاس.

| |
|---|
| يطلق على أي نظام بأنه انعكاسي إذا كانت كل إثارة وحيدة تعطي استجابة حالة صفر وحيدة. |

إذا كان أي دخل محدد يعطي استجابة وحيدة للحالة صفر، فإنه من الممكن، من حيث المبدأ على الأقل، أنه بمعلومية استجابة الحالة صفر، أن يتم ربط هذه الاستجابة بالإثارة التي أنتجتها. وهناك العديد من الأنظمة العملية التي تعتبر انعكاسية.

هناك طريقة أخرى لوصف الأنظمة الانعكاسية وهي أن نقول أنه إذا كان أي نظام انعكاسيا فإنه يوجد نظام عكسي بحيث أنه عند تغذية هذا النظام العكسي باستجابة النظام الأول، فإنه يعطي إثارة هذا النظام نفسها كما في شكل (٤,٣٣).

مثال على الأنظمة الانعكاسية هو أي نظام يمكن وصفه بمعادلة تفاضلية، خطية، وثابتة زمنياً، وذات معاملات ثابتة على الصورة التالية:

$$A_k y^{(k)}(t)+a_{k-1}y^{(k-1)}(t)+ \ldots + a_1y'(t)+a_0y(t) = x(t)$$

**شكل رقم (٤,٣٣) نظام متبوع بنظام آخر عكسي له.**

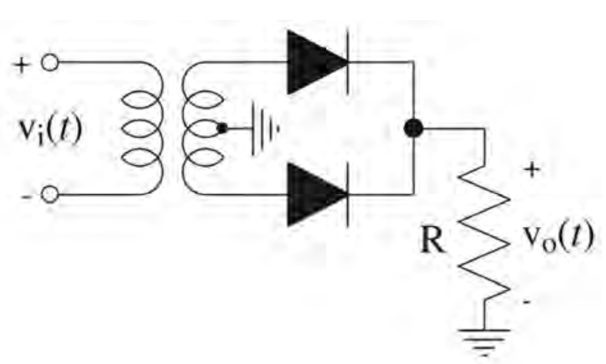
إذا كانت الاستجابة $y(t)$ معروفة، فإنه بالتالي تكون كل تفاضلاتها معلومة. المعادلة السابقة توضح تماماً كيفية حساب الإثارة كتجميع خطي للاستجابة $y(t)$ وتفاضلاتها.

مثال على نظام ليس انعكاسياً هو النظام الاستاتيكي الذي تكون علاقة خرجه بدخله كما يلي:

$$y(t)=\sin(x(t))$$ المعادلة رقم (٤,١٠)

يمكن في هذا النظام حساب استجابة الحالة صفر لأي دخل $x(t)$، ولذلك فإنه يمكن بمعرفة أي استجابة وحيدة تحديد استجابة الحالة صفر. ولكن إذا حاولنا إيجاد الإثارة، بمعلومية الاستجابة، عن طريق إعادة كتابة المعاددلة (٤,١٠) على الصورة $x(t)=\sin^{-1}(y(t))$، فإننا سنواجه مشكلة، وهي أن دالة الجيب العكسية متعددة القيم، ولذلك فإنه بمعلومية استجابة الحالة صفر لن يمكن التحديد الأوحد للإثارة. لذلك فإن النظام لا يتبع أساسيات الانعكاسية بسبب أن الإثارات المختلفة يمكنها أن تنتج الاستجابة نفسها. إذا كان عندما $t=t_0$ كانت الإثارة $x(t_0)=\pi/4$، فإن الخرج سيكون $y(t_0)=\sqrt{2}/2$. ولكن إذا كان عندما $t=t_0$ كانت الإثارة $x(t_0)=3\pi/4$، فإن الاستجابة $y(t_0)$ ستكون القيمة $y(t_0)=\sqrt{2}/2$ نفسها، ولذلك فإنه بملاحظة استجابة الحالة صفر فقط، فلن تكون لدينا أي فكرة عن أي الإثارات قد تسببت في هذه الاستجابة.

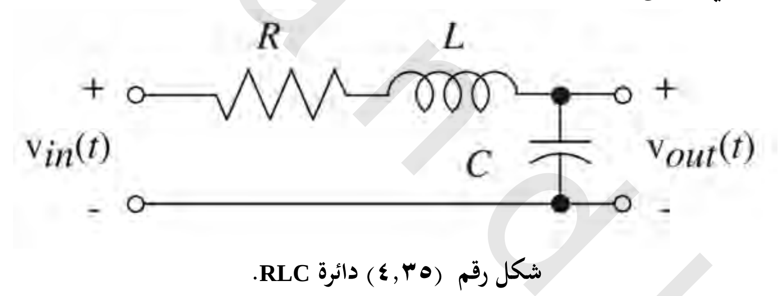
مثال آخر على الأنظمة غير الانعكاسية، هو النظام المعروف لمصممي الدوائر الإلكترونية، وهو موحد الموجة الكاملة كما في شكل (٤,٣٤). افترض أن المحول مثالياً، ونسبة اللف له هي 1:2، وأن الدايودات (الصمامات الثنائية) أيضاً مثالية بحيث لا يوجد فرق جهد خلال الدايود (الصمام الثنائي) عندما يكون منحازا في الاتجاه الأمامي والتيار المار خلالها في الانحياز العكسي يساوي صفراً. وعلى ذلك فإن علاقة إشارة جهد الخرج $v_o(t)$ وجهد الدخل $v_i(t)$ ستكون على الصورة $v_o(t)=|v_i(t)|$. افترض أنه عند زمن معين كانت إشارة جهد الخرج تساوي +1V فإن جهد الدخل عند هذا الزمن ستكون +1V أو −1V. لا توجد طريقة لمعرفة أي واحدة من إشاراتي جهد الدخل ستكون هي الإثارة عن طريق ملاحظة إشارة الخرج، ولذلك فلن يمكننا التأكد من التشكيل الصحيح للدخل المقابل لهذه الاستجابة، ولذلك فإن هذا النظام ليس انعكاسياً.




**شكل رقم (٤,٣٤) موحد الموجة الكاملة.**

**ديناميكية أنظمة الدرجة الثانية**

أنظمة الدرجة الأولى والثانية هي أكثر أنواع الأنظمة شيوعاً في تحليل وتصميم الأنظمة. أنظمة الدرجة الأولى يتم وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الأولى، وأنظمة الدرجة الثانية يتم وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الثانية. لقد رأينا أمثلة على أنظمة الدرجة الأولى. كمثال على أنظمة الدرجة الثانية سنعتبر دائرة RLC التي تتم إثارتها بوحدة خطوة كما في شكل (٤,٣٥).




**شكل رقم (٤,٣٥) دائرة RLC.**

مجموع الجهود حول الحلقة يمكن كتابته كما يلي:

$$LC\, v''_{out}(t)+RC\, v'_{out}(t)+v_{out}(t)= Au(t)$$ المعادلة رقم (٤,١١)

والحل لهذه المعادلة لإيجاد جهد الخرج سيكون على الصورة:

$$v_{out}(t) = K_1 e^{\left(-\frac{R}{2L}+\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}\right)t} + K_2 e^{\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}\right)t} + A$$

وكل من $K_1$ و $K_2$ ثوابت اختيارية.

كما نرى فهذا الحل أكثر تعقيداً من حل معادلة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. هناك كميتان أسيتان، كل منهما به كمية أسية أكثر تعقيداً. يشتمل الأس على جذر تربيعي من الممكن أن يكون سالبا، ولذلك فإن الكمية الأسية من الممكن أن تكون كمية مركبة. لهذا السبب، فإن الدالة المميزة $e^{st}$ تسمى أساً مميزاً. إن حل المعادلة التفاضلية ذات المعاملات الثابتة يكون في الغالب مجموعاً خطياً من الأسس المركبة.

في دائرة ال RLC، إذا كانت هذه الأسس حقيقية، فإن الاستجابة تكون حقيقة مجموع اثنين من الأسس الحقيقية. الحالة الأكثر إثارة هي الأسس المركبة. هذه الأسس تكون مركبة إذا كان:

$$(R/2L)^2 - 1/LC < 0$$ المعادلة رقم (٤،١٢)

في هذه الحالة يمكن كتابة الحل بدلالة اثنين من المعاملات القياسية لأنظمة الدرجة الثانية وهما، التردد الزاوي الطبيعي $\omega_n$ ومعامل الكبح $\alpha$ كما يلي:

$$v_{out}(t) = K_1 e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_n^2}\right)t} + K_2 e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_n^2}\right)t} + A$$ المعادلة رقم (٤،١٣)

حيث $\alpha = R/2L$ و $\omega_n^2 = 1/LC$

هناك معاملان آخران واسعا الاستخدام في أنظمة الدرجة الثانية، وهما متعلقان بكل من $\omega_n$ و $\alpha$، إنهما التردد الزاوي الحرج $\omega_c$، ونسبة الكبح $\zeta$. إنهما يحددان بالعلاقتين $\zeta = \alpha/\omega_n$ و $\omega_c = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. وعلى ذلك يمكننا كتابة ما يلي:

$$v_{out}(t) = K_1 e^{\left(-\alpha+\omega_n\sqrt{\zeta^1-1}\right)t} + K_2 e^{\left(-\alpha-\omega_n\sqrt{\zeta^1-1}\right)t} + A$$

عندما تتحقق شروط المعادلة (٤،١٢)، فإن هذا النظام يعرف بأنه نظام تحت الكبح ويمكن كتابة الاستجابة في هذه الحالة كما يلي:

$$v_{out}(t) = K_1 e^{(-\alpha+j\omega_c)t} + K_2 e^{(-\alpha-j\omega_c)t} + A$$

كما نرى فإن الأسس يكون كل منها المرافق المركب للآخر كما يجب أن يكون $v_{out}(t)$ لكي يكون دالة ذات قيم حقيقية.

بفرض أن الدائرة كانت في البداية في حالتها الصفرية وبتطبيق الشروط الأولية، فإن إشارة جهد الخرج ستكون:

$$v_{out}(t) = A\left[\frac{1}{2}\left(-1+j\frac{\alpha}{\omega_c}\right)e^{(-\alpha+j\omega_c)t} + \frac{1}{2}\left(-1-j\frac{\alpha}{\omega_c}\right)e^{(-\alpha-j\omega_c)t} + 1\right]$$

هذه الاستجابة تعبر عن استجابة مركبة لنظام حقيقي مع إثارة حقيقية، ولكن على الرغم من أن المعاملات والأسس تكون مركبة، إلا أن الحل الكلي يكون حقيقياً؛ لأنه باستخدام العلاقات المثلثية يمكن كتابة إشارة جهد الخرج كما يلي:

$$v_{out}(t) = A\{1 - e^{-\alpha t}[(\alpha/\omega_c)\sin(\omega_c t) + \cos(\omega_c t)]\}$$

هذا الحل هو في الحقيقة دالة جيب متناقصة، أي دالة جيب مضروبة في أس متناقص. يمثل التردد الطبيعي $f_n = \omega_n/2\pi$ التردد الذي ستتذبذب عنده الاستجابة الجهدية إذا كان معامل الكبح سيساوي صفراً. المعدل الذي ستتناقص معه دالة الجيب يتم تحديدة بمعامل التناقص أو الكبح $\alpha$. أي نظام يتم وصفه عن طريق معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية يمكن تحليله بطريقة أو خطوات مماثلة.

**الإثارة الجيبية المركبة**

تعتبر أنظمة LTI المثارة بإشارة جيبية مركبة حالة خاصة مهمة لتحليل الأنظمة الخطية. افترض أن إشارة جهد الدخل لدائرة RLC هي $v_{in}(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$. من المهم أن نفهم أن $v_{in}(t)$ يتم وصفها تماما عند كل الأزمنة. إنها لا تكون دالة جيبية مركبة من الآن أو من هذه اللحظة فقط بل إنها دائما جيبية مركبة عند كل الأزمنة. حيث إن هذه الإشارة تبدأ عند زمن لا نهائي في الماضي، وعلى ذلك فأي تغيرات وقتية قد تكون حدثت من المفروض أنها تكون قد ماتت (إذا كان النظام مستقراً، كما هو الحال في دائرة RLC). ولذلك فإن الحل الذي سيكون متبقيا عند هذه اللحظة سيكون هو الاستجابة المعززة. الاستجابة المعززة هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التي تصف النظام. حيث إن كل تفاضلات الجيب المركب تكون أيضاً جيباً مركباً، فإن الحل الخاص للدخل $v_{in}(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ سيكون $v_{out,p}(t) = Be^{j2\pi f_0 t}$ حيث B لم يتم تحديدها حتى الآن. لذلك فإنه إذا تمت إثارة هذا النظام ال LTI عن طريق دالة جيبية مركبة، فإن الاستجابة ستكون أيضاً دالة جيبية مركبة لها التردد نفسه، ولكن بثابت ضرب مختلف (عموما). أي نظام LTI تتم إثارته بدالة جيبية مركبة، فإن الاستجابة ستكون أيضاً دالة مركبة لها نفس التردد، ولكن لها ثابت ضرب مختلف عموماً. أي نظام LTI تتم إثارته بدالة جيبية مركبة يستجيب بدالة جيبية لها الأس المركب نفسه بنفس شكل الدالة، فيما عدا الضرب في ثابت مركب.

الحل المعزز يمكن إيجاده عن طريق المعاملات غير المحددة. بتعويض شكل الحل في المعادلة التفاضلية (٤,١١) نحصل على:

$$(j2\pi f_0)^2 LCBe^{j2\pi f_0 t} + j2\pi f_0 RCBe^{j2\pi f_0 t} + Be^{j2\pi f_0 t} = Ae^{j2\pi f_0 t}$$

بحل هذه المعادلة نحصل على:

$$B = \frac{A}{(j2\pi f_0)^2 LC + j2\pi f_0 RC + 1}$$

باستخدام نظرية التجميع لأنظمة ال LTI، فإنه إذا كان الدخل أي دالة اختيارية هي مجموع خطي من الجيوب المركبة التي لها ترددات مختلفة، فإن إشارة الخرج ستكون أيضاً مجموعا مركبا من الجيوب المركبة التي لها الترددات نفسها. هذه الفكرة هي الأساس لطرق التحليل باستخدام تتابعات فورير وتحويل فورير التي ستقدم في الفصل ٦ والفصل ٧ التي تعبر عن الدوال الاختيارية بمجموع مركب من الجيوب المركبة.

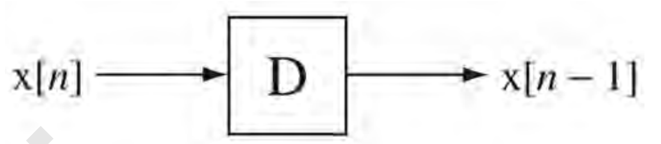
## (٤,٣) أنظمة الزمن المتقطع

**نمذجة الأنظمة**

**المخطط الصندوقي**

عند رسم المخطط الصندوقي لأنظمة الزمن المتقطع ستكون هناك بعض العمليات التي تظهر دائماً ولذلك تم تخصيص رموز المخطط الصندوقي الخاص بها تماماً مثلما هو الحال في أنظمة الزمن المستمر. المكونات الثلاثة

الأساسية في أي نظام في الزمن المتقطع هي المكبر، ونقطة التجميع، والتأخير. المكبر ونقطة التجميع تؤديان الدور نفسه في الأنظمة المتقطعة زمنياً الذي تلعبه في الأنظمة المستمرة زمنياً. بلوك التأخير يتم إثارته بإشارة متقطعة زمنياً وهو يستجيب بالإشارة نفسها ، فيما عدا أنها تكون متأخرة بوحدة زمنية واحدة من وحدات الزمن المتقطع كما في شكل (٤,٣٦). إن هذا الرمز الأكثر شيوعاً ولكن أحياناً يتم استبدال ال D بـ S التي تعني shift أو إزاحة.




**شكل رقم (٤,٣٦) رمز البلوك المستخدم في رسم التأخير في الزمن المتقطع.**

**المعادلة الفرقية**

سنعرض فيما يلي بعض الأمثلة على الأفكار المشتملة على أنظمة الزمن المتقطع. ثلاثة من هذه الأنظمة تم تقديمها في الفصل ١.

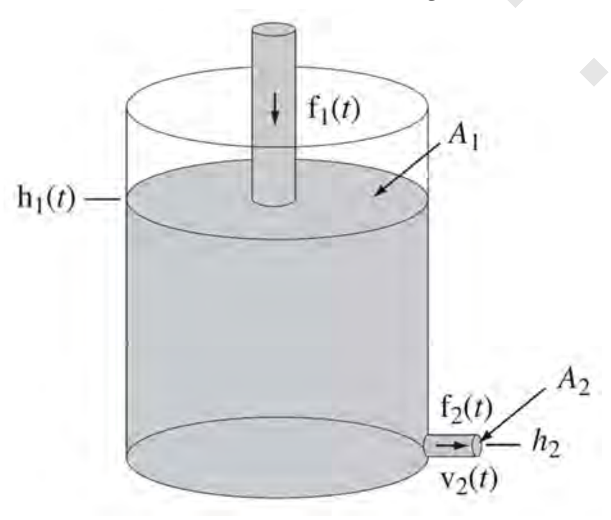
**مثال ٤,٩**

**النمذجة التقريبية لنظام زمن مستمر باستخدام نظام زمن متقطع**

واحد من استخدامات أنظمة الزمن المتقطع هو في نمذجة الأنظمة غير الخطية المستمرة زمنياً مثل: نظام ميكانيكا الموائع الموضح في شكل (٤,٣٧). إن حقيقة أن المعادلة التفاضلية التالية :

$$A_1 \frac{d}{dt}\left(h_1(t)\right) + A_2\sqrt{2g[h_1(t) - h_2]} = f_1(t)$$

(معادلة تورشيللي) تكون معادلة غير خطية يجعل من الصعب حلها عن المعادلات التفاضلية الخطية.




**شكل رقم (٤,٣٧) خزان له فوهة يتم ملؤه من أعلى.**

واحد من الطرق لإيجاد حل لهذه المعادلة يكون باستخدام الطرق العددية. يمكننا تقريب التفاضل بالتفاضل المحدود:

$$\frac{d}{dt}(h_1(t)) = \frac{h_1((n+1)T_s) - h_1(nT_s)}{T_s}$$

حيث Ts هي فترة زمنية محددة بين قيم $h_1$ عند نقط منتظمة الفواصل الزمنية، و n تشير إلى هذه النقط. وعلى ذلك يمكن تقريب معادلة تورشيللي عند هذه النقط الزمنية كما يلي:

$$A_1\frac{h_1((n+1)Ts) - h_1(nTs))}{Ts} + A_2\sqrt{2g[h_1(nTs) - h_2]} \cong f_1(nTs)$$

التي يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

المعادلة رقم (٤) $$h_1((n+1)T_s) \cong \frac{1}{A_1}\{T_s f_1(nT_s) + A_1 h_1(nT_s) - A_2 T_s\sqrt{2g[h_1(nT_s) - h_2]}\}$$

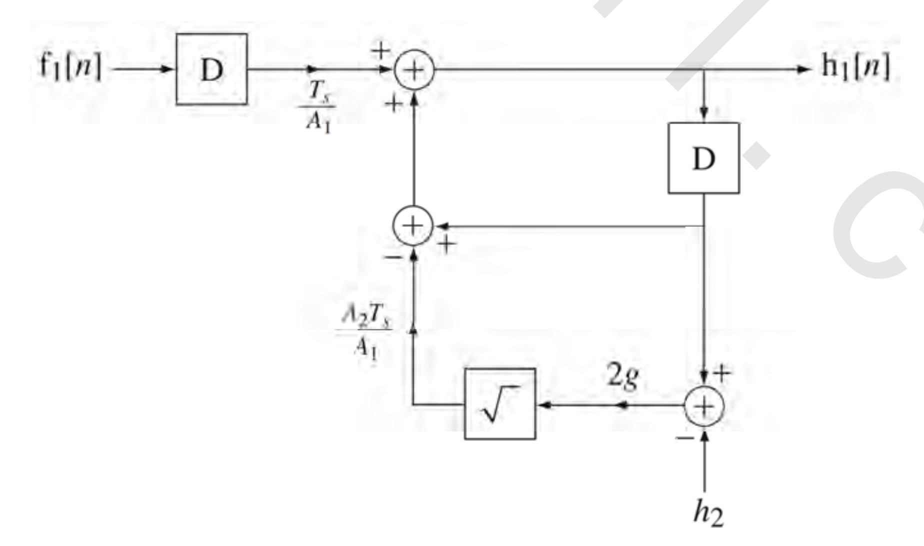
والتي تعبر عن قيم $h_1$ عند النقطة الزمنية التالية n+1 بدلالة القيم $f_1$ عند النقطة الزمنية الحالية n و $h_1$ عند النقطة الزمنية الحالية أيضاً. يمكن كتابة المعادلة (٤،١٤) في صورة مبسطة في الزمن المتقطع كما يلي:

$$h_1[n+1] \cong \frac{1}{A_1}\{T_s f_1[n] + A_1 h_1[n] - A_2 T_s\sqrt{2g(h_1[n] - h_2}\}$$

أو استبدال n بـ n.1 كما في المعادلة التالية:

المعادلة رقم (٤،١٥) $$h_1[n] \cong \frac{1}{A_1}\{T_s f_1[n-1] + A_1 h_1[n-1] - A_2 T_s\sqrt{2g(h_1[n-1] - h_2}\}$$

في المعادلة (٤،١٥) بمعلومية قيمة $h_1$ عند أي n يمكننا أن نوجد (تقريباً) قيمتها عند أي n أخرى. هذا التقريب يكون أفضل عن طريق تصغير Ts. إن ذلك يعتبر مثالاً على حل مسألة مستمرة زمنياً باستخدام طريقة متقطعة زمنياً. حيث إن المعادلة (٤،١٥) تمثل معادلة فرقية فإنها تحدد أو تعرف نظاماً متقطعاً زمنياً كما في شكل (٤،٣٨).




**شكل رقم (٤،٣٨) نظام يوضح الحل التقريبي العددي للمعادلة التفاضلية لتدفق المائع.**

يوضح شكل (٤،٣٩) أمثلة عددية لحل معادلة تورشيللي باستخدام النظام المتقطع زمنياً في شكل (٤،٣٨) لثلاثة من معدلات أخذ العينات المختلفة وهي 100 ثانية ، و 500 ثانية ، و 1000 ثانية. النتيجة عندما Ts=100 دقيقة إلى حد كبير. النتيجة عند Ts=500 تسلك العام الصحيح وتقترب من القيمة النهائية الصحيحة ، ولكنها تصل للقيمة النهائية مبكراً. النتيجة عند Ts=1000 لها شكل خاطىء تماماً ، على الرغم من أنها تقترب من الحل النهائي الصحيح. إن اختيار قيم زمن أخذ العينات الكبيرة جداً التي تجعل الحل غير صحيح ، في بعض الأحوال ، من الممكن أن تجعل الخواريزم الرقمي غير مستقر.

البرنامج التالي بشفرات الماتلاب يحاكي النظام الموضح في شكل (٤،٣٨) المستخدم في حل المعادلة التفاضلية التي تصف نظام الخزان ذا الفوهة :

g = 9.8 ; % عجلة الجاذبية الأرضية.

A1 = 1 ; % مساحة السطح الحر للماء في الخزان.

A2 = 0.0005 ; % المساحة الفعالة للفوهة.

h1 = 0 ; % ارتفاع السطح الحر للماء في الخزان.

h2 = 0 ; % ارتفاع الفوهة.

f1 = 0.004 ; % التدفق الحجمي للماء.

Ts = [100,500,1000] ; % متجه النقط الزمنية.

N = round(8000./Ts) ; % متجه عدد الخطوات الزمنية.

for m = 1:length(Ts), % المرور خلال المقاطع الزمنية.

h1 = 0 ; % ابدأ من الصفر.

h = h1 ; % أول قيمة في متجه ارتفاع الماء.

% المرور على عدد المقاطع الزمنية وحساب ارتفاع الماء باستخدام تقريب نظام الزمن المتقطع.

% للنظام الحقيقي المستمر زمنياً.

for n = 1:N(m), .

% احسب السطح الحر للماء التالي.

h1 = (Ts(m)*f1 + A1*h1 . A2*Ts(m)*sqrt(2*g*h1.h2))/A1 ;

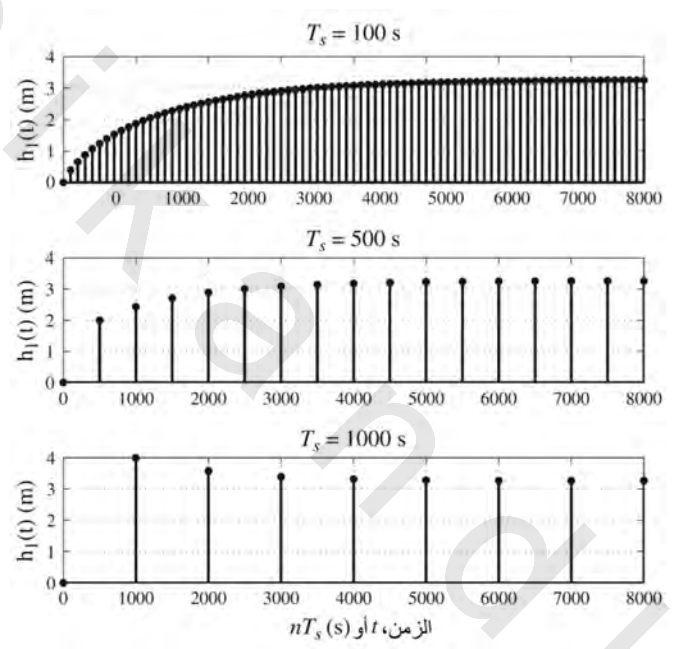
h = [h ; h1] ; % الحق مع متجه ارتفاع الماء.

end

% ارسم ارتفاع سطح الماء الحر مع الزمن.

%التعليق على الرسم

```
subplot(length(Ts),1,m) ;
p = stem(Ts(m)*[0:N(m)]',h,'k','fi lled') ;
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ; grid on ;
if m == length(Ts),
p = xlabel('Time, t or {\itnT_s} (s)',...
'FontName','Times','FontSize',18) ;
end
p = ylabel('h_1(t) (m)','FontName','Times','FontSize',18) ;
p = title(['{\itT_s} = ',num2str(Ts(m)),...
' s'],'FontName','Times','FontSize',18) ;
end
```

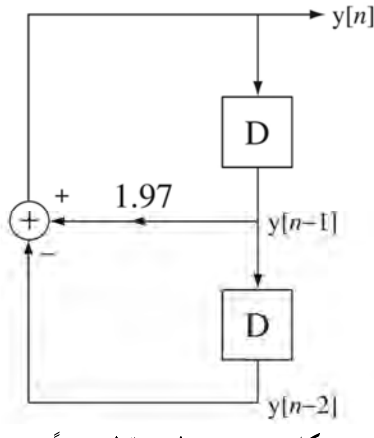



**شكل (٤,٣٩). حل عددي لمعادلة تورشيللي باستخدام النظام المتقطع زمنياً في شكل (٤,٣٨) لمعدل تدفق حجمي داخل مقداره $0.004m^3/s$.**

**مثال ٤,١٠**

**نمذجة نظام تغذية عكسية بدون إثارة**

أوجد إشارة الخرج المتولدة من النظام الموضح في شكل (٤,٤٠) في الأزمنة n≥0. افترض الشروط الابتدائية y[0]=1 و y[.1]=0.




**شكل (٤،٤٠) نظام متقطع زمنياً.**

النظام الموجود في شكل (٤،٤٠) يمكن وصفه بالمعادلة الفرقية التالية :

y[n]=1.97y[n.1].y[n.2] المعادلة رقم (٤،١٦)

هذه المعادلة، مع الشروط الابتدائية y[0]=1 و y[-1]=0، يحددان تماماً الاستجابة y[n]، والتي هي استجابة الدخل الصفري. استجابة الدخل الصفري يمكن حسابها عن طريق تكرار المعادلة (٤،١٦).إن ذلك سيعطي حلا صحيحا، ولكنه سيكون في صورة تتابع لا نهائي من قيم الاستجابة. يمكن حساب استجابة الدخل الصفري في صورة مغلقة عن طريق حل المعادلة الفرقية (انظر ملحق الويب ث). حيث أنه لا توجد إشارة تثير النظام، فإن المعادلة ستكون متجانسة. الصورة الدالية للحل المتجانس هي الأس المركب على الصورة $Kz^n$. بالتعويض بذلك في المعادلة الفرقية نحصل على $Kz^n=1097Kz^{n-1}.Kz^{n.2}$. بالقسمة على $Kz^{n-2}$ نحصل على المعادلة المميزة وبالحل نحصل على قيم z التالية :

$$z=\frac{1.97\pm\sqrt{1.97^2-4}}{2}=0.985\pm j0.12726=e^{\pm j0.1734}$$

حقيقة أن هناك قيمتين مميزتين تعني أن الحل المتجانس سيكون على الصورة :

$y[n]=K_{h1}z_1^n+K_{h2}z_2^n$ المعادلة رقم (٤،١٧)

لدينا الشروط الابتدائية y[0]=1 و y[-1]=0 ونحن نعرف من المعادلة (٤،١٧) أن $y[0]=K_{h1}+K_{h2}$ و $y[-1]=K_{h1}z_1^{-1}+K_{h2}z_2^{-1}$، ولذلك يمكننا كتابة :

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ e^{-j0.1734} & e^{+j0.1734}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{h1}\\ K_{h2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

ومنها يمكن حساب الثابتين $K_{h1}=0.5-j2.853$ و $K_{h2}=0.5+j2.853$. وعلى ذلك فالحل الكامل سيكون على الصورة :

$$y[n]=(0.5-j2.853)(0.985+j0.1726)^n+(0.5+j2.853)(0.985-j0.1726)^n$$

هذه الصورة تمثل الحل الصحيح ولكنه ليس على الصورة المريحة، لذلك يمكننا كتابتها على الصورة :

$$y[n]=(0.5-j2.853)e^{j0.1734n}+(0.5+j2.853)e^{-j0.1734n}$$

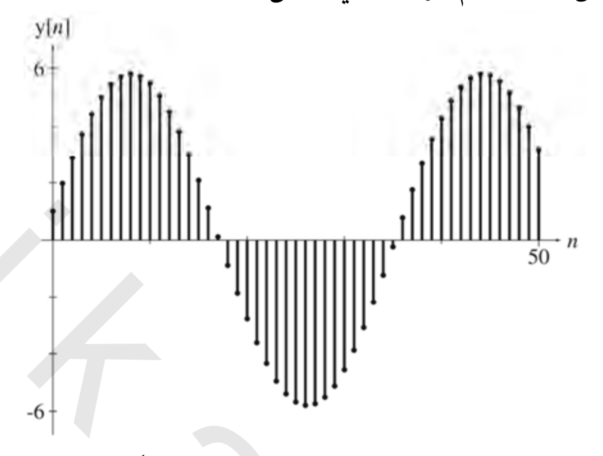
أو يمكن كتابتها على الصورة :

$$y[n]=0.5(e^{j0.1734n} + e^{-j0.1734n}) - j2.853(e^{j0.1734n} + e^{-j0.1734n})$$

أو

$$y[n]=\cos(0.1734n) + 5.706\sin(0.1734n)$$

أول ٥٠ قيمة من الإشارة الناتجة من هذا النظام موضحة في شكل (٤,٤١).




**شكل رقم (٤,٤١) الإشارة الناتجة من النظام المتقطع زمنياً في شكل (٤,٤٠).**

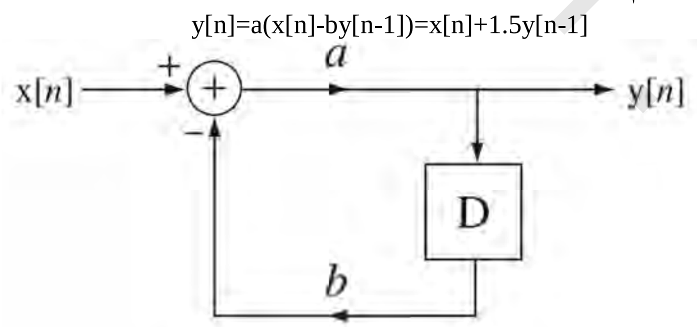
**مثال ٤,١١**

**نمذجة نظام تغذية عكسية مع الإثارة**

احسب استجابة النظام الموضح في شكل (٤,٤٢) إذا كانت $a=1$ و $b=-1.5$ و $x[n]=\delta[n]$ والنظام يكون في البداية مستقراً.

المعادلة الفرقية لهذا النظام يمكن كتابتها على الصورة :

$$y[n]=a(x[n]-by[n-1])=x[n]+1.5y[n-1]$$




**شكل رقم (٤,٤٢) نظام تغذية عكسية بسيط متقطع زمنياً بإثارة لا تساوي صفراً.**

حل هذه المعادلة للأزمنة $n\geq0$ يكون حلاً متجانساً على الصورة $K_h z^n$. بالتعويض والحل نحصل على $z=1.5$. ولذلك فإن $y[n]=K_h(1.5)^n$ ، $n\geq0$. يمكن حساب الثابت بمعرفة القيمة الابتدائية للاستجابة التي هي من مخطط النظام يجب أن تكون واحداً. ولذلك :

$K_h=1$ ومنها $y[0]=1=K_h(1.5)^0$

وعلى ذلك فإن $y[n]=(1.5)^n$، لكل $n\geq0$.

من الواضح أن هذا الحل يتزايد باستمرار بدون حدود، وعلى ذلك فالنظام يكون غير مستقر. إذا اخترنا b بمقدار أقل من الواحد، فإن النظام سيكون مستقراً لأن الحل سيكون على الصورة $y[n]=b^n$ لكل قيم $n\geq0$.

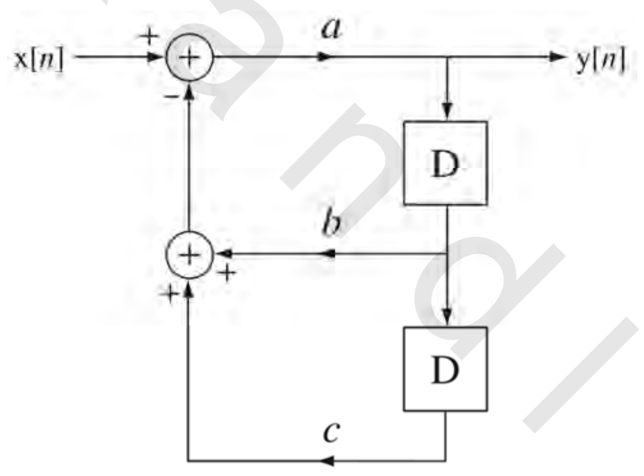
**مثال ٤,١٢**

**نمذجة نظام تغذية عكسية أكثر تعقيداً مع الإثارة**

احسب استجابة الحالة صفر للنظام الموضح في شكل (٤,٤٣) للأزمنة $n\geq0$ للدخل $x[n]=1$ الذي تم تطبيقه عند الزمن $n=0$، بفرض أن كل الإشارات في النظام تساوي صفراً للأزمنة ما قبل $n=0$ مع فرض أن $a=1$، و $b=-1.5$ والثلاث قيم المختلفة لـ c هي 0.8 و 0.6 و 0.5.

المعادلة الفرقية لهذا النظام يمكن كتابتها على الصورة:

(٤,١٨) $y[n]=\alpha(x[n]-by[n-1]-cy[n-2])=x[n]+1.5y[n-1]-cy[n-2]$ المعادلة رقم (٤,١٨)



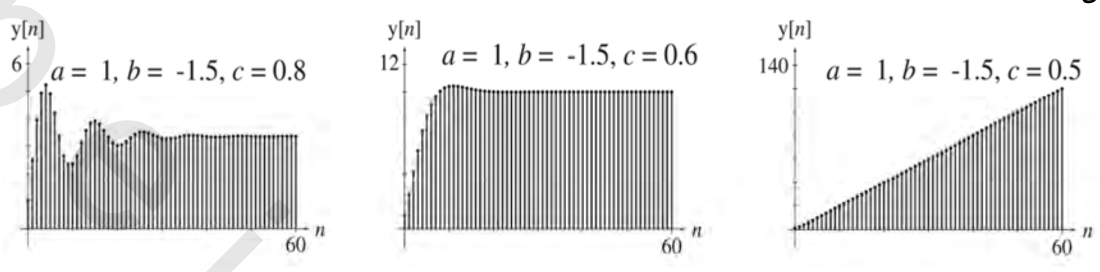

**شكل رقم (٤,٤٣) نظام بتغذية عكسية أكثر تعقيداً.**

استجابة النظام هي الحل الكلي للمعادلة الفرقية مع الشروط الابتدائية. يمكننا إيجاد حل في صورة مغلقة عن طريق حساب الحل الكلي للمعادلة الفرقية. الحل المتجانس يمكن كتابته على الصورة التالية: $y_h[n]=K_{h1}z_1^n+K_{h2}z_2^n$ حيث $z_{1,2}=0.75\pm\sqrt{0.5625-c}$. الحل الخاص يكون على صورة مجموع خطي من إشارة الدخل وكل الفروق الأحادية. إشارة الدخل ثابتة، وبالتالي كل فروقها تكون أصفاراً، ولذلك فإن الحل الخاص يكون ببساطة ثابت $K_p$. بالتعويض في المعادلة الفرقية نحصل على:

$K_p-1.5K_p+cK_p=1$ وبالتالي فإن $K_p=1/(c-0.5)$

باستخدام المعادلة (٤،١٨) يمكننا إيجاد أول قيمتين ابتدائيتين لـ y[n] المطلوبة للحل للثابتين المجهولين $K_{h1}$ و $K_{h2}$. هذه القيم هي y[0]=1 و y[1]=2.5.

في الفصل١ تم بيان ثلاث استجابات لـ a=1 و b=-1.5 و c=0.8, 0.6, 0.5. هذه الاستجابات تمت إعادة رسمها في شكل (٤،٤٤).




**شكل رقم (٤،٤٤) استجابة الحالة صفر لثلاث أشكال مختلفة للتغذية العكسية.**

توضح نتائج المثال ٤،١٢ أهمية التغذيةالعكسية في تحديد استجابة أي نظام. في الحالتين الأولى والثانية تكون إشارة الخرج محددة، ولكن في الحالة الثالثة تكون إشارة الخرج غير محددة، على الرغم من أن إشارة الدخل تكون محددة. مثلما هو الحال تماما في الأنظمة المستمرة زمنياً، حيث يمكن في أي لحظة لأي نظام متقطع زمنياً أن يعرض استجابة الحالة صفر غيرالمحددة لإثارة محددة من أي نوع، فإن هذا النظام يتم تصنيفه على أنه نظام غير مستقر BIBO. وعلى ذلك فإن استقرار أنظمة التغذية العكسية تعتمد على طبيعة هذه التغذية العكسية.

**خواص النظام**

خواص الأنظمة المتقطعة زمنياً تكون في الغالب متماثلة، بدقة، مع خواص الأنظمة المستمرة زمنياً. في هذا الجزء سنستعرض أمثلة على بعض خواص أنظمة الزمن المتقطع.

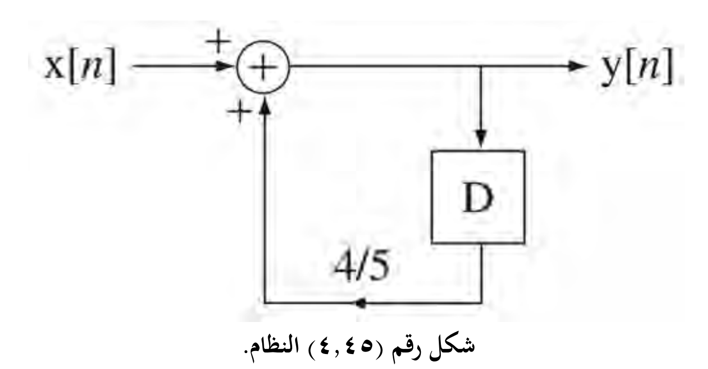
افترض النظام الموضح في شكل(٤،٤٥). الدخل والخرج لهذا النظام يرتبطان بالمعادلة الفرقية التالية: y[n]=x[n]+(4/5)y[n-1]. الحل المتجانس لهذه المعادلة على الصورة $y[n]=K_h(4/5)^n$. افترض x[n] هي تتابع الوحدة، وبالتالي فإن الحل الخاص سيكون $y_p[n]=5$ والحل الكلي سيكون $y[n]=K_h(4/5)^n+5$. (انظر الملحق ث للمزيد عن طرق حل المعادلات الفرقية). إذا كان النظام في حالته الصفرية قبل الزمن n=0 فإن الحل الكلي سيكون:

$$y[n] = \begin{cases} 5 - 4(4/5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

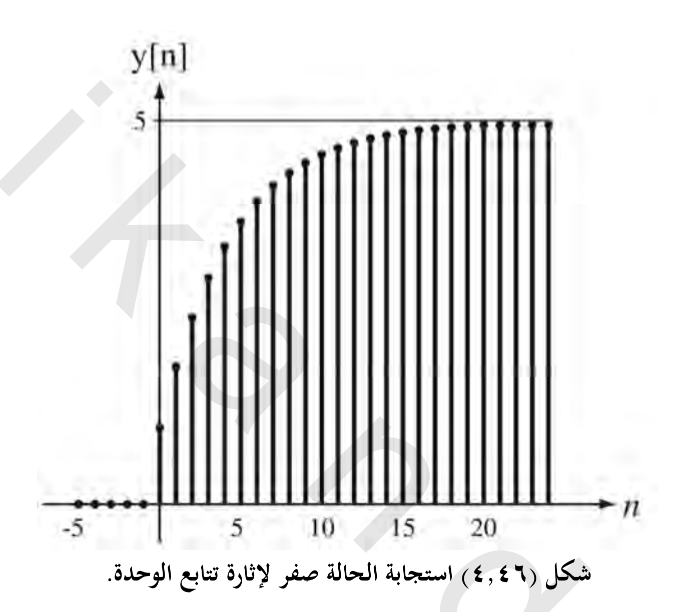
أو

$$y[n]=[5-4(4/5)^n]u[n]$$

انظر شكل (٤،٤٦).




شكل رقم (٤,٤٥) النظام.



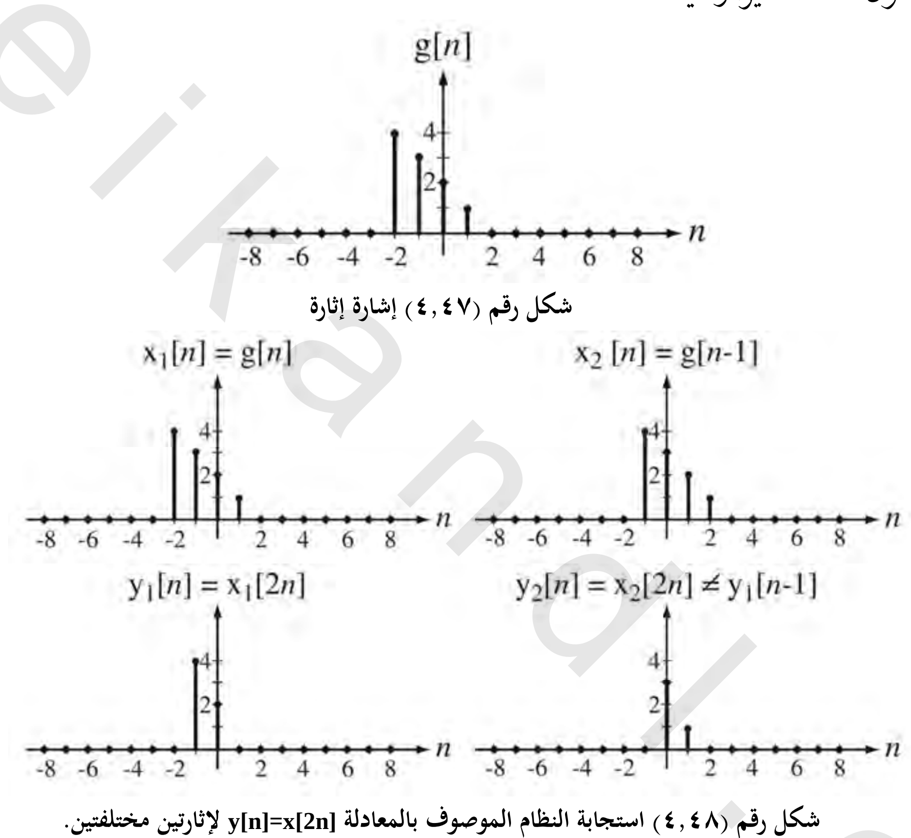

شكل (٤,٤٦) استجابة الحالة صفر لإثارة تتابع الوحدة.

التشابه بين شكل استجابة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة لإثارة وحدة الخطوة وغلاف الاستجابة لهذا النظام لتتابع وحدة ليس محض صدفة. إن هذا النظام هو مرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة (هناك المزيد عن المرشحات الرقمية في الفصلين ١١ و ١٥).

إذا تم ضرب الإثارة لهذا النظام في أي ثابت، فإن الاستجابة يتم ضربها بالثابت نفسه، وعلى ذلك فهذا النظام يعتبر متجانساً. إذا أخرنا الإثارة لهذا النظام بأي زمن وليكن $n_0$، فإن الاستجابة تتأخر بالكمية نفسها، لذلك فإن هذا النظام يكون ثابتاً زمنياً أيضاً. إذا جمعنا إشارتين لتكوين إثارة لهذا النظام، فإن استجابة هذا النظام ستكون مجموع الاستجابتين اللتين تنتجان لو أنه تم تطبيق كل إثارة وحدها، ولذلك فإن هذا النظام يكون نظام LTI متقطع زمنياً. أيضاً فإن هذا النظام يعطي استجابة محدودة لأي إثارة محدودة، لذلك فهذا النظام يكون مستقراً أيضاً.

مثال بسيط على الأنظمة التي لا تكون ثابتة زمنياً من الممكن أن يكون نظاماً وصفه كالتالي : $y[n]=x[2n]$. إفترض $x_1[n]=g[n]$ ، وافترض أيضاً $x_2[n]=g[n.1]$ ، حيث $g[n]$ هي الإشارة الموضحة في شكل (٤،٤٧)، وافترض أن الاستجابة لـ $x_1[n]$ هي $y_1[n]$ ، وافترض أن الاستجابة لـ $x_2[n]$ هي $y_2[n]$. هذه الإشارات موضحة في شكل (٤،٤٨).

ما دامت $x_2[n]$ هي نفسها $x_1[n]$ فيما عدا التأخير بمقدار وحدة زمنية متقطعة، لكي يكون هذا النظام ثابتاً زمنياً، فإن $y_2[n]$ يجب أن تكون مثل $y_1[n]$ فيما عدا التأخير بمقدار وحدة زمنية واحدة، ولكنها ليست كذلك. لذلك فإن هذا النظام يكون نظاماً متغيراً زمنياً.




**شكل رقم (٤،٤٧) إشارة إثارة**

**شكل رقم (٤،٤٨) استجابة النظام الموصوف بالمعادلة $y[n]=x[2n]$ لإثارتين مختلفتين.**

مثال جيد على الأنظمة المستقرة BIBO، هو النظام المالي لحساب الفائدة المركبة. إذا تم إيداع كمية أساسية من النقود P في وعاء استثماري بدخل ثابت بمعدل فائدة r، والكمية $A[n]$، التي تمثل قيمة الاستثمار بعد عدد من السنوات n، هي $A[n]=P(1+r)^n$. الكمية $A[n]$ تنمو بدون حدود مع مرور الزمن المتقطع n، فهل يعني ذلك أن النظام البنكي غير مستقر ؟ إن هذه الكمية تنمو بدون حدود، وعند زمن لا نهائي ستصبح هذه الكمية لا نهائية. ولكن حيث إنه لا يوجد شخص الآن (ولن يوجد في المستقبل) سيعيش طويلاً ليرى ذلك يحدث، فإن حقيقة أن هذا النظام غير مستقر تبعاً لهذا التعريف ليس له أهمية. عندما نفترض السحوبات التي لا مفر منها من الحساب، فإننا نرى أن هذا الوضع من عدم الاستقرار النظري ليس له أهمية.

النوع الأكثر شيوعاً من الأنظمة المتقطعة زمنياً التي تتم دراستها في الإشارات والأنظمة هي الأنظمة التي علاقة دخلها بخرجها تتحدد عن طريق معادلة فرقية خطية، وذات معاملات ثابتة. الدالة المميزة لهذه المعادلة هي الأس المركب والحل المتجانس لها يكون في صورة مجموع خطي من الأسس المركبة. كل واحد من هذه الأسس المركبة يكون على الصورة $z^n = |z|^n e^{j(\measuredangle z)n}$ حيث z هي القيمة المميزة. إذا كان مقدار z أقل من الواحد، فإن صورة الحل $z^n$ يتناقص مقدارها مع مرور الزمن المتقطع، وإذا كان مقدار z أكبر من الواحد، فإن الحل يتزايد مع مرور الزمن. إذا كان مقدار z يساوي الواحد تماما، فإنه من الممكن أن توجد إثارة محددة ينتج عنها استجابة غير محددة. كما كان الحال في الأنظمة المستمرة زمنياً، فإن أي إثارة يكون لها الشكل الدالي نفسه مثل الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية سينتج عنها استجابة غير محددة.

| |
|---|
| إذا كان مقدار أي واحدة من القيم المميزة أكبر من أو يساوي واحداً لأي نظام متقطع زمنياً، فإن هذا النظام يكون غير مستقر BIBO. |

**مثال ٤,١٣**

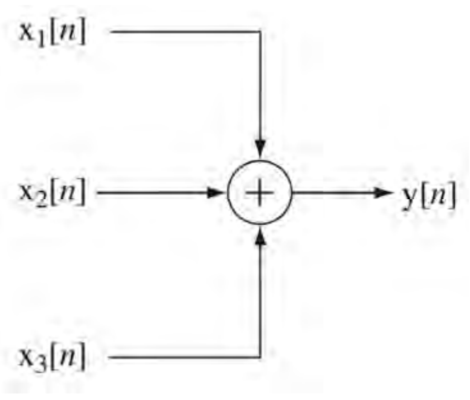
**إيجاد إثارة محدودة تنتج عنها استجابة غير محدودة**

افترض المركم المحدد بالمعادلة التالية: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. أوجد القيم المميزة لحل هذه المعادلة وأوجد إثارة محددة يمكنها أن تعطي استجابة غير محددة.

يمكننا أن نأخذ الفرق الأول العكسي لكل من الطرفين في المعادلة الفرقية السابقة كما يلي:

y[n]-y[n-1]=x[n]. إن ذلك يمثل معادلة فرقية بسيطة لها قيمة مميزة واحدة، وحلها المتجانس يكون ثابتاً لأن القيمة المميزة تساوي واحد. لذلك فإن هذا النظام يجب أن يكون غير مستقر BIBO. الإثارة المحددة التي تعطي استجابة غير محددة يكون لها الشكل الدالي نفسه مثل الحل المتجانس. في هذه الحالة فإن الإثارة الثابتة تنتج استجابة غير محددة. حيث أن الاستجابة تمثل تراكم الإثارة، فإنه يجب أن يكون من الواضح أنه مع مرور الزمن المتقطع، فإن مقدار الاستجابة للإثارة الثابتة يتزايد خطياً بدون أي حد أعلى.

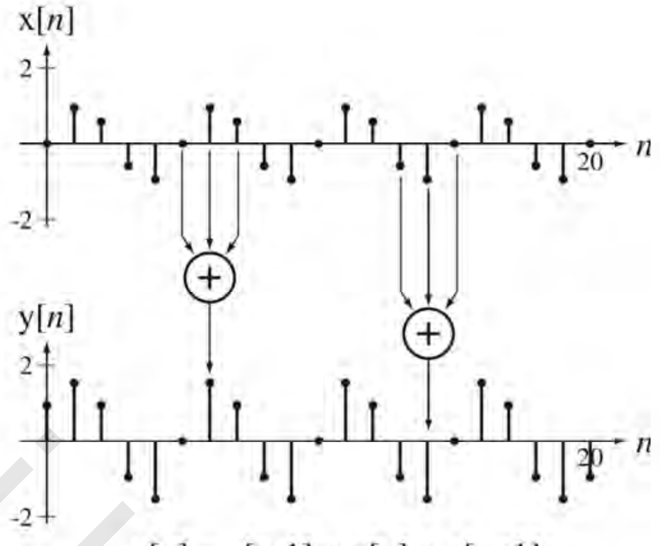
إن مفهوم الذاكرة، والسببية، وعدم الخطية الساكنة، والانعكاسية تكون هي نفسها بالنسبة لأنظمة الزمن المتقطع مثل أنظمة الزمن المستمر. شكل (٤,٤٩) يعتبر مثالاً على الأنظمة الساكنة أو الاستاتيكية.




**شكل رقم (٤,٤٩) نظام ساكن أو استاتيكي.**

واحد من الأمثلة على الأنظمة غير الخطية الاستاتيكية من الممكن أن يكون بوابة الأور OR في أي نظام منطقي. افترض أن المستويات المنطقية هي 0V للمستوى المنطقي 0، و 5V للمستوى المنطقي 1. إذا طبقنا 5V على أي واحد من الدخلين، مع وجود 0V على الطرف الآخر، فإن الاستجابة ستكون 5V. إذا طبقنا بعد ذلك 5V على كل من الدخلين في الوقت نفسه ، فإن الاستجابة ستظل 5V. إذا كان هذا النظام خطيا، فإن الاستجابة للـ 5V على الدخلين في نفس الوقت يجب أن تكون 10V، وهذا يمثل أيضاً نظاماً ليس انعكاسيا. إذا كانت إشارة الخرج تساوي 5V، فإننا لا نعرف أي واحد من الاحتمالات التجميعية الثلاثة لإشارات الدخل تسبب هذه الاستجابة، ولذلك فإن معرفة إشارة الخرج لن تكون كافية لتحديد إشارات الدخل.

على الرغم من أن كل الأنظمة الطبيعية الحقيقية يجب أن تكون سببية بالمعنى الصارم من حيث إنها لا يمكن أن تعطي استجابة قبل أن تتم إثارتها، إلا أنه توجد بعض أنظمة معالجة الإشارة التي يمكن وصفها أحيانا، بأنها ليست سببية، بالمعنى السطحي أو الظاهري. هذه الأنظمة هي أنظمة معالجة الإشارة التي يتم فيها تسجيل الإشارة ثم معالجتها بعد ذلك في غير الزمن الحقيقي أو عند زمن آخر للحصول على الاستجابة المطلوبة. حيث إن التاريخ الكلي لإشارات الدخل كان قد تم تسجيله، فإن الاستجابة المحسوبة عند أزمنة محددة من مسار البيانات تعتمد على قيم لإشارات دخل سابقة التسجيل كما في شكل(٤,٥٠). ولأن كل عمليات معالجة البيانات تحدث بعد تسجيل إشارات الدخل، فإن هذا النوع من الأنظمة يكون وما زال سببي بالمعنى الصارم للسببية.




**شكل رقم (٤,٥٠) ما يطلق عليه مرشح غير سببي يحسب الاستجابة من إثارات سابقة التسجيل.**

## ٤,٤ ملخص لبعض النقاط المهمة

١- النظام الذي يكون متجانساً وتجميعياً في نفس الوقت يكون خطياً.

٢- النظام الذي يكون خطياً وثابتاً زمنياً يسمى نظام LTI.

٣- الاستجابة الكلية لنظام LTI هي مجموع استجابته للدخل الصفري واستجابته للحالة صفر.

٤- يمكن أحياناً تحليل الأنظمة غير الخطية باستخدام طرق التحليل الخطية من خلال تقريب يسمى التحويل إلى الخطية.

٥- يقال عن أي نظام أنه مستقر BIBO إذا كانت إشارات الدخل المحددة له تعطي دائما إشارة خرج محددة.

٦- يكون نظام LTI المستمر زمنياً مستقراً إذا كانت كل قيمه المميزة لها أجزاء حقيقية سالبة.

٧- كل الأنظمة الطبيعية الحقيقية تكون سببية، على الرغم من أن بعضها من الممكن وصفها ظاهرياً على أنها غير سببية.

٨- في العادة تتم نمذجة الأنظمة المستمرة زمنياً عن طريق المعادلات التفاضلية، والأنظمة المقطعة زمنياً يتم نمذجتها عادة بالمعادلات الفرقية.

٩- طرق حل المعادلات الفرقية تكون مشابهة جداً لطرق حل المعادلات التفاضلية.

١٠- واحد من الاستخدامات الشائعة للمعادلات الفرقية هو لتقريب المعادلات التفاضلية.

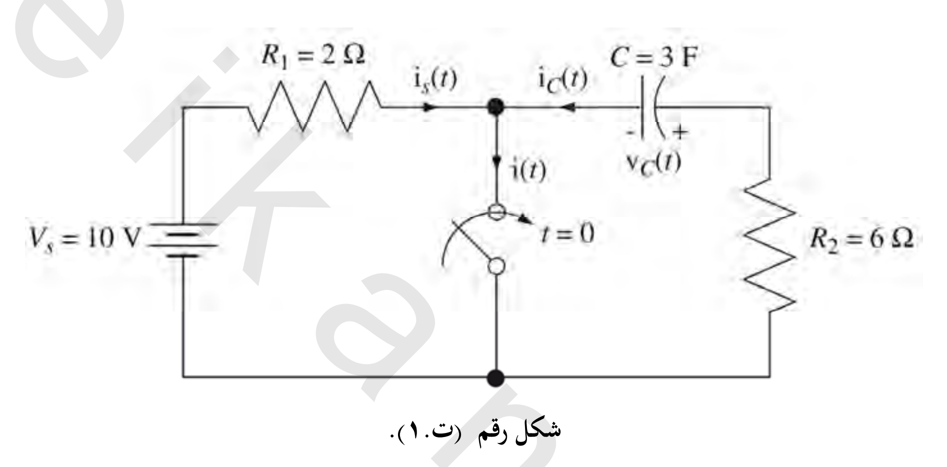
١١- يكون نظام LTI المتقطع زمنياً مستقراً إذا كانت كل قيمه المميزة لها مقدار أقل من الواحد.

**تمارين مع إجاباتها**

(في كل تمرين ، يكون ترتيب الإجابات ترتيبا عشوائيا)

**نمذجة الأنظمة**

١- اكتب المعادلة التفاضلية للجهد Vc(t) في الدائرة الموضحة في شكل (ت.١) للأزمنة t>0. بعد ذلك أوجد معادلة التيار i(t) للأزمنة t>0.




**شكل رقم** (ت.١).

الإجابة : $i(t)=5+(5/3)e^{-t/18}$

٢- خزان الماء الموجود في شكل (ت.٢) يتم ملؤه عن طريق تدفق داخل x(t) ويتم تفريغه عن طريق التدفق الخارج y(t). يتم التحكم في التدفق الخارج عن طريق صمام يعطي مقاومة R لتدفق الماء الخارج من الخزان. عمق الماء في الخزان هو d(t)، ومساحة سطح الماء هي A ، ولا يعتمد على عمق الماء (الخزان اسطواني). العلاقة بين التدفق وعمق الماء هي :

$$y(t)=d(t)/R$$

ارتفاع الخزان هو 1.5 متر وقطره متر واحد ومقاومة الصمام هي $10 s/m^2$.

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية لعمق الماء في الخزان بدلالة أبعاده ومقاومة الصمام؟

(ب) إذا كان التدفق الداخل يساوي $0.05 m^3/s$ ، فعند أي عمق للماء ستكون معدلات التدفق متساوية ، مما يجعل عمق الماء ثابت ؟

(ج) اوجد علاقة لعمق الماء في الخزان مع الزمن بعد وضع $1 m^3$ من الماء في الخزان الفارغ؟

(د) إذا كان الخزان فارغاً في البداية عند الزمن t=0 والتدفق الداخل ثابتاً ويساوي $0.2 m^3/s$ بعد الزمن t=0 ، فمتى سيبدأ الخزان في الفيضان؟




**شكل رقم (ت.٢) خزان الماء مع تدفق داخل وتدفق خارج.**

الإجابة: $d(t)=(4/\pi)e^{-4t/10\pi}$ ، و $Ad'(t)+d(t)/R=x(t)$ ، و 10.886s ، و 0.5m.

٣- فإنه يتم وصف البندول تقريباً للزاوية الصغيرة θ كما تم الاستنتاج في النص بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$mL\theta''(t) + mg\theta(t) \cong x(t)$$

حيث m هي كتلة البندول، و L هي طول الخيط الذي ليس له كتلة الذي يدعم الكتلة و θ هي الحيود الزاوي للبندول من الوضع الرأسي. إذا كانت الكتلة تساوي 2kg وطول الحبل يساوي 0.5m، فعند أي تردد دوري سيتردد البندول ؟

الإجابة : 0.704 هرتز

٤- لقد تم تسخين قالب من الألومنيوم حتى درجة الحرارة $100^oC$. وبعد ذلك تم إسقاطه في تيار متدفق من الماء، الذي تم تثبيت حرارته عند $10^oC$. بعد 10 ثوانٍ كانت درجة حرارة البلوك تساوي $60^oC$ (الألومنيوم موصل جيد للحرارة بحيث إن حرارته ستكون منتظمة في كل الحجم أثناء عملية التبريد). معدل التبريد يتناسب مع الفرق في درجة الحرارة بين البلوك والماء :

(أ) اكتب معادلة تفاضلية لهذا النظام مع اعتبار أن درجة حرارة الماء ستمثل الإثارة ودرجة حرارة البلوك تمثل الاستجابة؟

(ب) احسب الثابت الزمني للنظام؟

(ت) إذا تم تبريد البلوك نفسه حتى $0^oC$ وتم إسقاطه في تيار متدفق من الماء درجة حرارته هي $80^oC$، عند الزمن $t=0$، عند أي زمن ستصل حرارة البلوك إلى $75^oC$ ؟

الإجابة: 17s، 47,153، $\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}T_a(t) + T_a = T_w$.

٥- يمكن استخدام طريقة برنوللي لإيجاد الجذر المهيمن عددياً لمعادلة كثيرة حدود (إذا كان موجودا). إنها تعتبر مثالاً على الأنظمة المتقطعة زمنياً. إذا كانت المعادلة على الصورة:

$$A_N q^n + a_{N-1} q^{n.1} + \ldots + a_1 q + a_0 = 0$$

تتكون الطريقة من حل المعادلة الفرقية التالية:

$$a_N q[n] + a_{N-1} q[n-1] + \ldots + a_1 q[n-N+1] + a_0 q[n-N] = 0$$

مع القيم الابتدائية $q[-1]=q[-2]=\ldots=q[-N+1]=0$ و $q[0]=1$، فإن الجذر السائد سيقترب نهائيا للقيمة $q[n+1]/q[n]$. ارسم نظاماً متقطعاً زمنياً لإيجاد الجذر السائد لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة. احسب الجذر السائد للمعادلة $2q^4 + 3q^3 - 8q^2 + q - 3 = 0$.

الإجابة: 2.964-

**خواص النظام**

٦- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ واستجابته هي $y(t)$ ويوصف بالمعادلة التالية:

$$y(t)=u(x(t))$$

يكون غير خطي، وثابتاً زمنياً، ومستقراً، وغير منعكس؟

٧- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ والاستجابة $y(t)$ وموصوف بالمعادلة:

$$y(t)=x(t-5)-x(3-t)$$

يكون خطياً، وغير سببى، وغير منعكس؟

٨- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ والاستجابة $y(t)$ وموصوف بالمعادلة:

$$y(t)=x(t/2)$$

يكون خطياً، وغير سببى، ومتغير زمنياً؟

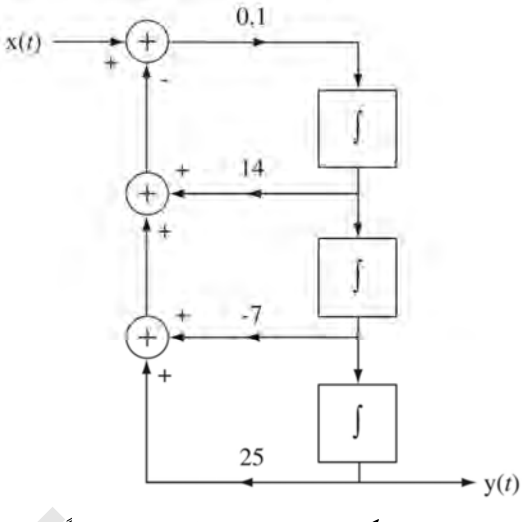
٩- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ والاستجابة $y(t)$ وموصوف بالمعادلة:

$$y(t)=\cos(2\pi t)x(t)$$

يكون متغيراً زمنياً، ومستقر BIBO، وساكن، وغير منعكس؟

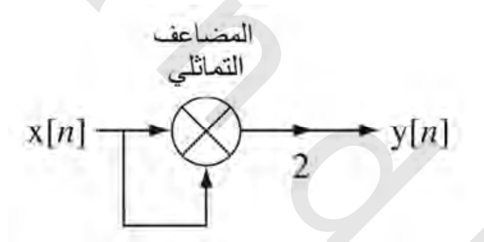
١٠- بين أن النظام الذي تكون استجابته هي مقدار إثارته يكون غير خطي، مستقر BIBO، وسببى، وغير انعكاسي؟

١١- وضح أن النظام الموجود في شكل (ت.١١) خطي، وثابت زمنياً، وغير مستقر BIBO، وديناميكي؟




**شكل رقم (ت.١١) نظام مستمر زمنياً.**

١٢- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٢) غير خطي، ومستقر BIBO، وساكن، وغير انعكاسى. (إشارة خرج المضاعف التماثلي تساوي حاصل ضرب إشارتي الدخل)؟



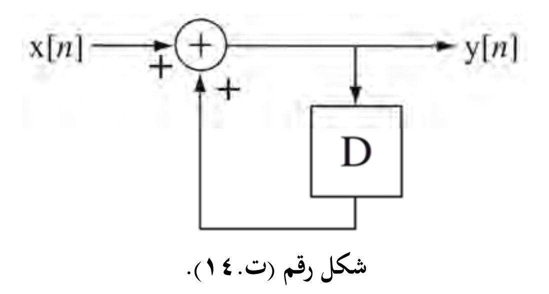

**شكل رقم (ت.١٢) نظام المضاعف التماثلي.**

١٣- وضح أن أي نظام له الإثارة x[n] والاستجابة y[n] وموصوف بالمعادلة :

$$y[n]=nx[n]$$

يكون خطياً، وثابتاً زمنياً، وإستاتيكياً.

١٤- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٤) يكون خطي، وثابتاً زمنياً، وغير مستقر BIBO، وديناميكياً.



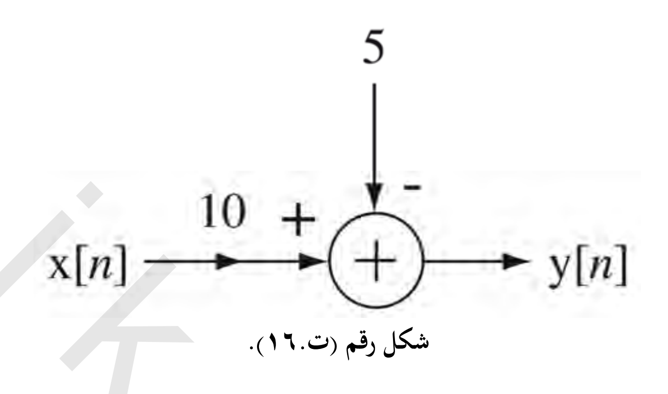

**شكل رقم (ت.١٤).**

١٥- وضح أن أي نظام له الإثارة x[n] والاستجابة y[n] وموصوف بالمعادلة :

y[n]=rect(x[n])

يكون غير خطي ، وثابتاً زمنياً ، وغيرانعكاسى.

١٦- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٦) يكون غير خطي ، وثابتاً زمنياً ، وساكن ، وغير انعكاسى.




**شكل رقم (ت.١٦).**

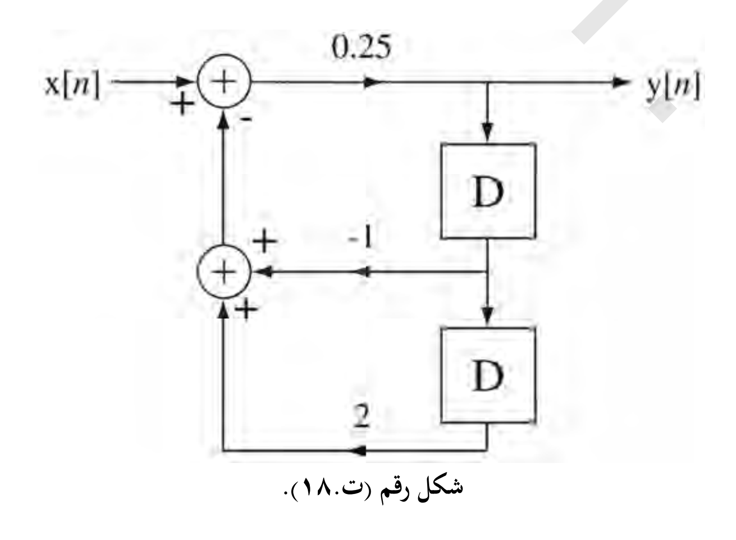
**النظام**

١٧- وضح أن النظام الموصوف بالمعادلة التالية :

$$y(t) = \begin{cases} 10, & x(t) > 2 \\ 5x(t), & -2 < x(t) \leq 2 \\ -10, & x(t) \leq -2 \end{cases}$$

يكون غير خطي ، وساكن ، ومستقر ، وغير انعكاسي ، وثابت زمنياً.

١٨- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٨) يكون ثابت زمنياً ، ومستقر BIBO ، وسببي.




**شكل رقم (ت.١٨).**

**النظام**

**تمارين بدون إجابات**

**نمذجة النظام**

١٩- ترتبط الذرات في الجزيء الكيميائي ميكانيكياً عن طريق قوى الارتباط البينية. يتكون جزيء الملح من ذرة صوديوم مرتبطة مع ذرة كلور واحدة. الوزن الذري للصوديوم يساوي 22.99، والوزن الذري للكلور يساوي 35.45، والكتلة الذرية الواحدة تساوي $1.6604x10^{-27}kg$. نفذ نموذجاً لهذا الجزيء ككتلتين مرتبطتين بسوستة ثابتها يساوي $Ks=1.2x10^{59}N/m$. في نظام من هذا النوع، فإن الذرتين يمكن أن تتسارع كل منهما بالنسبة للأخرى ولكن (في غياب القوى الخارجية) مركز الكتلة لهذا النظام لا يتسارع. من المفضل أن نجعل مركز الكتلة هو نقطة الأصل لنظام المحاور المستخدم الذي يصف موضع الذرات. افترض أن الطول غير المشدود للستة هو $\ell_0$، وموضع ذرة الصوديوم هو $y_s(t)$، وموضع ذرة الكلور هو $y_c(t)$. أكتب معادلتي الحركة المرتبطتين لهذا النظام الميكانيكي، وجمعهما في معادلة تفاضلية واحدة بدلالة كمية الشد في السوستة $y(t)=y_s(t)+y_c(t)+\ell_0$، ووضح أن التردد الرنيني الزاوي سيكون K $\sqrt{K_s\frac{m_s+m_c}{m_sm_c}}$ حيث $m_s$ هي كتلة ذرة الصوديوم، $m_c$ هي كتلة ذرة الكلور. احسب التردد الرنيني لجزيء هذا الملح. (هذا النموذج غير حقيقي ؛ لأن جزيئات الملح نادرا ما تتشكل بصورة منفصلة. الأملاح تحدث في صورة بللورات والجزيئات الأخرى في البللورة تحدث قوى على الجزيء، مما يجعل التحليل الحقيقي أكثر تعقيداً).

٢٠- الحركيات الدوائية هي دراسة كيفية التمثيل الغذائي، وامتصاصه، وتوزيعه ، وإخراج الأدوية عن طريق الجسم البشري. بعض العمليات الدوائية يمكن نمذجتها تقريباً عن طريق نموذج حجيرة واحدة للجسم حيث V هو حجم هذه الحجيرة، و C(t) هو تركيز الدواء في هذه الحجيرة، و $K_e$ هو ثابت معدل إخراج الدواء من الحجيرة، و $K_0$ هو معدل حقن أو دخول الدواء إلى الحجيرة.

(ا) أكتب المعادلة التفاضلية التي يكون فيها معدل الحقن هو إشارة الدخل وتركيز الدواء يمثل إشارة الخرج.

(ب) افترض قيم المعاملات التالية : $K_e=0.4hr^{-1}$ و V=20l و $K_0=200$ mg/hr (حيث l هي رمز اللتر). إذا كان التركيز المبدئي للدواء هو C(0)=10 mg/l، ارسم تركيز الدواء كدالة في الزمن بالساعات في أول 10 ساعات من حقن الدواء. احسب الحل كمجموع لاستجابة الدخل الصفري واستجابة الحالة صفر.

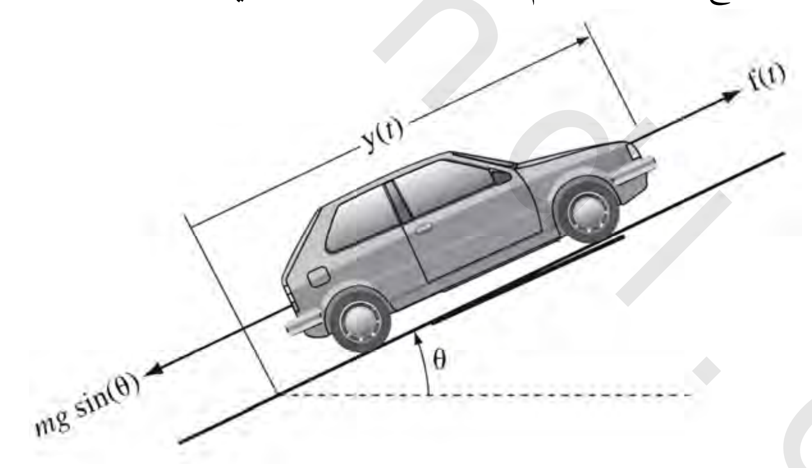
٢١- وعاء جيد التقليب تتم تغذيته لمدة طويلة بتيارين من السوائل، ماء نقي بمعدل 0.2 متر مكعب على الثانية، وصبغة زرقاء مركزة بمعدل 0.1 متر مكعب على الثانية. يحتوي الوعاء على 10 أمتار مكعبة من هذا الخليط، ويتم سحب الخليط من الوعاء بمعدل 0.3 متر مكعب على الثانية للحفاظ على ثبات الحجم. لقد

تغيرت الصبغة الزرقاء فجأة إلى صبغة حمراء بمعدل التدفق نفسه عن طريق مفتاح معين. عند أي زمن بعد تغيير هذا المفتاح سيصبح الخليط المسحوب من الوعاء يحتوى صبغة حمراء وزرقاء بنسبة 99:1 ؟

٢٢- سيارة تسير على تل أو منحدر يمكن نمذجتها كما في شكل (ت.٢٢). الإثارة هي القوة f(t) التي عندما تكون قيمتها موجبة فإن ذلك يعني عجلة أو تسارع للسيارة في الاتجاه الأمامي عن طريق الموتور، وعندما تكون قيمة هذه القوة سالبة فإن ذلك يمثل إبطاء لسرعة السيارة عن طريق الفرامل (الكابح). في أثناء حركة السيارة يحدث لها سحب نتيجة ظواهر الاحتكاك المختلفة التي يمكن نمذجتها تقريباً بالمعامل $K_f$ الذي يتم ضربه في سرعة السيارة ليعطي قوة تحاول إبطاء السيارة عند حركتها في كلا الاتجاهين. كتلة السيارة هي m والجاذبية تؤثر عليها باستمرار تحاول أن تسحبها لأسفل المطلع في غياب باقي القوى. افترض كتلة السيارة ١٠٠٠ كيلوجرام، وافترض معامل الاحتكاك $K_f$ يساوي 5N.s/m، وافترض الزاوية θ تساوي π/2 :

(أ) أكتب المعادلة التفاضلية لهذا النظام مع افتراض القوة f(t) هي الإثارة، وموضع السيارة y(t) هو الاستجابة؟

(ب) إذا كانت مقدمة السيارة في البداية عند الموضع y(0)=0 مع سرعة ابتدائية $[y'(t)]_{t=0}$=10m/s وليست هناك أي قوة تسارع أو فرملة، ارسم سرعة السيارة y'(t) كدالة في الزمن الموجب؟




**شكل رقم (ت.٢٢) سيارة على مستوى مائل.**

٢٣- في بداية العام 2000 كانت مقاطعة فريدونيا تعدادها p يساوي 100 مليون نسمة. معدل المواليد كان 4% سنويا ومعدل الوفاة كان 2% سنويا، محسوباً يومياً. بمعنى، أن المواليد والوفاة التي تحدث يومياً عند عند نسبة ثابتة من التعداد الحالي للسكان، وفي اليوم التالي فإن عدد المواليد والوفاة يتغير نتيجة أن تعداد السكان تغير في اليوم السابق. فمثلاً، في كل يوم يكون عدد الوفيات هو الكسر 0.02/365 من التعداد الكلي للسكان في اليوم السابق (مع إهمال تأثير السنة الكبيسة). وفي كل يوم يدخل مقاطعة فريدونيا 275 مهاجراً.

(أ) اكتب معادلة فرقية لتعداد السكان عند بداية اليوم رقم n بعد واحد يناير عام 2000 مع اعتبار معدل الهجرة هو إشارة الدخل للنظام؟

(ب) عن طريق حساب استجابة الدخل الصفري واستجابة الحالة صفر للنظام، حدد عدد السكان لهذه المقاطعة عند العام 2050؟

٢٤- شكل (ت.٢٤) يبين برنامج ماتلاب يحاكى نظام معين؟

(أ) بدون تنفيذ البرنامج، احسب قيمة x عندما n=10 عن طريق حل المعادلة الفرقية للنظام في الصورة المغلقة؟

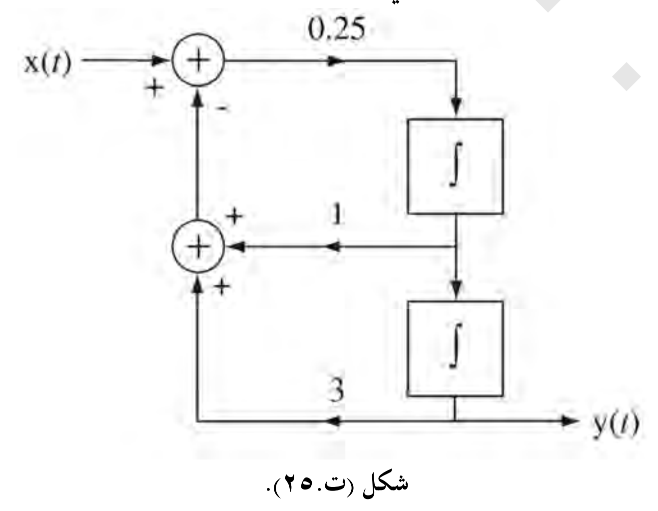
(ب) نفذ البرنامج واختبر الإجابة في الجزء (أ)؟

```
x = 1 ; y = 3 ; z = 0 ; n = 0 ;
  while n <= 10,
     z = y ;
     y = x ;
     x = 2*n + 0.9*y - 0.6*z ;
     n = n + 1 ;
  end
```

شكل رقم (ت-٢٤).

**خواص النظام**

٢٥- نظام يمكن وصفه بالرسم الصندوقي الموضح في شكل (ت.٢٥). صنف هذا النظام تبعا للخواص التالية : التجانس، والتجميع، والخطية، والثبات الزمني، والاستقرار، والسببية، والذاكرة، والانعكاسية؟




شكل (ت.٢٥).

**النظام**

٢٦- نظام له إشارة خرج تساوي مكعب إشارة الدخل. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الخطية، والثبات الزمني، والاستقرار، والسببية، والذاكرة، والانعكاسية؟

٢٧- نظام يتم وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية: ty'(t)-8y(t)=x(t). صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الخطية، والثبات الزمني، والاستقرار؟

٢٨- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y(t) = \int_{-\infty}^{t/3} x(\lambda) d\lambda$. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار، والانعكاسية.

٢٩- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y(t) = \int_{-\infty}^{t+3} x(\lambda) d\lambda$. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الخطية، والسببية، والانعكاسية؟

٣٠- وضح أن النظام الموصوف بالمعادلة y(t)=Re(x(t)) يكون تجميعياً ولكنه ليس متجانس. (تذكر أنه إذا تم ضرب الإثارة بأي ثابت مركب وكان النظام متجانساً، فإن الاستجابة يجب أن تضرب في الثابت نفسه المركب).

٣١- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n+1} x[m]$. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار BIBO، والانعكاسية؟

٣٢- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: ny[n]-8y[n-1]=x[n]. صنف هذا النظام تبعا للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار BIBO، والانعكاسية؟

٣٣- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y[n] = \sqrt{x[n]}$ . صنف هذا النظام تبعا للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار BIBO، والذاكرة، والانعكاسية؟



# تحليل أنظمة النطاق الزمني

## (٥,١) المقدمة والأهداف

الهدف الأساسي من تصميم الأنظمة هو أن تستجيب بالطريقة الصحيحية. ولذلك يجب أن نكون قادرين على حساب هذه الاستجابة للنظام لأي إشارة دخل. هناك العديد من الطرق للوصول لهذا الهدف كما سنرى خلال هذا الكتاب. لقد رأينا مسبقاً كيف نحسب استجابة أي نظام موصوف بمعادلة تفاضلية، أو معادلة فرقية عن طريق حساب الحل الكلي لهذه المعادلات مع الشروط الابتدائية لها. في هذا الفصل سنفترض طريقة بديلة تسمى طريقة الالتفاف convolution، وسنوضح أنه، لأي نظام LTI، إذا علمنا استجابة لوحدة النبضة التي تحدث عند الزمن t=0 أو n=0، فإن هذه الاستجابة تصف النظام بالكامل وتسمح لنا أن نحسب استجابته لأي دخل آخر.

**أهداف الفصل**

١- تقديم طرق لإيجاد استجابة أي نظام LTI لوحدة نبضة تحدث عند الزمن t=0 أو n=0.

٢- فهم وتطبيق الالتفاف، وهو طريقة لإيجاد استجابة أنظمة LTI لأي إشارة دخل اختيارية لكل من الأنظمة المستمرة زمنياً والمتقطعة زمنياً.

## (٥,٢) الأزمنة المستمرة

**استجابة النبضة**

لقد رأينا طرقاً مختلفة لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة. الحل الكلي يكون مجموع الحل المتجانس والحل الخاص. الحل المتجانس يكون مجموعاً خطياً من القيم المميزة. الحل الخاص يعتمد على شكل دالة الدخل أو دالة التعزيز. على الرغم من أن هذه الطرق تعمل جيداً، فإن هناك طريقة أكثر نظامية لمعرفة كيف

تستجيب الأنظمة لإشارات الدخل وهذه الطريقة تؤدي إلى فهم جيد للخواص المهمة للأنظمة ، هذه الطريقة تسمى الالتفاف.

تعتمد طريقة الالتفاف لإيجاد استجابة نظام LTI مستمر زمنياً على فكرة بسيطة وهي : إذا كنا نستطيع إيجاد طريقة للتعبير عن أي إشارة كمجموع خطي من دوال بسيطة ، فإننا نستطيع باستخدام أساسيات الخطية والثبات الزمني أن نوجد الاستجابة لهذه الإشارة كمجموع خطي لاستجابات النظام لهذه الدوال البسيطة. إذا كنا نستطيع إيجاد استجابة أي نظام LTI لوحدة نبضة تحدث عند الزمن t=0 ، وإذا كنا نستطيع التعبير عن هذه الإشارة كمجموع خطي من وحدات النبضة ، فإننا نستطيع إيجاد الاستجابة لهذه الإشارة. لذلك فإن استخدام طريقة الالتفاف تبدأ بفرض أن الاستجابة لوحدة النبضة التي تحدث عند الزمن t=0 تكون أصلاً معلومة ، أو تم حسابها. سنفترض أن هذه الاستجابة تسمى استجابة النبضة h(t). لذلك فإن المطلوب الأول عند استخدام طريقة الالتفاف لحساب استجابة أي نظام هي أن نحدد ، أو نحسب استجابة النبضة له عن طريق تطبيق وحدة نبضة δ(t) تحدث عند الزمن t=0. هذه النبضة في الحقيقة تحقن النظام بطاقة إشارة ثم تنتهي. بعد حقن هذه الطاقة في النظام ، فإن النظام يستجيب لها بإشارة خرج تتحدد بالخواص الديناميكية لهذا النظام.

إننا نستطيع في الأساس أن نوجد استجابة النبضة تجريبيا عن طريق تطبيق وحدة النبضة كدخل للنظام. ولكن حيث إنه لا يمكن الحصول على وحدة نبضة حقيقية ، فإن هذه النبضة من الممكن أن تكون تقريبية فقط. أيضاً ، فإنه عمليا ، يكون تقريب وحدة النبضة عبارة نبضة ذات ارتفاع عالٍ جدا تستمر لفترة زمنية قصيرة جدا. في الحقيقة ، فإنه لأي نظام طبيعي حقيقي ، فإن النبضة ذات الارتفاع العالي جداً من الممكن أن تأخذ النظام إلى حالة عدم خطية للاستجابة ، وبالتالي فإن الاستجابة التجريبية المقاسة من الممكن أن تكون غير دقيقة. هناك طرق أخرى أقل مباشرة ولكنها أكثر عملية لتحديد استجابة النبضة تجريبياً.

إذا كان لدينا وصف حسابي للنظام ، فإننا نستطيع إيجاد استجابة النبضة تحليلياً. المثال التالي يوضح بعض الطرق لإيجاد استجابة النبضة لنظام موصوف بمعادلة تفاضلية.

**مثال ٥,١**

**استجابة النبضة لنظام مستمر زمنياً 1**

احسب استجابة النبضة h(t) لنظام مستمر زمنياً موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'(t) + ay(t) = x(t) \quad \text{المعادلة رقم (٥,١)}$$

حيث x(t) تمثل الإثارة للنظام ، و y(t) هي استجابة النظام لهذه الإثارة.

يمكننا إعادة كتابة المعادلة (٥,١) للحالة الخاصة التي تكون فيها النبضة هي الإثارة للنظام :

$$h'(t) + ah(t) = \delta(t)$$ المعادلة رقم (٥,٢)

**الطريقة #1**

حيث إن استجابة النظام الوحيدة هي وحدة النبضة عند الزمن t=0، والنظام سببي، فإننا نعلم أن استجابة النبضة للأزمنة قبل t=0 ستكون صفراً. معنى ذلك، أن h(t)=0 عندما t<0. الحل المتجانس للأزمنة t>0 سيكون على الصورة $Ke^{-at}$، وهذا هو شكل استجابة النبضة عندما t>0 لأنه في هذا المدى الزمني لا يكون النظام مثاراً. بذلك أصبحنا الآن نعرف شكل استجابة النبضة قبل الزمن t=0 وبعد الزمن t=0. كل ما يتبقى الآن هو معرفة ما يحدث عند الزمن t=0. المعادلة التفاضلية (٥,١) يجب تحقيقها عند كل الأزمنة. بمعنى، h'(t) + ah(t) يجب أن تكون وحدة نبضة تحدث عند الزمن t=0. يمكننا أن نحدد ما يحدث عند t=0 عن طريق تكامل الطرفين في المعادلة (٥.٢) من $t=0^-$ حتى $t=0^+$، بمعنى زمن متناهي الصغر قبل وبعد الزمن صفر.

تكامل h'(t) هو ببساطة h(t). ونحن نعلم أنها عند الزمن $t=0^-$ تكون صفراً، وعند الزمن $t=0^+$ تكون K، وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$\underbrace{h(0^+)}_{=k} - \underbrace{h(0^-)}_{=0} + a\int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$ المعادلة رقم (٥,٣)

الحل المتجانس يطبق لكل الأزمنة t>0، ولكن عندما t=0 فإنه يجب اعتبار الحل الخاص في هذه الحالة ؛ لأن النبضة تدفع النظام عند هذا الزمن. القاعدة العامة لصورة الحل الخاص للمعادلة التفاضلية تكون مجموعاً خطياً للدالة المؤثرة وكل تفاضلاتها الفريدة. الدالة المؤثرة هي وحدة النبضة، ووحدة النبضة لها عدد لا نهائي من التفاضلات، الثنائي، والثلاثي، وهكذا، وكلها مجتمعة تحدث عند الزمن t=0 تماما. ولذلك، حتى يمكننا بيان سبب تكّون النبضة وكل تفاضلاتها لا يمكن أن تمثل في الحل، فإنه علينا أن نعتبرها إمكانية لذلك. إذا كانت h(t) لا تحتوي نبضة أو تفاضلاتها الأعلى الأحادية عند t=0، فإن :

$$\int_{0^-}^{0^+} e^{-at}dt = K\int_{0}^{0^+} e^{-at}dt = \left(-\frac{K}{a}\right)\left(\underbrace{e^{-0^+} - e^{-0}}_{=0}\right) = 0.$$

إذا كانت h(t) بها نبضة أو تفاضلاتها العليا عند الزمن t=0، فإن التكامل قد لا يساوي صفراً. إذا كانت h(t) تمثل نبضة، أو تفرداً بدرجة عالية عند الزمن t=0، فإن h'(t)، التي تظهر في الجانب الأيسر من المعادلة (٥,٢)، يجب أن تحتوي التفاضلات الثنائية أو الدرجات الأعلى. حيث إنه لا توجد تفاضلات ثنائية، أو درجات أعلى على الجانب الأيمن من المعادلة (٥,٢)، فإن المعادلة لا يمكن تحقيقها. ولذلك، ففي هذا المثال، نعلم أنه لا توجد نبضة، أو درجات أعلى من التفاضل في h(t) عند t=0، ولذلك فإن $\int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = 0$، وشكل استجابة النبضة هو $Ke^{-at}u(t)$،

ومن المعادلة (٥.٣) فإن: $h(0^+)=Ke^{-a(0+)}=K=1$. إن هذه تمثل الشرط الابتدائي الذي نحتاجه لإيجاد صورة عددية للحل المتجانس الذي يتم تطبيقه عند الزمن $t=0$. وبالتالي فإن الحل الكلي سيكون $h(t)=e^{-at}u(t)$. دعنا نحقق هذا الحل عن طريق التطبيق في المعادلة التفاضلية التالية :

$$h'(t) + ah(t) = e^{-at}\delta(t) - ae^{-at}u(t) + ae^{-at}u(t)=\delta(t)$$

أو باستخدام خاصية التكافؤ للنبضة :

$$e^{-at}\delta(t)=e^{0}\delta(t)=\delta(t) \quad \text{اختبر ذلك}$$

**الطريقة #2**

طريقة أخرى لحساب استجابة النبضة هي عن طريق حساب استجابة النظام لنبضة مربعة عرضها w وارتفاعها 1/w وتبدأ عند الزمن $t=0$، وبعد أن نوجد الحل نجعل w تقترب من الصفر. مع اقتراب w من الصفر، فإن النبضة المربعة تقترب من وحدة النبضة عند $t=0$ وتقترب الاستجابة للنبضة المربعة من الاستجابة لوحدة النبضة.

باستخدام أساسيات خاصية الخطية، فإن الاستجابة للنبضة المربعة هي مجموع الاستجابة لخطوة ارتفاعها 1/w عند الزمن $t=0$، والاستجابة لخطوة أخرى ارتفاعها -1/w عند الزمن $t=w$. معادلة الدخل هي $x(t)=u(t)$ :

$$h'_{-1}(t) + ah_{-1}(t)=u(t) \qquad \text{المعادلة رقم (٥,٤)}$$

الرمز $h_{-1}$ لاستجابة الخطوة يتبع المنطق نفسه مثل الترميز المنتظم للدوال الأحادية. الرمز الجانبي يوضح عدد التفاضلات لاستجابة النبضة. في هذه الحالة هناك 1- تفاضلات أو بمعنى آخر تكامل واحد للذهاب من الاستجابة لوحدة النبضة إلى الاستجابة لوحدة الخطوة. الاستجابة الكلية عندما $t>0$ لوحدة الخطوة تساوي $h_{-1}(t)=Ke^{-at}+1/a$.
إذا كانت $h_{-1}(t)$ بها انقطاع عند $t=0$، فإن $h'_{-1}(t)$ يجب أن تحتوي على نبضة عند الزمن $t=0$. ولذلك، فحيث إن $x(t)$ تمثل وحدة خطوة، التي لا تحتوي على وحدة نبضة، فإن $h_{-1}(t)$ يجب أن تكون مستمرة عند الزمن $t=0$، وإلا فإن المعادلة (٥.٤) من الممكن أن تكون غير صحيحة. أيضاً، حيث أن $h_{-1}(t)$ تساوي صفراً لكل قيم الزمن السالبة، وهي مستمرة عند $t=0$، فإنها يجب أيضاً أن تكون صفراً عند $t=0^+$. وعلى ذلك فإن :

$h_{-1}(0^+)=0=Ke^0+1/a$ وهذا يؤدي إلى $K=-1/a$

و $h_{-1}(t)=(1/a)(1-e^{-at})$ لكل الأزمنة $t>0$. بتجميع ذلك مع حقيقة أن $h_{-1}(t)=0$ لكل الأزمنة $t<0$، نحصل على الحل عند كل الأزمنة كما يلي :

باستخدام الخطية

$$h_{-1}(t) = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

$$h_{-1}(t-w) = \frac{1-e^{-a(t-w)}}{a}u(t-w)$$

وعلى ذلك فالاستجابة للنبضة المربعة الموصوفة مسبقاً سيكون :

$$h_p(t)=\frac{(1-e^{at})u(t)-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w)}{aw}$$

بجعل w تؤول إلى الصفر،

$$h(t)=\lim_{w\to 0}h_p(t)=\lim_{w\to 0}\frac{(1-e^{at})u(t)-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w)}{aw}$$

وهذه صورة غير محددة، لذلك لا بد من استخدام قانون لوبيتال L'Hopital لتحقيقها :

$$\lim_{w\to 0}h_p(t)=\lim_{w\to 0}\frac{\frac{d}{dw}((1-e^{at})u(t)-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w))}{\frac{d}{dw}(aw)}$$

$$\lim_{w\to 0}h_p(t)=\lim_{w\to 0}\frac{\frac{d}{dw}(-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w))}{a}$$

$$\lim_{w\to 0}h_p(t)=-\lim_{w\to 0}\frac{(1-e^{-a(t-w)})(-\delta(t-w))-ae^{-a(t-w)}u(t-w)}{a}$$

$$\lim_{w\to 0}h_p(t)=-\frac{(1-e^{at})(-\delta(t))-ae^{-at}u(t)}{a}=-\frac{-ae^{-at}u(t)}{a}=e^{-at}u(t)$$

وعلى ذلك فاستجابة النبضة ستكون $h(t)=e^{-at}u(t)$ كما سبق.

$$a_Ny^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_Mx^{(M)}(t)+b_{M-1}x^{(M-1)}(t)+\ldots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$
المعادلة رقم (٥،٥)

وهذه يمكن كتابتها كما يلي :

$$\sum_{k=0}^{N}a_ky^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{M}b_kX^{(k)}(t)$$

الاستجابة h(t) لوحدة النبضة يجب أن يكون لها صورة دالية بحيث :

١- عند تفاضلها عدد من المرات، حتى التفاضل رقم N، فإن كل هذه التفاضلات يجب أن تتوافق مع التفاضلات المقابلة لها لوحدة النبضة حتى التفاضل رقم M عند الزمن t=0، و

٢- الجمع الخطي لكل تفاضلات h(t) يجب أن تؤول إلى الصفر لكل قيم الزمن $t\neq 0$.

المطلوب ٢ تم تحقيقه بالحل على الصورة $y_h(t)u(t)$ حيث $y_h(t)$ هي الحل المتجانس للمعادلة (٥،٥). لتحقيق المطلوب ١ قد نحتاج لإضافة دالة أخرى، أو دوال على $y_h(t)u(t)$. افترض الثلاث أحوال التالية :

الحالة الأولى M<N

تفاضلات المعادلة $y_h(t)u(t)$ تحقق كل الدوال الأحادية الضرورية للتوافق مع النبضة والتفاضلات للنبضة على الجانب الأيمن ولا حاجة لإضافة عناصر أخرى.

الحالة الثانية M=N

نحتاج فقط لإضافة عنصر نبضة على الصورة $K_\delta\delta(t)$.

الحالة الثالثة M>N

التفاضل رقم N للدالة التي أضفناها إلى $y_h(t)u(t)$ يجب أن تحتوي عنصراً يتوافق مع التفاضل رقم M لوحدة النبضة. وعلى ذلك فإن الدالة التي أضيفت يجب أن تكون على الصورة :

$$K_{M-N}u_{M-N}(t) + K_{M-N-1}u_{M-N-1}(t) + \ldots + \underbrace{k_0 u_0(t)}_{=\delta(t)}$$

كل التفاضلات الأخرى لوحدة النبضة ستؤخذ في الحسبان عن طريق تفاضل صورة الحل $y_h(t)u(t)$ العديد من المرات.

الحالة 1 هي الحالة الأكثر شيوعاً عملياً والحالة ٣ نادرة عمليا.

**مثال ٥,٢**

**استجابة النبضة لنظام مستمر زمنياً ٢**

احسب استجابة النبضة لنظام يوصف بالمعادلة التالية : $y'(t) + ay(t)=x'(t)$.

استجابة النبضة يجب أن تحقق ما يلي :

$$h'(t) + ah(t)=\delta'(t)$$ المعادلة رقم (٥,٦)

أعلى تفاضل يكون هو نفسه لكل من الإثارة والاستجابة. صورة استجابة النبضة تكون على الصورة التالية : $h(t) =Ke^{-at}u(t) + K_\delta\delta(t)$، وتفاضلها الأول يكون على الصورة :

$$h'(t)=Ke^{-at}\delta(t) - aKe^{-at}u(t) + K_\delta\delta'(t)$$

بتكامل المعادلة (٥,٦) من $t=0^-$ حتى $t=0^+$ نحصل على :

$$\underbrace{h(0^+)}_{=k} - \underbrace{h(0^-)}_{=0} + a\int_{0^-}^{0^+}[Ke^{-at}u(t) + K_\delta\delta(t)]dt = \underbrace{\delta(0^+)}_{=0} - \underbrace{\delta(0^-)}_{=0}$$

$$K + aK\int_0^{0^+} e^{-at}dt + aK_\delta \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt}_{=1} = 0$$

$$K + aK\left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^{0^+} + aK_\delta = K - K\underbrace{\left[e^{0^+} - e^0\right]}_{=0} + aK_\delta = 0$$

أو $K+aK_\delta=0$. بتكامل (٥,٦) من $-\infty$ حتى t وبعدها من $t=0^-$ حتى $t=0^+$ نحصل على :

$$\int_{0^-}^{0^+} dt \int_{-\infty}^{t}\left[K\delta(\lambda) - aKe^{-a\lambda}u(\lambda) + K_\delta\delta'(\lambda)\right]d\lambda$$
$$+ \int_{0^-}^{0^+} dt \int_{-\infty}^{t}\left[Ke^{-a\lambda}u(\lambda) + K_\delta\delta(\lambda)\right]d\lambda = \int_{0^-}^{0^+} dt \int_{-\infty}^{t}\delta'(\lambda)d\lambda$$

$$\int_{0^-}^{0^+}[Ku(t) + K(e^{-at} - 1)u(t) + K_\delta\delta(t)]dt + \frac{K}{a}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}(1 - e^{-at})u(t)dt}_{=0}$$

$$+K_\delta \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt}_{=0} = \int_{0^-}^{0^+} dt \int_{-\infty}^{t} \delta'(\lambda)d\lambda$$

$$\int_{0^+}^{0^-} [Ke^{-at}u(t) + K_\delta \delta(t)]\, dt = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt}_{=u(0+)-u(0-)}$$

$$\frac{K}{a}\underbrace{[1-e^{-at}]_0^{0^+}}_{=0} + K_\delta \left[\underbrace{u(0^+)}_{=1} - \underbrace{u(0^{-+})}_{=0}\right] = 1 \rightarrow K_\delta = 1 \rightarrow K = -a$$

ولذلك فإن استجابة النبضة ستكون $h(t)=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$. دعنا نختبر ذلك عن طريق التعويض في المعادلة (٥,٦) :

$$\delta'(t) - a\, e^{-at}\delta(t) + a^2\, e^{-at}u(t) + a[\delta(t)-ae^{-at}u(t)]=\delta'(t)$$
$$= e^0\delta(t)=\delta(t)$$

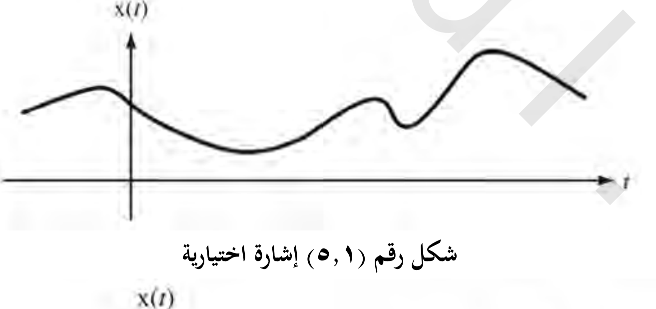
وبالتالي :

$$\delta'(t)=\delta'(t)$$

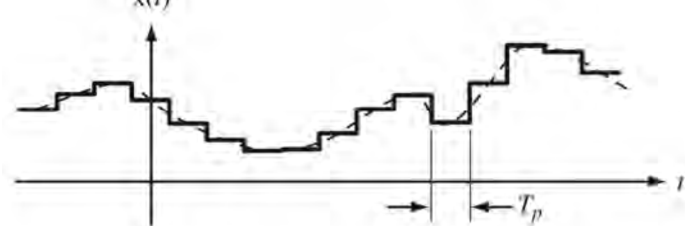
**الالتفاف في الزمن المستمر**

**الاستنتاج**

بمجرد معرفة استجابة النبضة لأي نظام، يمكننا إيجاد طريقة لحساب استجابته لأي إشارة دخل عامة. افترض أن لدينا نظاماً تمت إثارته بإشارة الدخل x(t) كما في شكل (٥,١). كيف يمكننا حساب هذه الاستجابة؟ يمكننا حساب استجابة تقريبية عن طريق تقريب هذه الإشارة كتتابع من النبضات المربعة المتجاورة التي كلها لها العرض نفسه $T_p$ كما في شكل (٥,٢).




**شكل رقم (٥,١) إشارة اختيارية**




**شكل رقم (٥,٢) تقريب للدالة الاختيارية في صورة نبضات مربعة متجاورة.**

الآن يمكننا (تقريباً) حساب الاستجابة للإشارة الأصلية كمجموع للاستجابات لكل هذه النبضات المربعة، كل منها تؤثر على حدة. حيث إن كل النبضات مستطيلة ولها العرض نفسه ، فإن الفرق بين هذه النبضات سيكون فقط في زمن حدوث هذه النبضات، وارتفاع كل واحدة من هذه النبضات. ولذلك، ستكون الاستجابة لكل هذه النبضات لها الشكل نفسه فيما عدا التأخير الزمني بمقدار معين الذي يأخذ في الحسبان زمن حدوث كل نبضة، والضرب في كمية ثابتة تأخذ في الاعتبار مقدار ارتفاع كل نبضة. يمكننا أن نجعل هذا التقريب جيداً بقدر الإمكان عن طريق استخدام عدد أكبر من النبضات، وكل منها يكون لها زمن أقل. بالاختصار، فإن مشكلة حساب استجابة نظام LTI لأي إشارة اختيارية تصبح مشكلة تجميع الاستجابات لصورة دالة معروفة، ولكنها بها تأخير زمني معين ومضروبة في ثابت معين.

باستخدام الدالة المربعة، فإن وصف تقريب الدالة الاختيارية يمكن كتابته الآن بصورة تحليلية. إرتفاع كل نبضة هو قيمة الإشارة الأصلية عند الزمن المحدد لمركز، أو منتصف عرض هذه النبضة. على ذلك يمكن كتابة هذا التقريب كما يلي :

$$x(t) \cong \cdots + x(-T_p)rect\left(\frac{1+T_p}{T_p}\right) + x(0)rect\left(\frac{t}{T_p}\right) + x(T_p)rect\left(\frac{t-T_p}{T_p}\right) + \cdots$$

$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_p)\, rect\left(\frac{t-nT_p}{T_p}\right)$$ المعادلة رقم (٥,٧)

لنفترض أن الاستجابة لنبضة واحدة عرضها $T_p$ ومساحتها تساوي الوحدة مركزها عند الزمن t=0 هي $h_p(t)$ تسمى استجابة وحدة النبضة. وحدة النبضة هي $(1/T_p)rect(1/T_p)$. وعلى ذلك يمكننا كتابة المعادلة (٥,٧) بدلالة النبضات المزاحة زمنياً كما يلي :

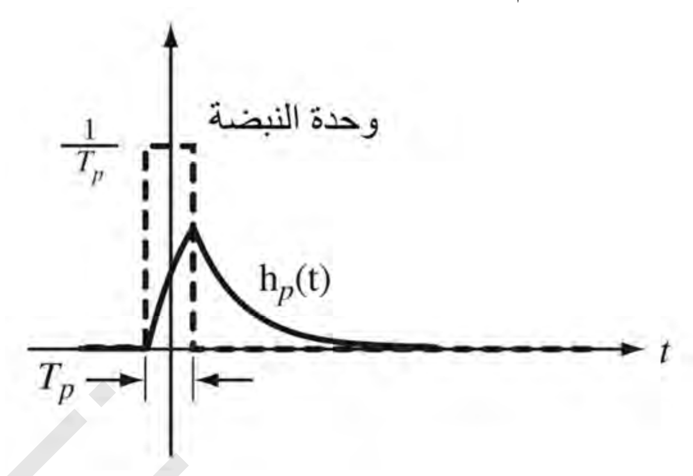
$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_p\, x(nT_p) \underbrace{\frac{1}{T_p} rect\left(\frac{t-nT_p}{T_p}\right)}_{\text{وحدة النبضة المزاحة}}$$ المعادلة رقم (٥,٨)

باستدعاء خاصيتي الخطية والثبات الزمني، فإن الاستجابة لكل واحدة من هذه النبضات يجب أن تكون الاستجابة لوحدة النبضة $h_p(t)$، محجمة بالمقدار $T_p x(nT_p)$، ومزاحة زمنياً من نقطة أصل الزمن بالكمية نفسها مثل النبضة المقابلة لها. وعلى ذلك فإن الاستجابة المقربة ستكون على الصورة :

$$y(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_p x(nT_p) h_p(t-nT_p)$$ المعادلة رقم (٥,٩)

سنفترض توضيحاً لذلك، سنفترض أن استجابة وحدة النبضة $h_p(t)$ هي الاستجابة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة المبين في شكل (٥,٣). افترض أن إشارة الدخل x(t) هي الشكل الموجي المتواصل في شكل (٥,٤)، والذي تم تقريبه بتتابع من النبضات كما هو مبين.

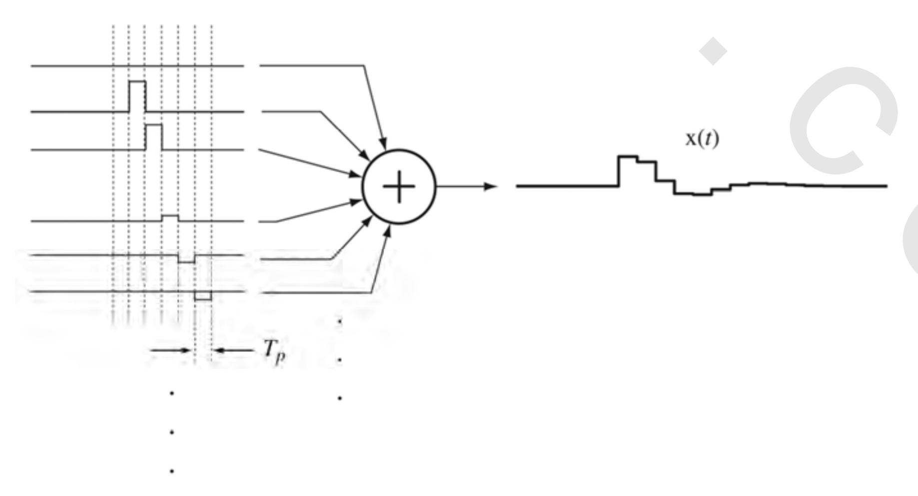
في شكل (٥،٥) تم فصل النبضات ثم جمعها لتحقيق التقريب.




**شكل رقم (٥،٣) استجابة وحدة النبضة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة.**




**شكل رقم (٥.٤) x(t) المقربة والحقيقية.**




**شكل رقم (٥،٥) تقريب x(t) كمجموع من النبضات المنفردة.**

حيث إن مجموع النبضات المنفردة هو التقريب x(t)، فإن الاستجابة التقريبية يمكن حسابها عن طريق تطبيق الدخل المقرب x(t) على النظام. ولكن حيث إن النظام هو نظام LTI، فإنه يمكننا بدلا من ذلك استخدام أساسيات نظرية التجميع وتطبيق النبضات واحدة بعد الأخرى على النظام. وعلى ذلك فإن هذه الاستجابات يمكن تجميعها لتكوين الاستجابة الكلية المقربة للنظام كما في شكل (٥,٦).

شكل (٥,٧) يبين إشارة الدخل المقربة للنظام، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة وحدة النبضة واستجابات النظام الحقيقية والمقربة، بفرض عرض النبضة يساوي 0.2 ثانية. مع تقليل عرض النبضة، فإن التقريب يصبح أفضل كما في شكل (٥,٨). مع عرض نبضة يساوي 0.1 ثانية، يصبح عرض النبضة الحقيقي والمقرب من الصعب التفريق بينهما كما هو موضح على هذا التدريج.

بمراجعة اساسيات الرياضيات، ومن مفهوم قانون المستطيل في التكامل، نجد أن التكامل لمتغير حقيقي يمكن تحديده بأنه نهاية للمجموع كما يلي :

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{n=a/\Delta x}^{b/\Delta x} g(n\Delta x)\Delta x$$ المعادلة رقم (٥,١٠)

سنقوم بتطبيق المعادلة (٥,١٠) على مجموع النبضات واستجابة النبضة في المعادلات (٥,٨) و (٥,٩) مع تقارب عرض النبضة من الصفر. كلما أصبح عرض النبضة $T_p$ أصغر، فإن تقريب كل من الإثارة والاستجابة يصبح أفضل. في النهاية عندما تقترب $T_p$ من الصفر، فإن المجموع يصبح تكاملاً ويصبح التقريب حقيقياً. في الحدود نفسها ، فإن وحدة النبضة $(1/T_p)\text{rect}(1/T_p)$ تقترب من وحدة النبضة. مع اقتراب $T_p$ من الصفر فإن النقط الزمنية $nT_p$ يقترب بعضها من بعض. في النهاية فإن الإزاحة الومنية المتقطعة $nT_p$ تتداخل في صورة إزاحات مستمرة. من المفضل (والمعروف) أن نسمي هذه الإزاحة الزمنية المستمرة τ. بتغيير اسم كمية الإزاحة الزمنية $nT_p$ إلى τ، وحساب النهاية مع اقتراب $T_p$ من الصفر، فإن عرض النبضة $T_p$ يقترب من التفاضل dτ وتصبح الإثارة كما يلي :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_p x(nT_p) \frac{1}{T_p} rect\left(\frac{1-nT_p}{T_p}\right)$$

∫ dτ (τ) δ(t-τ)

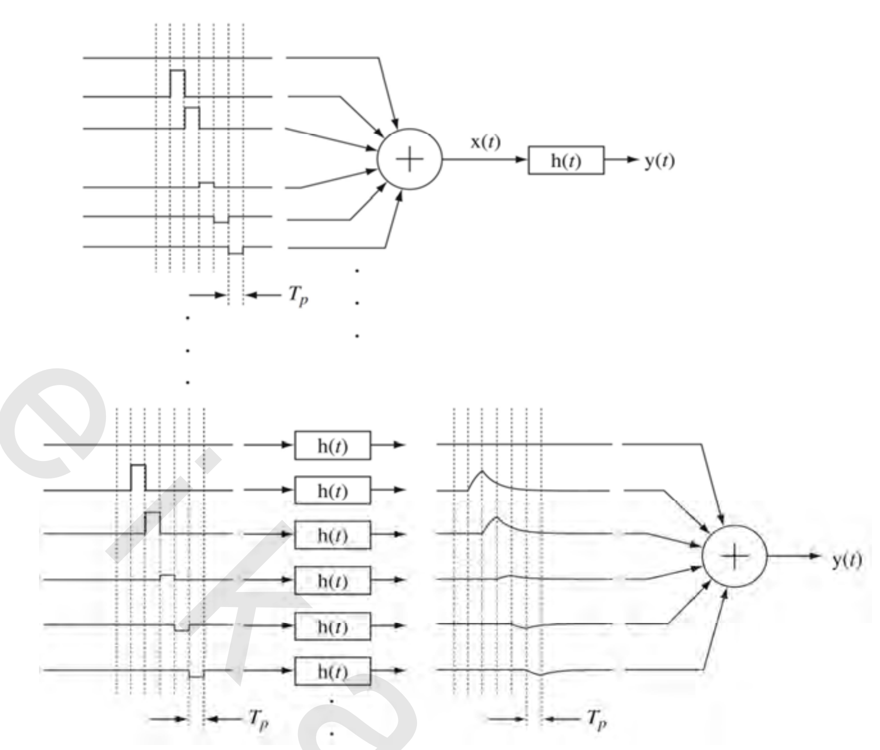
وأيضاً :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_p x(nT_p)\ h_p(t-nh_p)$$

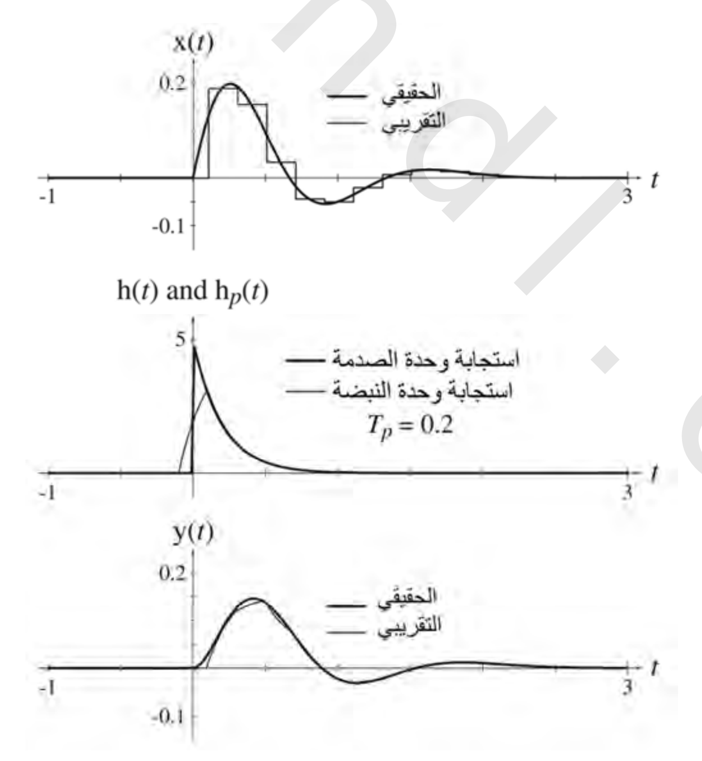
∫ dτ (τ) δ(t-τ)

ولذلك ففي النهاية فإن هذه المجاميع تصبح تكاملات على الصورة التالية :

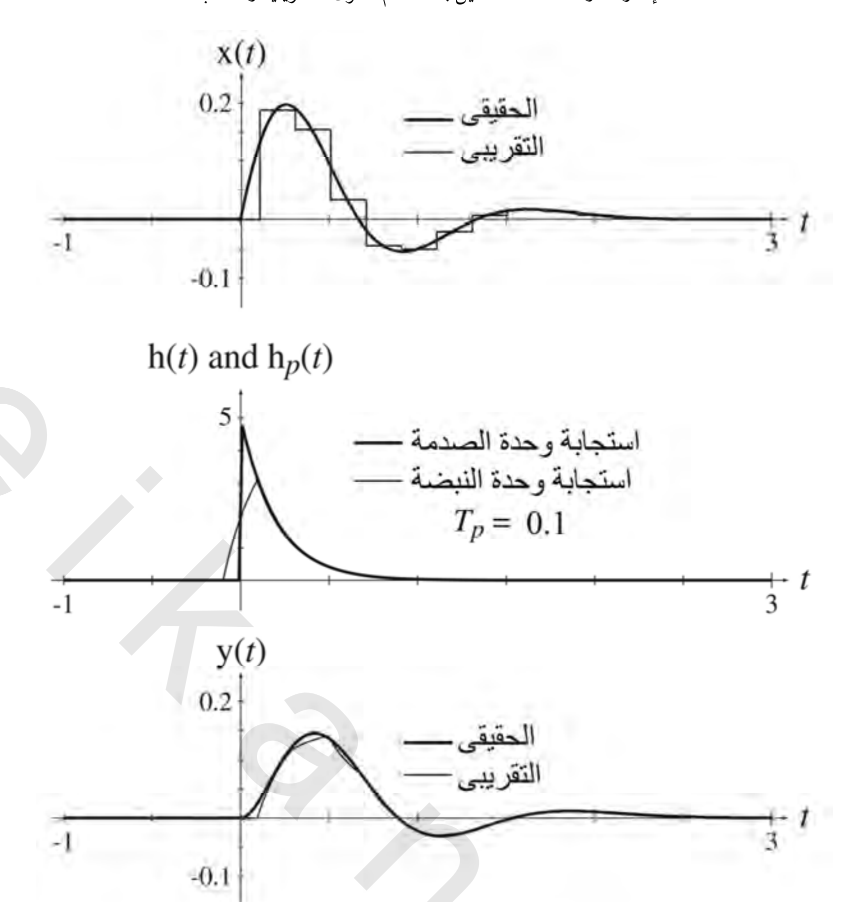
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$ المعادلة رقم (٥,١١)




**شكل رقم (٥,٦) تطبيق الخطية ونظرية التجميع لإيجاد الاستجابة التقريبية للنظام.**




**شكل رقم (٥,٧). الإثارة الحقيقية والتقريبية، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة النظام الحقيقية والتقريبية باعتبار Tp=0.2**




**شكل رقم (٥,٨). الإثارة الحقيقية والتقريبية، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة النظام الحقيقية والتقريبية باعتبار Tp=0.1**

وأيضاً :

$y(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ المعادلة رقم (٥,١٢)

حيث استجابة وحدة النبضة $h_p(t)$ تقترب من استجابة وحدة النبضة h(t) (في العادة يطلق عليها استجابة النبضة) للنظام. التكامل في المعادلة (٥.١١) يتم تحقيقه بالتعويض بخاصية العينة للنبضة. التكامل في المعادلة (٥,١٢) يسمى التكامل اللاتفافي. يتم بيان عملية الالتفاف بين دالتين بالرمز * كما يلي :

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ المعادلة رقم (٥,١٣)

طريقة أخرى للحصول على التكامل الالتفافي هي أن نبدأ من المعادلة (٥,١١)، التي تنتج مباشرة من خاصية العينة للنبضة. الكمية التي يتم تكاملها في المعادلة (٥,١١) هي وحدة النبضة عند t=τ وشدتها هي x(τ). حيث إنه، وبالتعريف، فإن h(t) هي الاستجابة لوحدة النبضة δ(t)، وحيث إن النظام متجانس وثابت زمنياً، فإن الاستجابة لـ x(τ)δ(t-τ) يجب أن تكون x(τ)h(t-τ). وعلى ذلك فباستدعاء خاصية التجميع، فإنه إذا كان $x(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$، يمثل تكامل (نهاية التجميع) قيم x ، فإن :

$y(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ، يمثل تكاملاً لقيم y كاستجابة لقيم x المقابلة. هذا الاستنتاج أكثر تجريدا وفلسفة وأقصر كثيراً من الاستنتاج السابق وتطبيقاً رائعاً لخواص النظم LTI ، وخاصية العينة لوحدة النبضة.

تعتبر استجابة النبضة لنظم الـ LTI وصفاً مهماً جداً لطريقة استجابة هذه الأنظمة ، لأنه بمجرد تحديد هذه الاستجابة ، فإن الاستجابة لأي إشارة دخل اختيارية يمكن حسابها. يمكن توضيح عملية الالتفاف في رسم صندوقي كما في شكل (٥,٩).

x(t) → h(t) → y(t) = x(t)∗h(t)

**شكل رقم (٥,٩) رسم صندوقي توضيحي لعملية الالتفاف.**

### أمثلة بيانية وتحليلية على عملية الالتفاف

الصورة الرياضية العامة لعملية الالتفاف هي كما يلي :

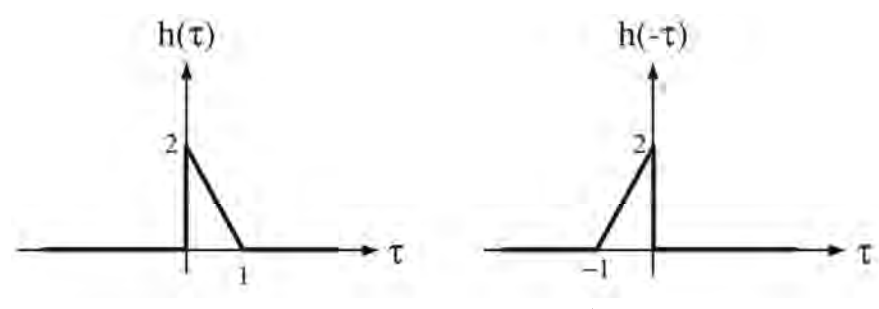
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

إن مثالا بيانيا على العمليات المتضمنة في التكامل الالتفافي سيساعد جدا في فهم هذه العملية. افترض أن h(t) و x(t) هما الدالتان الموضحتان في شكل (٥,١٠).

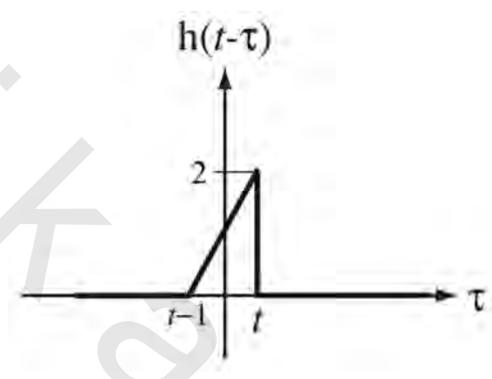



**شكل رقم (٥,١٠) الدالتان المطلوب إجراء عملية الالتفاف عليهما.**

هذه الاستجابة الصدمية h(t) ليست استجابة مثالية لنظام خطي عملي ، ولكنها ستستخدم فقط لبيان عملية الالتفاف. الكمية المطلوب تكاملها في عملية الالتفاف هي $x(\tau)h(t-\tau)$. ما هي $h(t-\tau)$ ؟ إنها دالة في المتغيرين t و $\tau$. حيث إن متغير التكامل في عملية الالتفاف هو $\tau$ ، فإننا يجب أن نعتبر $h(t-\tau)$ على أنها دالة في $\tau$ لكي نرى كيف سنجري هذا التكامل. يمكننا أن نبدأ ذلك برسم $h(\tau)$ وبعد ذلك نرسم $h(-\tau)$ مع $\tau$ كما في شكل (٥,١١).



شكل رقم (٥,١١) رسم h(τ) و h(-τ) مع τ.



شكل رقم (٥,١٢) رسم h(-τ) مع τ.

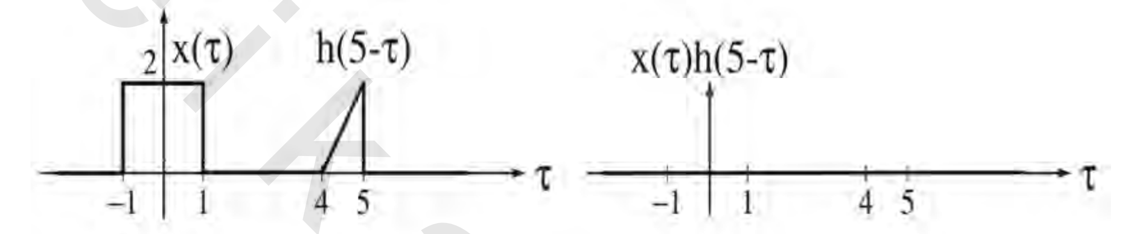
إن إضافة t في h(t-τ) يزيح الدالة بمقدار t من الوحدات ناحية اليمين كما في شكل (٥,١٢). إن التحول من h(τ) إلى h(t-τ) يمكن وصفه على أنه عمليتي إزاحة وتحجيم وتعاقبتين :

$$h(\tau) \xrightarrow{\tau\to-\tau} h(-\tau) \xrightarrow{\tau\to\tau-t} h\big(-(\tau-t)\big) = h(t-\tau)$$

إذا قمنا بالتعويض عن t تساوي τ في h(t-τ) سنحصل على h(0). من التحديد الأولى للدالة h(t) سنرى أن هذه نقطة عدم اتصال حيث h(t) تنتقل من 0 إلى 1. إنها النقطة نفسها على h(t-τ). قم بعمل الشيء نفسه لـ τ=t-1 لترى إن كانت ستعمل أم لا.

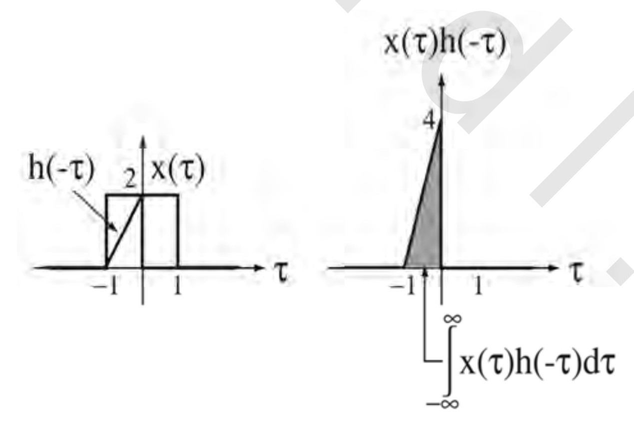
واحد من الالتباسات الشائعة هو أن ننظر إلى التكامل ولا نفهم ماذا يعني التكامل من τ=-∞ حتى τ=+∞. حيث إن t ليست هي متغير التكامل، فإنها ستكون كما لو كانت كمية ثابتة أثناء عملية التكامل. ولكنها تعتبر المتغير في الدالة النهائية التي ستنتج من عملية الالتفاف. فكر في عملية الالتفاف على أنها خطوتان عامتان متعقبتان. أولاً افترض قيمة لـ t، نفذ عملية التكامل واحصل على النتيجة. بعد ذلك افترض قيمة أخرى لـ t وكرر العملية نفسها. كل عملية تكامل تعطي نقطة واحدة على منحنى يصف الدالة النهائية. كل نقطة على المنحنى y(t) سيتم حسابها عن طريق إيجاد المساحة تحت حاصل الضرب x(τ)h(t-τ).

تصور حاصل الضرب $x(\tau)h(t-\tau)$، إنه يعتمد على ما هي قيمة t. لمعظم قيم t فإن الأجزاء التي لا تساوي الصفر في الدالتين لا يتطابقان وسيكون حاصل الضرب يساوي صفراً. (إن ذلك لا يماثل تماماً استجابات النبضة الحقيقية لأنها في العادة لا تكون محدودة الزمن. استجابات النبضة الحقيقية للأنظمة المستقرة تبدأ في العادة عند زمن معين وتقترب من الصفر مع اقتراب t من الما لانهاية ).ولكن لبعض قيم الزمن t فإن قيم الدالتين التي لا تساوي صفر يتطابقان وسيكون هناك مساحة لا تساوي الصفر تحت منحنى حاصل ضربهما. افترض $t=5$ و $t=0$. عندما $t=5$، فإن الأجزاء التي لا تساوي الصفر في كل من الدالتين $x(\tau)$ و $h(5-\tau)$ لا تتطابقان وسيكون حاصل الضرب يساوي صفراً كما في شكل (٥.١٣).



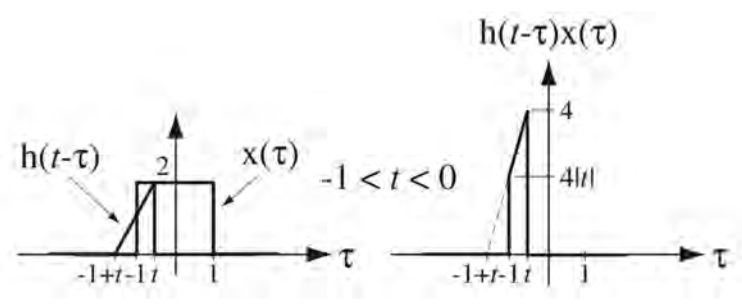

**شكل رقم (٥,١٣) استجابة النبضة، وإشارة الدخل، وحاصل ضربهما عندما t=5.**

عندما $t=0$، فإن الأجزاء غير الصفرية في الدالتين $x(\tau)$ و $h(0-\tau)$ يتطابقان وسيكون حاصل ضربهما لا يساوي الصفر كما في شكل (٥.١٤).




**شكل رقم (٥,١٤) استجابة النبضة، وإشارة الدخل، وحاصل ضربهما عندما t=0.**

لكل قيم $-1<t<0$ فإن الالتفاف للدالتين سيكون ضعف مساحة الدالة h (التي تساوي ١) ناقص مساحة المثلث الذي عرضه $|t|$ وارتفاعه $4|t|$ كما في شكل (٥.١٥).

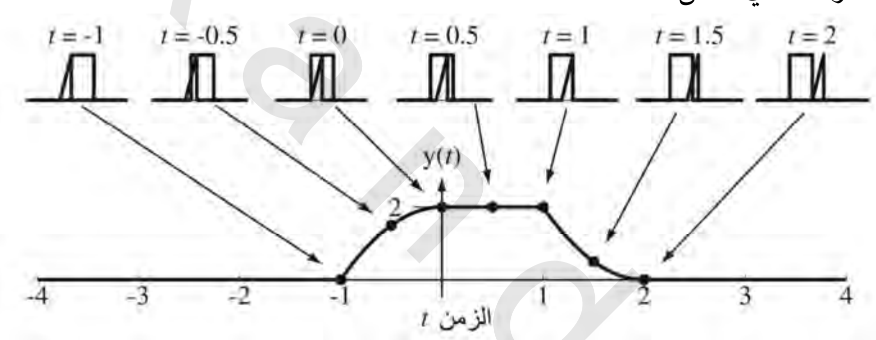



شكل رقم (٥,١٥) حاصل ضرب h(t-τ) و x(τ) عندما -1<t<0.

ولذلك فإن قيمة دالة الالتفاف في هذا المدى للـ t :

$y(t)=2-(1/2)(-t)(-4t)=2(1-t^2), \quad -1<t<0$

لكل قيم 0<t<1 فإن التفاف الدالتين سيكون هو القيمة الثابتة 2. لقيم 1<t<2 ، سيكون التفاف الدالتين هو المساحة تحت المثلث الذي عرض قاعدته هو (2-t) وارتفاعه هو (8-4t) ، وعلى ذلك فإن $y(t)=(1/2)(2-t)(8-4t)=2(2-t)^2$. الدالة النهائية موضحة في شكل (٥,١٦).




شكل رقم (٥,١٦) الالتفاف للدالة x(t) مع الدالة h(t) .

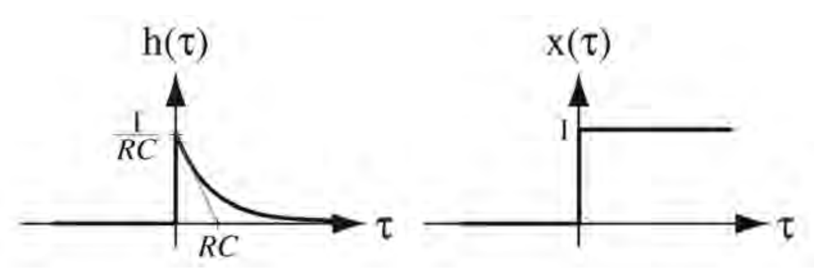
كتمرين أكثر عملية دعنا الآن نحسب استجابة وحدة الخطوة لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة باستخدام الالتفاف. إننا نعرف من التحليلات المسبقة بأن الإجابة ستكون $v_{out}(t)=(1-e^{-t/TC})u(t)$. في البداية نحتاج لحساب استجابة النبضة. المعادلة التفاضلية هي :

$$RCv'_{out}(t)+v_{out}(t)=v_{in}(t)\rightarrow RC\,h'(t)+h(t)=\delta(t)$$

صورة استجابة النبضة ستكون $h(t)=Ke^{-t/RC}u(t)$. بالتكامل مرة واحدة من $0^-$ حتى $0^+$ نحصل على :

$$RC\left[h(0^+)-\underbrace{h(0^-)}_{=0}\right]+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}h(t)\,dt}_{=0}=\underbrace{u(0^+)}_{=1}-\underbrace{u(0^-)}_{=0}\rightarrow h(0^+)=1/RC$$

وبالتالي فإن $1/RC=K$ و $h(t)=(1/RC)e^{-t/RC}u(t)$ كما في شكل (٥,١٧).




**شكل رقم (٥,١٧) استجابة النبضة والإثارة لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة.**

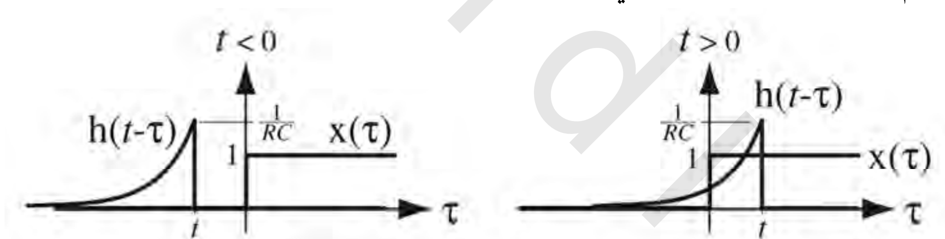
وبالتالي فإن الاستجابة $v_{out}(t)$ لوحدة الخطوة $v_{in}(t)$ ستكون $v_{out}(t)=v_{in(t)}*h(t)$ أو :

$$v_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{in}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\frac{e^{-(t-\tau)/RC}}{RC}u(t-\tau)d\tau$$

نستطيع جعل التكامل أبسط عن طريق ملاحظة أن أول وحدة خطوة $u(\tau)$ مما يجعل نتيجة التكامل صفر لكل القيم السالبة لـ $\tau$، ولذلك يمكننا كتابة ما يلي :

$$v_{out}(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-(t-\tau)/RC}}{RC}u(t-\tau)d\tau$$

افترض تأثير وحدة الخطوة الأخرى. حيث أننا نكامل على مدى $\tau$ من صفر حتى ما لانهاية، إذا كانت $t$ سالبة، فإنه لأي قيمة لـ $\tau$ في هذا المدى ستكون وحدة الخطوة تساوي صفراً كما في شكل (٥,١٨). لذلك فإنه لقيم $t$ السالبة، فإن $v_{out}(t)=0$. لقيم $t$ الموجبة ستكون وحدة الخطوة $u(t-\tau)$ واحد لكل قيم $\tau<t$ وصفر لكل فيم $\tau>t$. ولذلك، فإنه لقيم $t$ الموجبة يمكننا كتابة ما يلي :



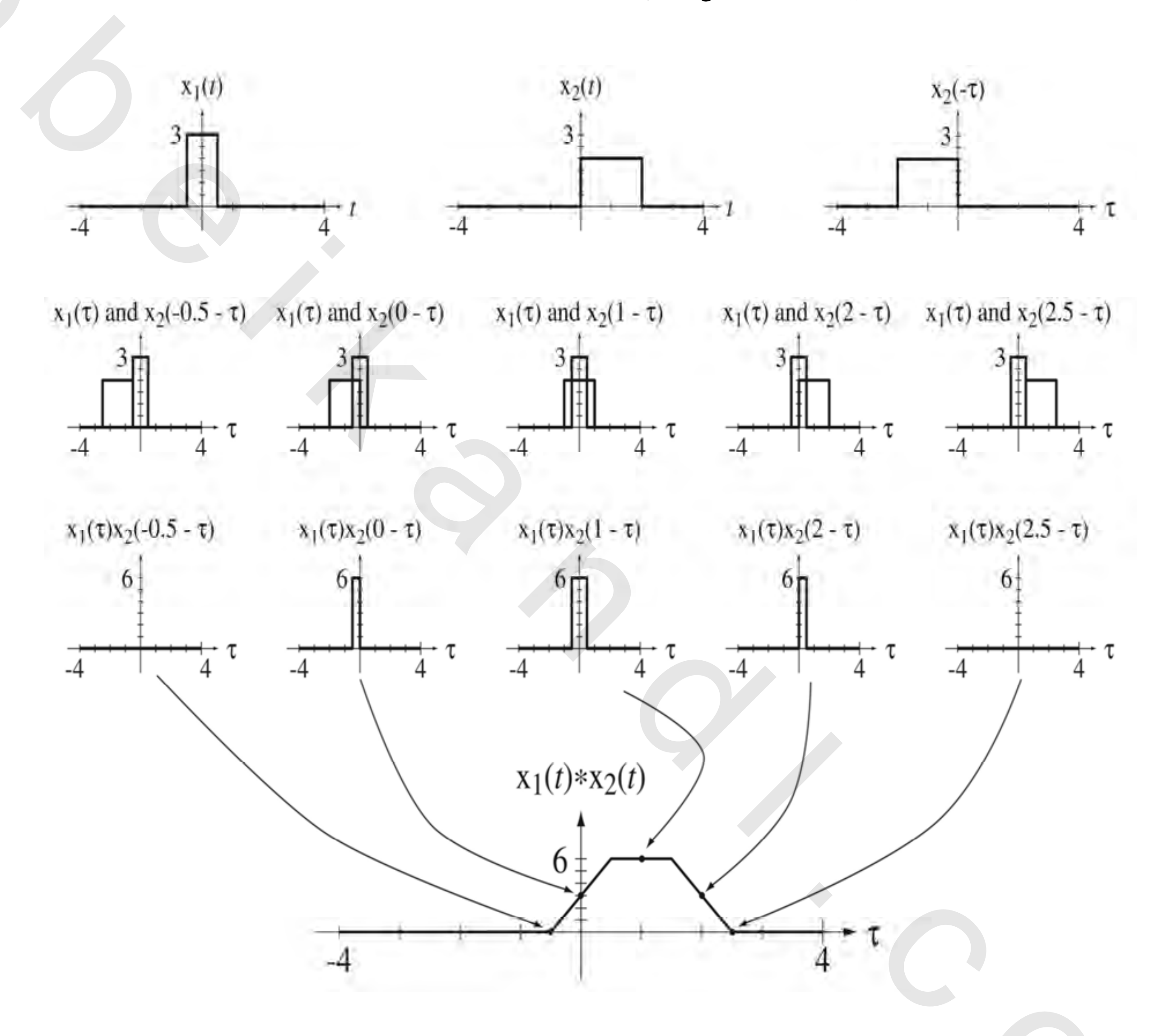

**شكل رقم (٥,١٨) العلاقة بين دالتين تشكلان حاصل الضرب في التكامل الالتفافي لقيم t الموجبة والسالبة.**

$$v_{out}(t) = \int_{0}^{t} \frac{e^{-(t-\tau)/RC}}{RC}d\tau = \left[e^{-(t-\tau)/RC}\right]_{0}^{t} = 1 - e^{-t/RC},\ \ t>0$$

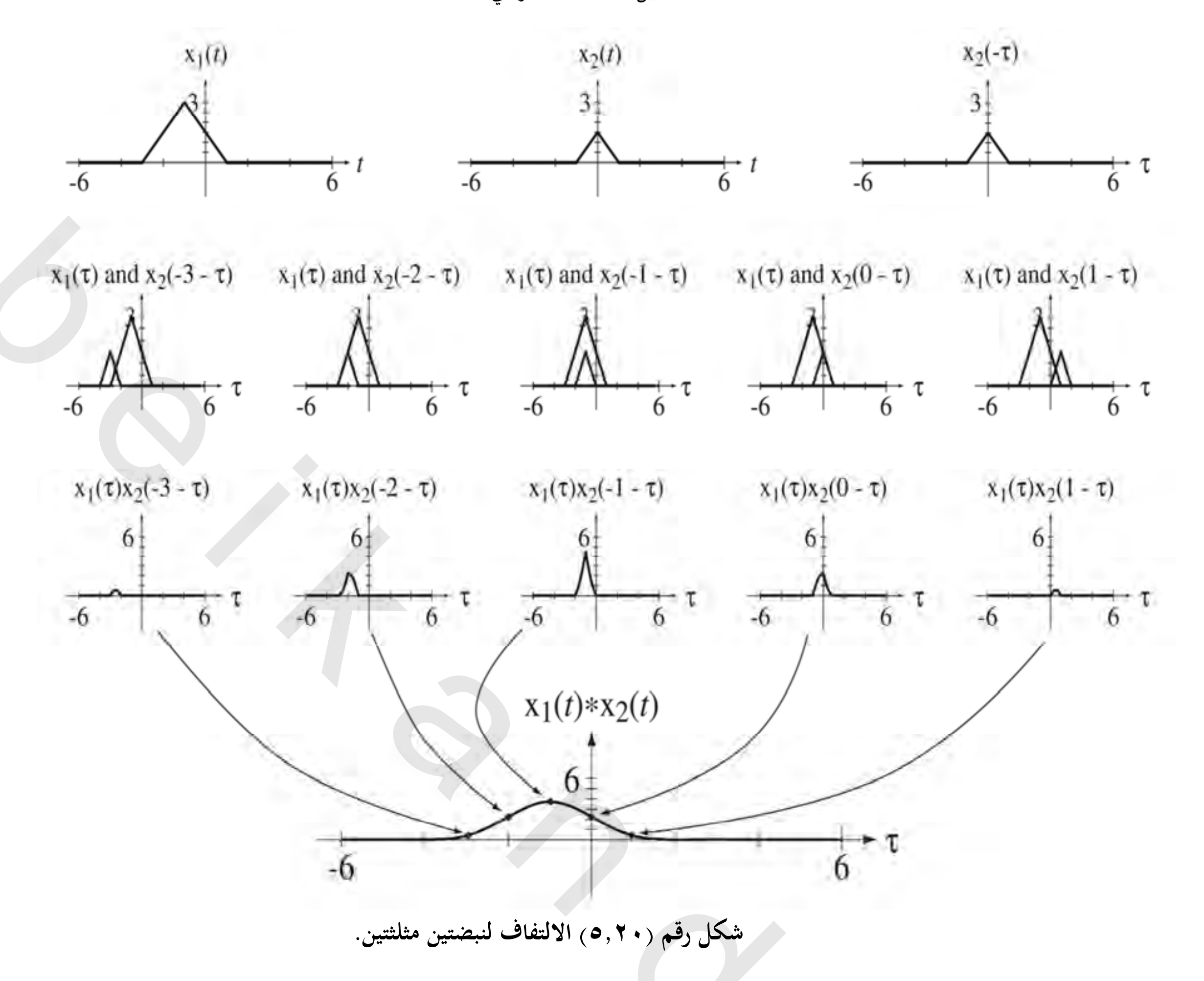
بضم نتائج قيم $t$ السالبة والموجبة تصبح الاستجابة، $v_{out}(t)=(1-e^{-t/RC})u(t)$.

شكل (٥,١٩) وشكل (٥,٢٠) يوضحان مثالين آخرين على الالتفاف. في كل حالة يقدم الصف الأعلى الدالتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ المطلوب التفافهم والصورة المقلوبة من الدالة الثانية $x_2(-\tau)$، وهي $x(t-\tau)$ بعد وضع $t=0$، والتي تمثل الصورة المقلوبة ولم تزح حتى الآن. في الصف الثاني توجد الدالتان المشتملتان في التكامل الالتفافي وهما $x_1(\tau)$ و $x_2(t-\tau)$ مرسومتان مع $\tau$ لخمسة اختيارات لـ $t$، توضحان إزاحة الدالة الثانية $x_2(t-\tau)$ مع تغير $t$. في الصف الثالث

يوجد حاصل الضرب $x_1(\tau)x_2(t-\tau)$ في التكامل الالتفافي عند الأزمنة نفسها. في الأسفل يوجد المخطط الذي يوضح التفاف الدالتين الأصليتين مع أسهم ونقاط صغيرة توضح قيم الالتفاف عند الخمس قيم للزمن، وهي نفسها تمثل المساحات $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$ تحت حاصل الضرب عند هذه النقط.




**شكل رقم (٥,١٩) الالتفاف لنبضتين مستطيلتين.**




**شكل رقم (٥,٢٠) الالتفاف لنبضتين مثلثتين.**

**خواص الالتفاف**

إحدى العمليات التي تظهر دائماً في تحليل الإشارات والأنظمة هي الالتفاف بين أي إشارة مع النبضة كما يلي:

$$x(t) * A\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) A\delta(t - \tau - t_0) d\tau$$

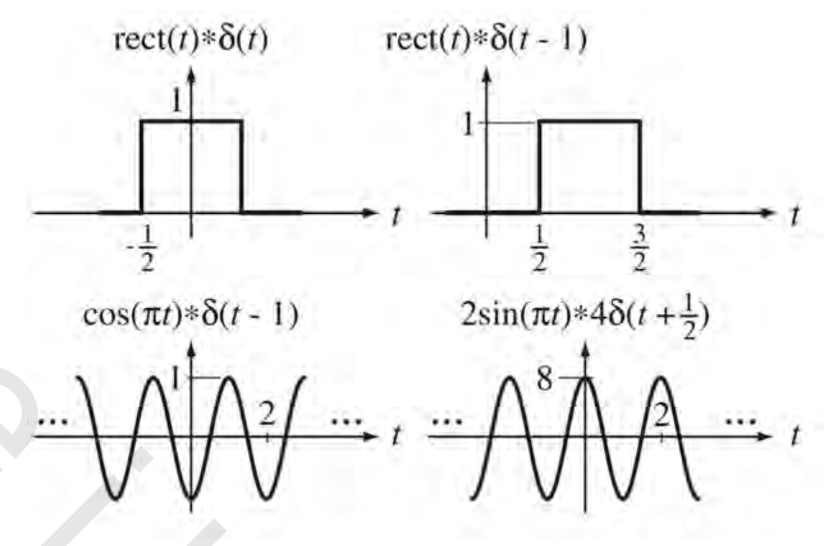
يمكننا استخدام خاصية العينة للنبضة لتحقيق هذا التكامل. متغير التكامل هو τ، وحيث إن النبضة تحدث في المتغير τ عندما $t-\tau-t_0=0$ أو $\tau=t-t_0$، فإن :

$$x(t)*A\delta(t-t_0)=Ax(t-t_0)$$ المعادلة رقم (٥,١٤)

وهذه نتيجة مهمة جداً وستظهر العديد من المرات في التمارين والمواضيع الأخرى (انظر شكل (٥,٢١)).

إذا عرفنا الدالة $g(t)=g_0(t)*\delta(t)$، فإن الصورة المزاحة زمنياً $g(t-t_0)$ يمكن التعبير عنها في الصورتين البديلتين التاليتين :

$g(t-t_0)=g_0(t)*\delta(t-t_0)$ أو $g(t-t_0)=g_0(t-t_0)*\delta(t)$




**شكل رقم (٥,٢١) أمثلة على الالتفاف مع الصدمات.**

ولكن ليست الصورة $g_0(t-t_0)*\delta(t-t_0)$. بدلاً من ذلك، $g_0(t-t_0)*\delta(t-t_0)=g(t-2t_0)$. هذه الخاصية ليست حقيقية فقط عند الالتفاف مع الصدمات، ولكن مع أي دالة. إزاحة أي واحدة من الدالتيين اللتين يتم إجراء الالتفاف عليهما (ولكن ليس الاثنان) يزيح نتيجة الالتفاف بالكمية نفسها.

خواص التبادلية commutativity، والترابطية associativity، والتوزيع distributivity، والتفاضل، والتحجيم scaling لعملية الالتفاف كلها تم استنتاجها في الملحق ج ووضع ملخص لها هنا كما يلي :

| | |
|---|---|
| التبادلية | $x(t)*y(t)=y(t)*x(t)$ |
| الترابطية | $(x(t)*y(t))*z(t)=x(t)*(y(t)*x(t))$ |
| التوزيع | $(x(t)+y(t))*z(t)=x(t)*z(t)+y(t)*z(t)$ |
| إذا كانت $y(t)=x(t)*h(t)$، فإن : | |
| خاصية التفاضل | $y'(t)=x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)$ |
| خاصية المساحة | مساحة y = (مساحة x) × (مساحة h) |
| خاصية التحجيم | $y(at)=\|a\|\ x(at)*h(at)$ |

بفرض أن التفاف x(t) مع h(t) هو $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$. لنفترض أن x(t) كانت محدودة، بمعنى $|x(t-\tau)|<B$ لكل قيم $\tau$ حيث B تعتبر حداً أعلى محدد، فإن مقدار التكامل الالتفافي سيكون :

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \right|$$

باستخدام حقيقة أن مقدار تكامل أي دالة يكون أقل من أو يساوي تكامل مقدار هذه الدالة :

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|\, dx$$

وأن مقدار حاصل ضرب دالتين يساوي حاصل ضرب مقدار كل من الدالتين، بمعنى $|g(x)h(x)|=|g(x)||h(x)|$ ، ولذلك يمكننا كتابة ما يلي :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||h(\tau)|d\tau$$

وحيث إن مقدار $x(t-\tau)$ يكون أقل من B لأي قيمة لـ τ ، فإن :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||h(\tau)|d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} B|h(\tau)|\, d\tau$$

أو :

$$|y(t)| < B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau$$

ولذلك فإن التكامل الالتفافي يتقارب إذا كان $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$ محدوداً، أو بمعنى آخر إذا كانت الدالة h(t) قابلة للتكامل تماما. وحيث إن الالتفاف تبادلي ، فإنه يمكننا أن نقول إنه إذا كانت h(t) محدودة، فإن شرط التقارب سيصبح أن تكون x(t) قابلة للتكامل تماما.

| |
|---|
| لكي يكون التكامل الالتفافي متقارباً، فإن الإشارتين اللتين يتم عليهما الالتفاف يجب أن تكون كل منهما محدودة وعلى الأقل أن تكون واحدة منهما قابلة للتكامل التام. |

**مثال ٥,٣**

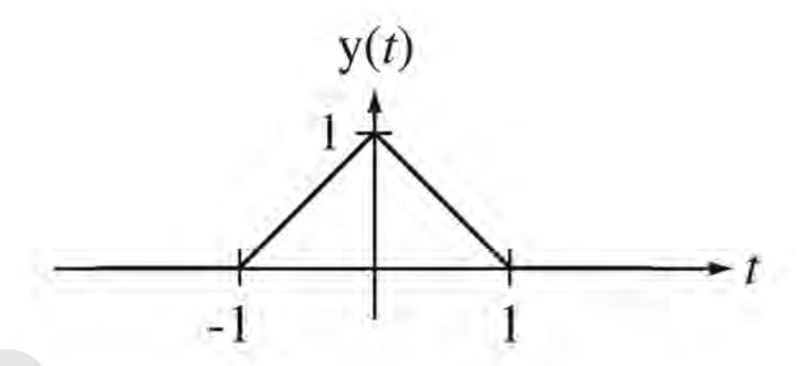
**إلتفاف دالتين مستطيلتبن**

احسب الالتفاف y(t) لوحدتين مستطيلتين x(t)=rect(t) و h(t)=rect(t).

هذا الالتفاف يمكن إجراؤه مباشرة باستخدام التكامل الالتفافي، أو تحليلياً، أو بيانياً. ولكن يمكننا استعراض خاصية التفاضل لتجنب التكامل الصريح :

$$y(t)=x(t)*h(t) \rightarrow y''(t)*h'(t)$$
$$y''(t)=[\delta(t+1/2)-\delta(t-1/2)]*[\delta(t+1/2)-\delta(t-1/2)]$$
$$y''(t)=\delta(t+1)-2\delta(t)+\delta(t-1)$$
$$y'(t)=u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$$
$$y(t)=ramp(t+1)-2ramp(t)+ramp(t-1)$$

انظر شكل (٥,٢٢).

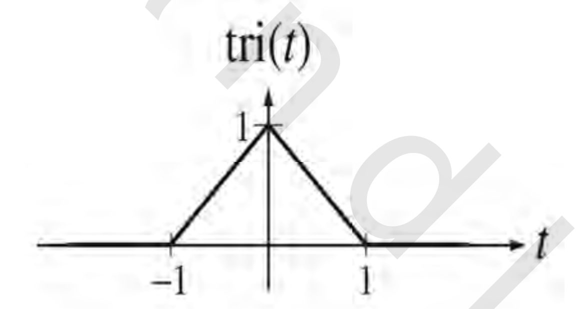



**شكل رقم (٥,٢٢) إلتفاف وحدتين مربعتين.**

نتيجة التفاف اثنين من الوحدات المستطيله في مثال ٥,٣ من الأهمية بمكان بحيث يتم إعطاؤها اسماً نرجع إليها به في المستقبل. إنها تسمى الدالة المثلثة كما في شكل (٥,٢٣).

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

إنها تسمى مثلث الوحدة ؛ لأن قمة ارتفاعها ومساحتها كل منهما يساوي واحداً.

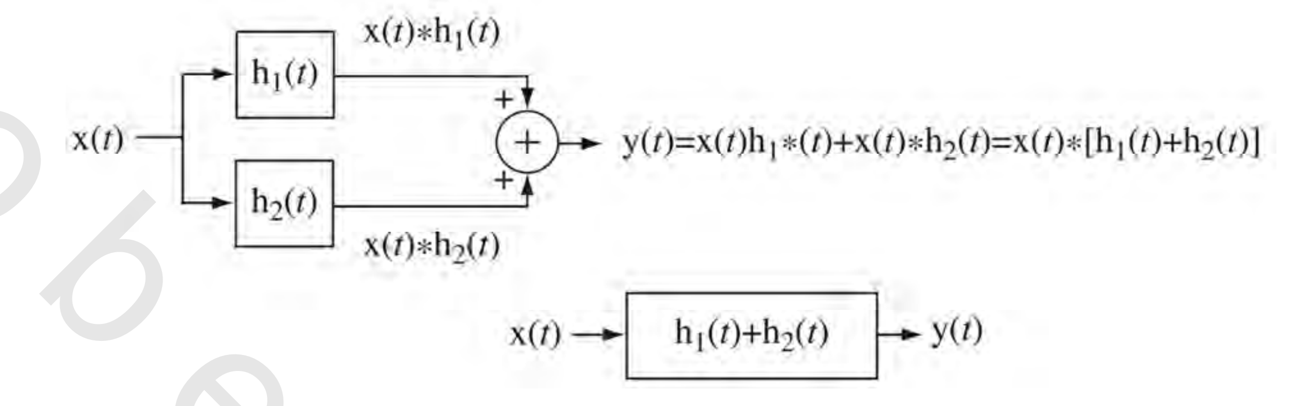



**شكل رقم (٥,٢٣) دالة وحدة المثلث.**

$x(t) \rightarrow [h_1(t)] \rightarrow x(t)*h_1(t) \rightarrow [h_2(t)] \rightarrow y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$

$x(t) \rightarrow [h_1(t)*h_2(t)] \rightarrow y(t)$

**شكل رقم (٥,٢٤) توصيل متوالٍ لنظامين.**




**شكل رقم (٥,٢٥) توصيل توازٍ لنظامين.**

**توصيلات الأنظمة**

يوجد توصيلتان شائعتان للأنظمة وهما التوصيل المتوالي، والتوصيل المتوازي كما في شكل (٥,٢٤) وشكل (٥,٢٥).

باستخدام خاصية الترابط للالتفاف فإنه يمكننا توضيح أن التوصيل على التوالي لنظامين يمكن اعتبارهما كنظام واحد تكون استجابة النبضة له هي الالتفاف لاستجابة النبضة لكل من النظامين. وباستخدام خاصية التوزيع للالتفاف فإنه يمكننا أن نوضح أن التوصيل على التوازي لنظامين يمكن اعتبارهما كنظام واحد تكون استجابته الصدمية مجموع استجابتي النبضة لكل من النظامين.

**استجابة الخطوة واستجابة النبضة**

في اختبارات الأنظمة الحقيقية، فإنه في العادة يتم اختبار أي نظام باستخدام بعض الإشارات القياسية التي تكون سهلة في توليدها التي لا تدفع النظام إلى الدخول في عدم الخطية. واحدة من الإشارات التي من هذا النوع هي دالة الخطوة. استجابة أي نظام LTI لوحدة الخطوة هي :

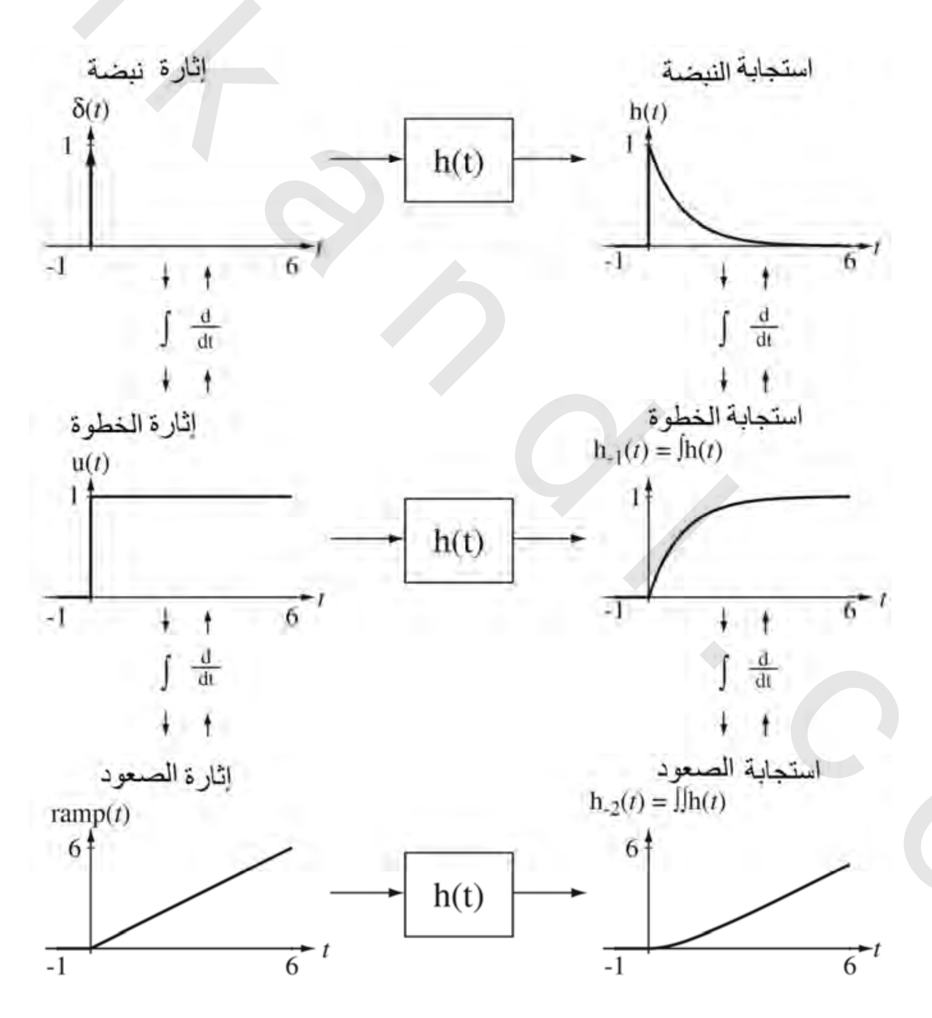
$$h_{-1}(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

إن ذلك يثبت أن استجابة أي نظام LTI مثار بوحدة خطوة تساوي تكامل استجابة النبضة، لذلك فإنه يمكننا القول بأنه طالما أن وحدة الخطوة هي تكامل النبضة، فإن الاستجابة لوحدة الخطوة ستكون تكامل استجابة وحدة النبضة. في الحقيقة فإن هذه العلاقة محققة ليس فقط لإثارات النبضة، ووحدة الخطوة فقط، ولكن لأي إثارة أخرى. إذا تم تغيير أي إثارة إلى تكاملها، فإن الاستجابة تتغير أيضاً إلى تكاملها. يمكننا أيضاً أن نغير هذه العلاقات

بطريقة عكسية لنقول إنه حيث إن التفاضل الأول هو معكوس التكامل، فإنه إذا تم تغيير الإثارة إلى تفاضلها الأول، فإن الاستجابة تتغير أيضاً إلى تفاضلها الأول كما في شكل (٥,٢٦).

**الاستقرار واستجابة النبضة**

لقد تم تحديد الاستقرار عموماً في فصل ٤ عن طريق القول بأن النظام المستقر يكون له إشارة خرج محددة كاستجابة لأي إشارة دخل محددة. يمكننا الآن إيجاد طريقة لتحديد إذا كان أي نظام مستقراً أم لا عن طريق فحص استجابته الصدمية. لقد أثبتنا مسبقاً أن الالتفاف لإشارتين يتقارب إذا كانت كل منهما محددة وواحدة منهما على الأقل قابلة للتكامل. استجابة أي نظام y(t) للدخل x(t) هي y(t)=x(t)*h(t). على ذلك، فإذا كانت x(t) محددة فإنه يمكننا القول بأن y(t) تكون محددة إذا كانت h(t) قابلة تماماً للتكامل. بمعنى، أن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$ يكون محدداً.




**شكل رقم (٥,٢٦) العلاقة بين التكاملات والتفاضلات والاستجابات لأي نظام LTI.**

أي نظام مستمر زمنياً يكون مستقر BIBO إذا كانت استجابته الصدمية قابلة تماماً للتكامل.

**الإثارة الأسية المركبة ودالة العبور**

افترض النظام LTI المستقر الذي يمكن وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$ المعادلة رقم (٥,١٥)

حيث :

١- حيث a و b كلها ثوابت

٢- الرمز $x^{(k)}(t)$ يعني التفاضل رقم k لـ x(t) بالنسبة للزمن ، وإذا كانت k سالبة فإن ذلك يعني تكاملاً بدلاً من التفاضل.

بعد ذلك سنفترض الإثارة في صورة أس مركب على الصورة $x(t)=Xe^{st}$ حيث X و s يكونان قيمتين مركبتين على العموم، وهذا الوصف للإثارة يكون محققا عند كل الأزمنة. حل المعادلة التفاضلية سيكون مجموع الحل المتجانس والحل الخاص. هذا النظام سيكون مستقراً، ولذلك فإن القيم المميزة ستكون بها أجزاء حقيقية سالبة وسيقترب الحل المتجانس من الصفر مع مرور الزمن. سنفترض أيضاً أن النظام كان يعمل بهذه الإثارة لزمن شبه لا نهائي، ولذلك فإن الحل المتجانس يكون قد تدني إلى الصفر فعلاً ويصبح الحل الكلي الآن هو الحل الخاص فقط.
الصورة الدالية للحل الخاص تتكون من تجميع خطي لدوال الإثارة والتفاضلات الأحادية لها. حيث إن تفاضل الأس سيكون أساً آخر بالشكل نفسه ، وستكون الاستجابة y(t) على الصورة $y(t)=Ye^{st}$ حيث Y ثابت مركب. وعلى ذلك، ففي المعادلة التفاضلية يكون التفاضل رقم k على الصورة $x^{(k)}(t)=s^kXe^{st}$ وأيضاً $y^{(k)}(t)=s^kYe^{st}$، ويمكن كتابة المعادلة (٥,١٥) على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y e^{st} = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X e^{st}$$

هذه المعادلة لم تعد معادلة تفاضلية بمعاملات حقيقية. لقد أصبحت الآن معادلة جبرية بمعاملات مركبة.
المعاملات $Xe^{st}$ و $Ye^{st}$ يمكن أخذها خارج عملية التجميع لتصبح المعادلة على الصورة :

$$Ye^{st} \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = Xe^{st} \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

النسبة بين الاستجابة والإثارة ستصبح على الصورة :

$$\frac{Ye^{st}}{Xe^{st}} = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

وهي نسبة بين حدود في المتغير s تسمى الدالة المنطقية، أو المعقولة rational function، وهي تمثل دالة العبور للنظام :

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$ المعادلة رقم (٥,١٦)

وبالتالي ستكون الاستجابة على الصورة $Ye^{st}=H(s)Xe^{st}$ ، أو $y(t)=H(s)x(t)$.

بالنسبة للأنظمة التي من هذا النوع يمكن كتابة دالة العبور مباشرة من المعادلة التفاضلية. إذا كانت المعادلة التفاضلية تصف النظام، فإن دالة العبور تفعل الشيء نفسه. تعتبر دالة العبور مفهوماً أساسياً في الإشارات، والأنظمة وسنستخدم هذا المفهوم في العديد من المرات في الموضوعات المقبلة. يمكننا أيضاً حساب الاستجابة لأي إثارة أسية مركبة باستخدام الالتفاف. الاستجابة y(t) لأي نظام LTI استجابة النبضة له هي h(t) والإثارة له هي $x(t)=Xe^{st}$ ستكون :

$$y(t) = h(t) * Xe^{st} = X\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = Xe^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

بمساواة صورتي y(t) نحصل على :

$$H(s)Xe^{st} = Xe^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \rightarrow H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

والتي تبين كيف تتعلق دالة العبور مع استجابة النبضة. حيث إن كل من استجابة النبضة ودالة العبور يميزان تماما أي نظام LTI، فإنهما يجب أن يتعلقا مع بعضهما بعضاً بصورة فريدة. التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ سنعود إليه مرة أخرى في الفصل ٨ وسيتم تحديده على أنه تحويل لابلاس لـ h(t).

**الاستجابة الترددية**

المتغير s في الأس المركب يكون عموما له قيمة مركبة أيضاً. سنفترض هذه القيمة على الصورة $s=\sigma+j\omega$ حيث σ هي الجزء الحقيقي و ω هي الجزء التخيلي. في الحالة الخاصة عندما تكون $\sigma=0$، فإن $s=j\omega$، ويصبح الأس المركب $e^{st}$ دالة جيبية مركبة $e^{h\omega t}$ وتصبح دالة العبور للنظام H(s) هي الاستجابة الترددية H(jω). الدالة $e^{j\omega t}$ تسمى الجيب المركب لأنه عن طريق قاعدة أويلر يمكن كتابة $e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$ وهي صورة مجموع جيب تمام حقيقي وجيب تخيلي، وكل منهما دالة في التردد الزاوي ω. في المعادلة $Ye^{st}=H(s)Xe^{st}$ بوضع $s=j\omega$ يمكن كتابة ما يلي :

$$Ye^{j\omega t} = |Y|e^{j\measuredangle Y}e^{j\omega t} = H(j\omega)Xe^{j\omega t} = |H(j\omega)|e^{j\measuredangle H(j\omega)}|X|e^{j\measuredangle X}e^{j\omega t}$$

بالقسمة على $e^{j\omega t}$ يمكن كتابة ما يلي :

$$|Y|e^{j\measuredangle Y} = |H(j\omega)||X|e^{(j(\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X))}$$

بمساواة المقادير في الطرفين نجد أن $|Y|=|H(j\omega)||X|$ وبمساواة الزوايا $\measuredangle Y=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X$. الدالة H(jω) تسمى الاستجابة الترددية للنظام لأنه عند أي تردد زاوي ω إذا عرفنا مقدار وزاوية الإثارة ومقدار وزاوية الاستجابة الترددية، فإنه يمكن حساب مقدار وزاوية الاستجابة.

لقد أوضحنا في الفصل ٤، باستخدام أساسيات الخطية ونظرية التجميع، أنه إذا تم تطبيق الإثارة x(t) على أي نظام وأعطت الاستجابة y(t)، فإن الجزء الحقيقي من x(t) يتسبب في الجزء الحقيقي من y(t)، والجزء التخيلي من x(t) يتسبب في الجزء التخيلي من y(t). ولذلك إذا كانت الإثارة الحقيقية لأي نظام هي $x(t)=A_x\cos(\omega t+\theta_x)$ فإن استجابة أي نظام لإثارة على الصورة :

$$x_c(t)=A_x\cos(\omega t+\theta_x)+jA_x\sin(\omega t+\theta_x)=A_xe^{j(\omega t+\theta x)}$$

ستكون على الصورة :

$$y_c(t)=A_y\cos(\omega t+\theta_y)+jA_y\sin(\omega t+\theta_y)=A_y e^{j(\omega t+\theta y)}$$

ويمكننا أن نعتبر أن الجزء الحقيقي $y(t)=A_y\cos(\omega t+\theta_y)$ هو الاستجابة للجزء الحقيقي $x(t)=A_x\cos(\omega t+\theta_x)$.

باستخدام العلاقة $|Y|=|H(j\omega)||X|$ و $\measuredangle Y=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X$ نحصل على ما يلي :

$$\theta_y=\measuredangle H(j\omega)+\theta_x \quad \text{و} \quad A_y=|H(j\omega)|A_x,$$

**مثال ٥,٤**

**دالة العبور والاستجابة الترددية**

نظام LTI موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 3000y'(t) + 2x10^6 y(t)=2x10^6 x(t)$$

(أ) احسب دالة العبور لهذا النظام

للمعادلة التفاضلية التي على الصورة : $\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$ نجد أن $N=2$ و $M=0$ و $a_0=2x10^6$ و $a_1=3000$ و $b_0=2x10^6$ ، ولذلك فإن دالة العبور له ستكون على الصورة :

$$H(s) = \frac{2x10^6}{s^2+3000s+2x10^6}$$

(ب) إذا كانت $x(t)=Xe^{j400\pi t}$ و $y(t)=Ye^{j400\pi t}$ ، و $X=3e^{j3\pi/2}$ ، احسب مقدار وزاوية Y.

الاستجابة الترددية ستكون :

$$H(j\omega) = \frac{2x10^6}{(j\omega)^2+3000(j\omega)+2x10^6} = \frac{2x10^6}{2x10^6-\omega^2+j3000\omega}$$

التردد الزاوي هو $\omega=400$ ، ولذلك :

$$H(j400\pi) = \frac{2x10^6}{2x10^6-(400\pi)^2+j3000x400\pi} = 0.5272e^{-j1.46}$$

$$|Y|=|H(j400\pi)|x3=0.5272x3=1.582$$
$$\measuredangle Y=\measuredangle H(j400\pi)|+\pi/2=0.1112 \text{ radians}$$

(ج) إذا كانت $x(t)=8\cos(200\pi t)$ و $y(t)=A_y\cos(200\pi t+\theta_y)$ ، احسب $A_y$ و $\theta_y$.

باستخدام :

$A_y=|H(j200\pi)|A_x$ و $\theta_y=\measuredangle H(j200\pi)+\theta_x$ فإن :

$$A_x=0.8078x8=6.4625 \quad \text{و} \quad \theta_y=-0.8654+0=-0.8654 \text{ radians}$$

**مثال ٥,٥**

**الاستجابة الترددية لنظام مستمر زمنياً**

نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) =3x''(t)$$

احسب وارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لهذا النظام.

المعادلة التفاضلية العامة تكون على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$

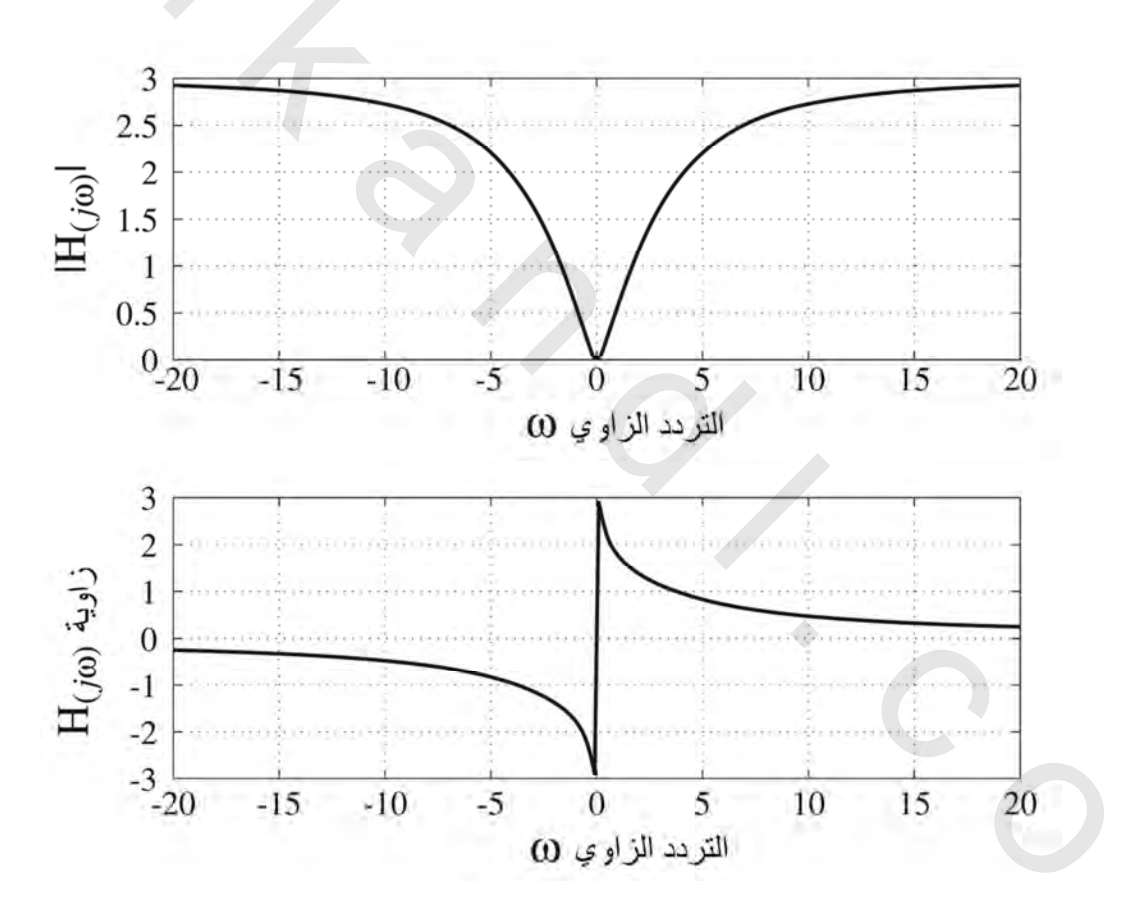
نجد أن $N=M=2$ و $a_2=1$ و $a_1=5$ و $a_0=2$ و $b_2=3$ و $b_1=0$ و $b_0=0$. ولذلك فإن دالة العبور له ستكون على الصورة :

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{3s^2}{s^2 + 5s + 2}$$

للحصول على الاستجابة الترددية نستبدل s بـ jω كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{3(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 2}$$

انظر شكل (٥,٢٧)




**شكل رقم (٥.٢٧) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية.**

شكل (٥,٢٧) تم رسمه باستخدام برنامج ماتلاب التالي :

```
ωmax = 20; % مقدار أكبر تردد زاوي للرسم
dw = 0.1 ; % المسافة بين الترددات في الرسم
w = [–wmax:dw:wmax]’; % متجه الترددات الزاوية في الرسم
% حساب الاستجابة الترددية
H = 3*(j*ω).^2./((j*ω).^2 j*5*ω 2);
% رسم والتعليق على الاستجابة الترددية
subplot(2,1,1); p = plot(ω, abs(H),‘k’); set(p,‘LineWidth’,2);
grid on ;
xlabel(‘Radian frequency, {\omega}’,‘FontSize’,18,‘FontName’,’Times’);
ylabel(‘|H({\itj}{\omega})|’,‘FontSize’,18,‘FontName’,‘Times’);
subplot(2,1,2); p = plot(ω,angle(H),‘k’); set(p,’LineWidth’,2);
grid on;
xlabel(‘Radian frequency, {\omega}’,‘FontSize’,18,‘FontName’,‘Times’);
ylabel(‘Phase of
 H({\itj}{\omega})’,‘FontSize’,18,‘FontName’,‘Times’);
```

## (٥,٣) الأزمنة المتقطعة

**استجابة النبضة**

تماماً كما كان الحال لأنظمة الزمن المستمر، فإن هناك طريقة التفاف لأزمنة الزمن المتقطع، وهي تسلك مسلكاً مكافئاً لنظيرتها في الأزمنة المستمرة. إنها تعتمد على معرفة استجابة النبضة للنظام، والتعامل مع إشارة الدخل كمجموع خطي من الصدمات وبعد ذلك يتم جمع الاستجابات لكل هذه الصدمات.

مهما كانت إشارة الدخل المتقطعة زمنياً معقدة، فإنها تكون تتابعاً من الصدمات. إذا استطعنا أن نحسب استجابة أي نظام LTI لوحدة نبضة تحدث عند n=0، فإنه يمكننا حساب الاستجابة لأي إشارة أخرى. لذلك فإن استخدام طريقة الالتفاف تبدأ بافتراض أن الاستجابة لوحدة النبضة التي تحدث عند n=0 قد تم حسابها فعلا، ولذلك سنسمي استجابة النبضة h[n].

لحساب استجابة النبضة للنظام، سنطبق وحدة النبضة δ[n] التي تحدث عند n=0 وستكون هي الإثارة الوحيدة للنظام. هذه النبضة تضع طاقة الإشارة في النظام وبعد ذلك تنتهي. بعد حقن طاقة النبضة في النظام فإنه يستجيب بإشارة تحدد بناء على خواص هذا النظام الديناميكية.

في حالة أنظمة الزمن المستمر، فإن التطبيق العملي الحقيقي للنبضة لتحديد استجابة النبضة كان يمثل مشكلة لأسباب عملية. ولكن في حالة أنظمة الأزمنة المتقطعة، فإن هذه الطريقة تكون أكثر معقولية، لأن النبضة في الزمن المتقطع تعتبر دالة حقيقية متقطعة زمنياً وهي في هذه الحالة بسيطة.

إذا كان لدينا وصف رياضي للنظام، فإنه يمكننا حساب استجابة النبضة له تحليلياً. سنفترض أولاً النظام الموصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\dots+a_Ny[n-N]=x[n] \qquad \text{المعادلة رقم (٥,١٧)}$$

ليست هذه أشهر صور المعادلات الفرقية التي تصف نظام LTI متقطع زمنياً ولكنها تعتبر مكاناً جيداً نبدأ منه لأنه من تحليل هذا النظام، يمكننا أن نستمر لإيجاد الاستجابات الصدمية لأنظمة أكثر عمومية. هذا النظام سببي وLTI. لإيجاد الاستجابة الصدمية، نفترض أن الإثارة x[n] هي وحدة نبضة عند n=0. وعلى ذلك يمكننا إعادة كتابة المعادلة (٥,١٧) في هذه الحالة الخاصة :

$$a_0h[n]+a_1h[n-1]+\dots+a_Nh[n-N]=\delta[n]$$

سنفترض أن النظام لم تتم إثارته بأي شيء قبل n=0، وأن الاستجابة h[n] ستكون صفراً لكل قيم t السالبة، بمعنى أن h[n]=0 لكل قيم n<0، وأن النظام في حالته الصفرية قبل n=0. لكل الأزمنة بعد n=0، فإن x[n] تكون صفراً أيضاً وسيكون حل المعادلة الفرقية هو الحل المتجانس. كل ما نحتاجه لإيجاد الحل المتجانس بعد n=0 هو عدد N من الشروط الابتدائية التي يمكننا استخدامها لتحقيق عدد N من الثوابت في هذا الحل المتجانس. نحتاج لشرط ابتدائي لكل درجة من درجات المعادلة الفرقية. يمكننا في العادة إيجاد هذه الشروط الابتدائية عن طريق التكرار. يمكن في العادة وضع المعادلة الفرقية لأي نظام سببي في صورة تكرارية تكون فيها الاستجابة تجميعاً خطياً للإثارة الحالية والاستجابات السابقة كما يلي :

$$h[n]=\frac{\delta[n]-a_1h[n-1]-,,,,-a_Nh[n-N]}{a_0}$$

وعلى ذلك يمكننا إيجاد حل متجانس صحيح محقق لكل قيم n≥0. هذا الحل، مع حقيقة أن h[n]=0 لكل قيم n<0 يكون الحل الكلي، وهو استجابة النبضة. إن تطبيق النبضة على أي نظام تحقق ببساطة بعض الشروط الابتدائية ويعود النظام بعدها لحالة الاستقرار السابقة (إذا كان النظام مستقراً).

سنفترض الآن نظاماً أكثر عمومية موصوفاً بالمعادلة الفرقية على الصورة :

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\dots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\dots+b_Mx[n-M]$$

أو

$$\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$$

حيث النظام مفترض أنه LTI، فإنه يمكننا إيجاد استجابة النبضة عن طريق إيجاد استاجابات النبضة لأنظمة موصوفة بالمعادلات الفرقية التالية :

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\dots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]$$
$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\dots+a_Ny[n-N]=b_1x[n-1]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{المعادلة رقم (٥,١٨)}$$
$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\dots+a_Ny[n-N]=b_Mx[n-M]$$

وبعد ذلك يتم تجميع كل هذه الاستجابات. حيث إن هذه المعادلات هي نفسها فيما عدا الشدة وزمن الحدوث لكل نبضة، فإن استجابة النبضة الكلية تكون ببساطة مجموع استجابات النبضة لهذه الأنظمة التي في المعادلة(٥.١٨)، محجمة ومؤخرة بطريقة مناسبة. لذلك فاستجابة النبضة للنظام العام ستكون على الصورة :

$$H[n]=b_0h_1[n]+b_1h_1[n-1]+\dots+b_Mh_1[n-M]$$

حيث $h_1[n]$ هي استجابة النبضة التي تم إيجادها من قبل.

**مثال ٥,٦**

**استجابة النبضة لنظام**

احسب استجابة النبضة لنظام موصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

$$8y[n]+6y[n-1]=x[n] \quad \text{المعادلة رقم (٥,١٩)}$$

إذا كانت الإثارة هي نبضة.

$$8h[n]+6h[n-1]=\delta[n]$$

هذه المعادلة تصف نظام سببياً، لذلك $h[n]=0$ لكل قيم $n<0$. يمكننا إيجادالاستجابة الأولية لوحدة النبضة عند $n=0$ من المعادلة (٥,١٩) :

| n | x[n] | h[n-1] | h[n] |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1/8 |

لكل قيم $n\geq 0$ يكون الحل متجانساً وعلى الصورة $K_h(-3/4)^n$. ولذلك فإن $h[n]=K_h(-3/4)^nu[n]$. بتطبيق الشروط الأولية نحصل على، $h[0]=1/8=K_h$. وعلى ذلك فاستجابة النبضة لهذا النظام ستكون على الصورة $h[n]=(1/8)(-3/4)^nu[n]$.

**مثال ٥,٧**

**استجابة النبضة لنظام**

أوجد استجابة النبضة $h[n]$ لنظام موصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

$$5y[n]+2y[n-1]-3y[n-2]=x[n] \quad \text{المعادلة رقم (٥.٢٠)}$$

هذه المعادلة تصف نظاماً سببياً، وعلى ذلك فإن $h[n]=0$ لكل قيم $n<0$. يمكننا إيجاد أول استجابتين لوحدة نبضة عند $n=0$ من المعادلة (٥,٢٠) :

| n | x[n] | h[n-1] | h[n] |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1/5 |
| 1 | 0 | 1/5 | -2/25 |

القيم المميزة هي 1- و 0.6. وعلى ذلك فإن استجابة النبضة ستكون $h[n]=(K_1(-1)^n+K_2(0.6)^n)u[n]$. الآن يمكن حساب الثوابت :

$$\left\{\begin{aligned} h[0] &= K_1 + K_2 &&= \frac{1}{5} \\ h[1] &= -K_1 + 0.6K_2 &&= -2/25 \end{aligned}\right\} \rightarrow K_1 = 0.125, K_2 = 0.075$$

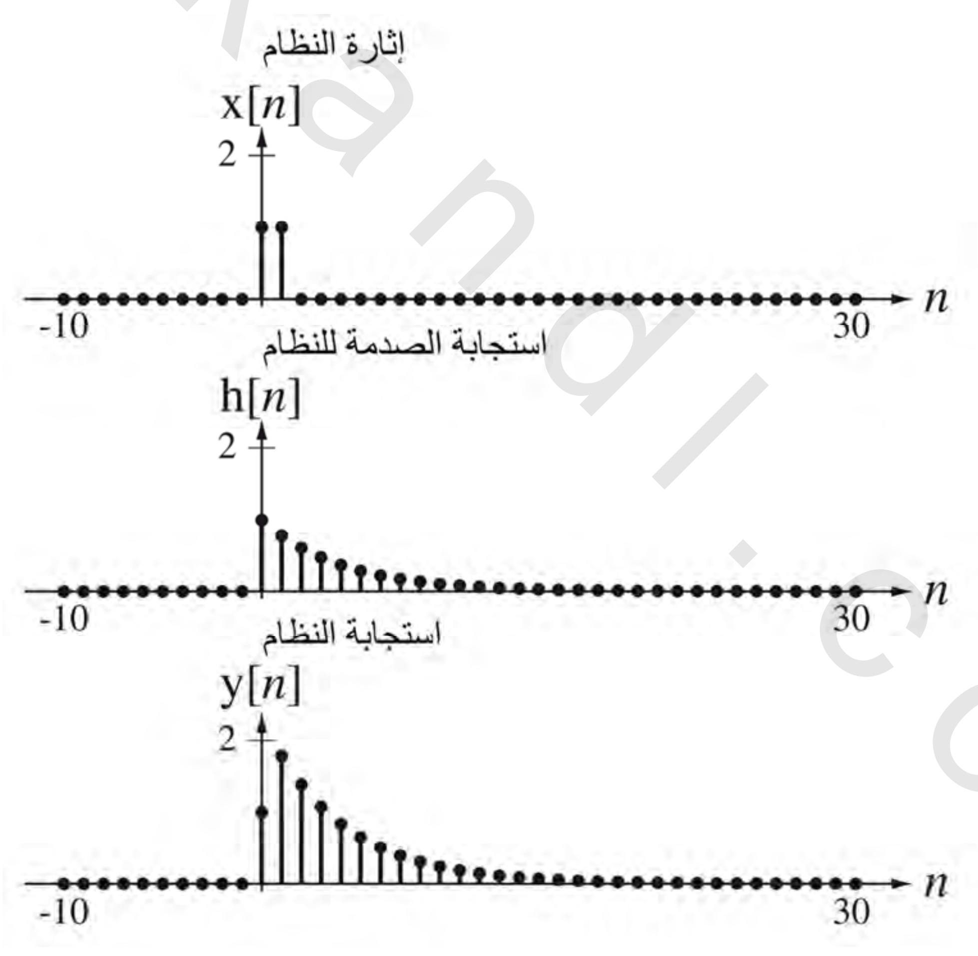
وستكون استجابة النبضة على الصورة :

$$h[n]=(0.125(-1)^n + 0.075(0.6)^n)u[n]$$

**الالتفاف في الزمن المتقطع**

**الاستنتاج**

لكى نوضح الالتفاف في الزمن المتقطع، سنفترض أن نظام LTI تمت إثارته بالإشارة $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$ وسنفترض أن استجابة النبضة لهذا النظام هي $h[n]=(0.7788)^n u[n]$ كما في شكل (٥،٢٨).




**شكل رقم (٥،٢٨) إثارة النظام x[n]،واستجابة النبضة للنظام h[n]، واستجابة النظام y[n].**

تتكون الإثارة لأي نظام متقطع زمنياً من تتابع من الصدمات التي لها شدة مختلفة وتحدث عند أزمنة مختلفة. ولذلك، فإنه باستدعاء خاصيتي الخطية والثبات الزمني، فإن استجابة النظام LTI ستكون مجموع كل الاستجابات المنفردة لهذه الصدمات المنفردة. وحيث أننا نعلم استجابة النظام لوحدة نبضة منفردة تحدث عند t=0، فإنه يمكننا إيجاد الاستجابات الأخرى عن طريق الإزاحة والتحجيم المناسبين لاستجابة وحدة النبضة.

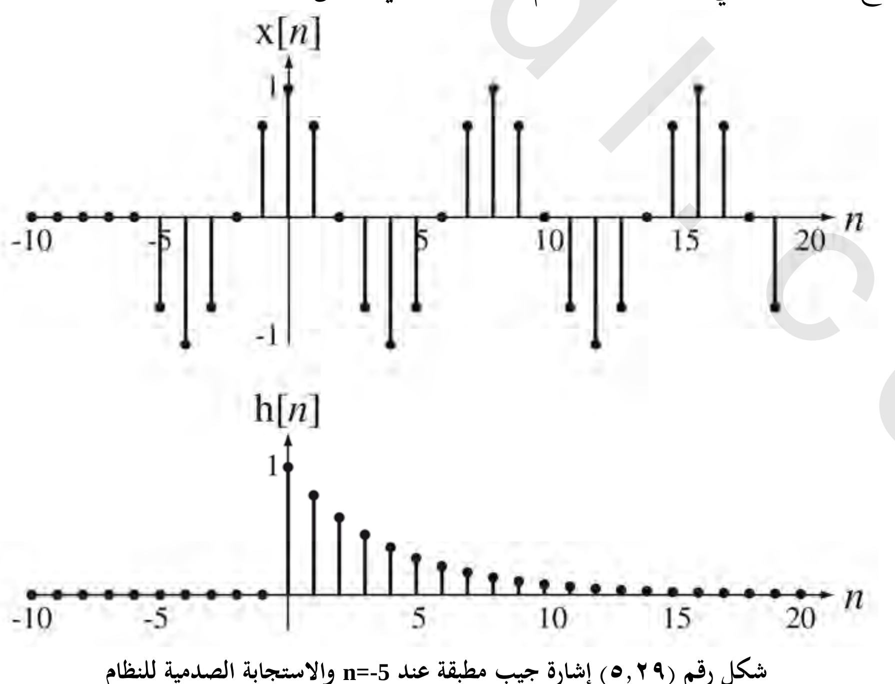
في المثال كانت أول نبضة لا تساوي الصفر تحدث عند n=0، وشدتها تساوي واحداً. لذلك فإن النظام سيستجيب لهذه النبضة باستجابته الصدمية الصحيحة. النبضة الثانية التي لا تساوي الصفر تحدث عند n=1 وشدتها تساوي واحداً أيضاً. لذلك فإن استجابة النظام لهذه النبضة ستكون هي استجابة النبضة مؤخرة بوحدة زمنية واحدة. ولذلك باستخدام خاصية التجميع والثبات الزمني للنظام ال LTI، فإن استجابة النظام للإثارة $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$ ستكون :

$$y[n]=(0.7788)^{n}u[n] + (0.7788)^{n-1}u[n-1]$$

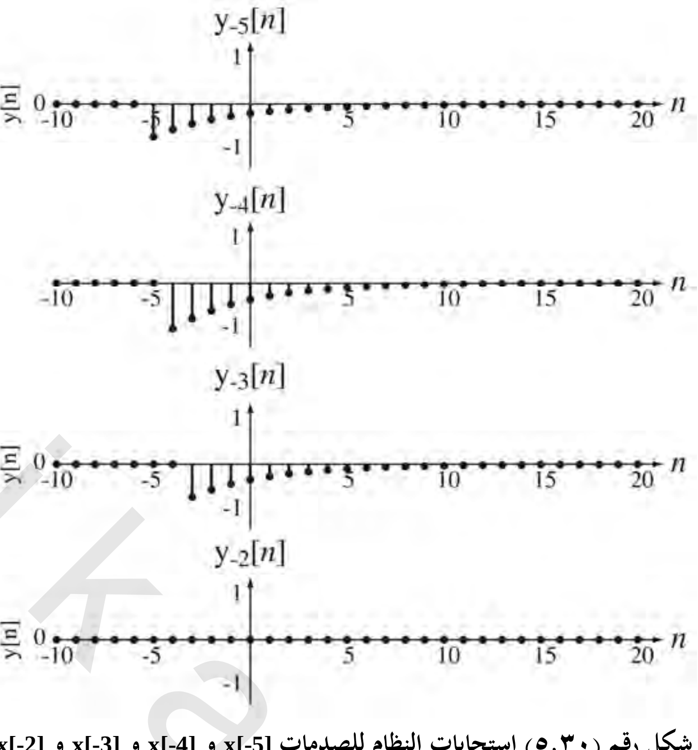
انظر شكل (٥,٢٨).

افترض الإثارة الآن هي $x[n]=2\delta[n]$. على ذلك، فحيث إن النظام هو نظام LTI والإثارة هي نبضة بشدة تساوي ٢ تحدث عند الزمن n=0، فإنه بخاصية تجانس النظام ال LTI فإن استجابة النظام ستكون ضعف استجابته الصدمية، بمعنى $y[n]=1(0.7788)^{n}u[n]$.

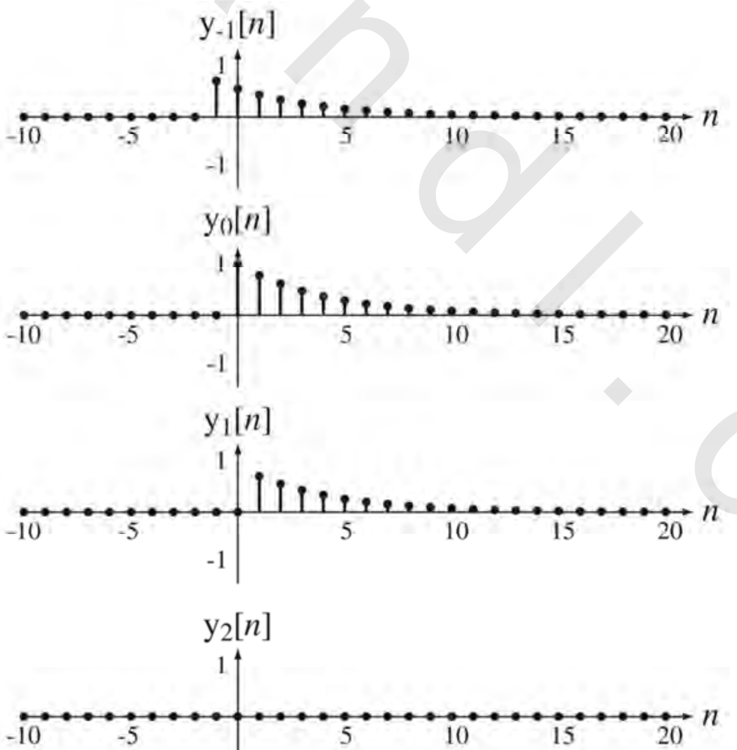
الآن افترض أن الإثارة ستكون كالموضحة في شكل (٥,٢٩) بينما تظل الاستجابة الصدمية للنظام كما هي. الاستجابة للأربع صدمات التي تبدأ عند n=-5 تم رسمها كما في شكل (٥,٣٠).




**شكل رقم (٥,٢٩) إشارة جيب مطبقة عند n=-5 والاستجابة الصدمية للنظام**



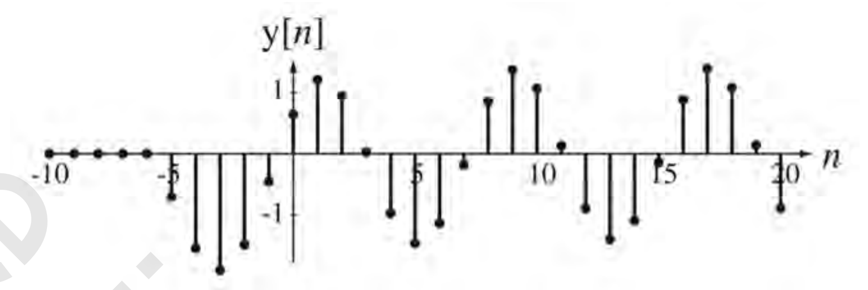

**شكل رقم (٥,٣٠) استجابات النظام للصدمات x[-5] و x[-4] و x[-3] و x[-2]**




**شكل رقم (٥,٣١) استجابات النظام للصدمات x[-1] و x[0] و x[1] و x[2]**

شكل (٥،٣١) يوضح الاستجابات للأربع صدمات التالية.

عندما نضيف كل الاستجابات لكل الصدمات سنحصل على الاستجابة الكلية للنظام لكل الإثارات المدخلة له كما في شكل (٥،٣٢).




**شكل رقم (٥،٣٢) الاستجابة الكلية للنظام**

لاحظ وجود الاستجابة العابرة الابتدائية، ولكن النظام يستقر على الشكل الجيبي بعد القليل من الوحدات الزمنية. الاستجابة المعززة لأي نظام LTI مستقر مثار بموجة جيبية يكون موجة جيبية أخرى بالتردد نفسه ولكنها تكون عموماً بمقدار مختلف وزاوية مختلفة.

لقد رأينا بيانياً ماذا حدث. الآن نريد أن نرى ماذا حدث تحليلياً. يمكن كتابة الاستجابة الكلية للنظام كما يلي :

$$y[n]= \ldots x[-1]h[n+1]+x[0]h[n]+x[1]h[n-1]+ \ldots.$$

أو

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$ المعادلة رقم (٥،٢١)

النتيجة في المعادلة (٥،٢١) تسمى الجمع الالتفافي لإيجاد استجابة النظام.

هذه المعادلة تقول في كلمات أن قيمة الاستجابة y عند أي زمن متقطع n يمكن حسابها عن طريق جمع كل حواصل ضرب الإثارة x عند الأزمنة المتقطعة m في الاستجابة h عند الأزمنة المتقطعة n-m لكل قيم m من سالب ما لانهاية حتى موجب ما لانهاية. معنى ذلك أنه لإيجاد استجابة النظام لأي إثارة اختيارية فسنحتاج فقط لمعرفة استجابة النظام الصدمية. بالنسبة لنظام LTI، تكون استجابة النبضة له وصف كامل لكيفية استجابته لأي إشارة اختيارية. وعلى ذلك يمكننا أن نتخيل أنه لاختبار أي نظام، فإننا نطبق عليه نبضة ونقوم بتسجيل استجابته لهذه النبضة. يمكننا بمجرد معرفة هذه الاستجابة حساب الاستجابة لأي إشارة اختيارية. إن هذه تعتبر طريقة في منتهى القوة. في تحليل الأنظمة علينا فقط أن نحل المعادلة الفرقية للنظام لأبسط إشارة دخل غير مساوية للصفر، وهي وحدة النبضة، وبعد ذلك يمكننا حساب الاستجابة لأي إشارة عامة باستخدام الالتفاف.

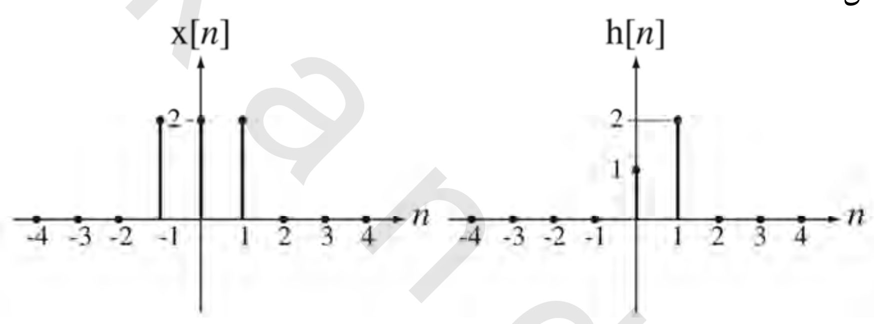
قارن التكامل الالتفافي للإشارات المستمرة زمنياً مع المجموع الالتفافي للإشارات المتقطعة زمنياً :

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \quad \text{و} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

في كل حالة يتم عكس إحدى الإشارتين وإزاحتها وبعد ذلك يتم ضربها في الإشارة الأخرى. في حالة الإشارات المستمرة زمنياً، يتم تكامل الضرب لإيجاد المساحة الكلية تحت حاصل الضرب. وفي حالة الإشارات المتقطعة زمنياً يتم تجميع حاصل الضرب لإيجاد القيمة الكلية لحاصل الضرب.

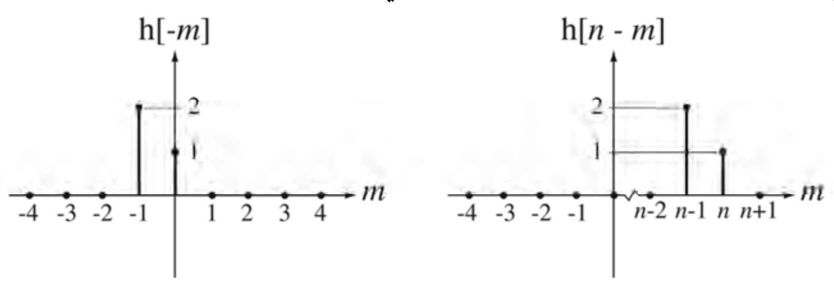
**أمثلة بيانية وأخرى رياضية على الالتفاف**

على الرغم من التحديد الكامل لعملية الالتفاف عن طريق المعادلة (٥،٢١)، فإنه من المفيد أن نستكشف بعض المفاهيم البيانية التي تساعد في إجراء عملية الالتفاف. الدالتان اللتان سيتم ضربهما تم تجميعهما على المدى $-\infty<m<\infty$ هما x[m] و h[n-m]. لتوضيح فكرة الالتفاف بيانياً سنفترض أن x[n] و h[n] سيكونان دوال بسيطة كالموضحة في شكل (٥،٣٣).




**شكل (٥،٣٣) إثنان من الدوال.**

حيث إن مؤشر الجمع في المعادلة (٥،٢١) هو m، فإن الدالة h[n-m] يجب اعتبارها كدالة في المتغير m بغرض إجراء التجميع في المعادلة (٥،٢١). من وجهة النظر هذه، يمكننا أن نتخيل أن الدالة h[n-m] يتم توليها عن طريق تحويلين، $m \to -m$، والذي يغير الدالة h[m] إلى الدالة h[-m]، وبعد ذلك $m \to m-n$، التي تغير الدالة h[-m] إلى h[-(m-n)]=h[n-m]. التحويل الأول $m \to -m$ يكون معكوس الدالة h[m] في الزمن المتقطع، والتحويل الثاني $m \to m-n$ يزيح الدالة التي تم عكسها بمقدار عدد n من الوحدات الزمني ناحية اليمين كما في شكل (٥،٣٤).




**شكل (٥،٣٤) الدالتان h[-m] و h[n-m] مع الزمن.**

الآن يمكننا أن نحصل على نتيجة الالتفاف كما يلي : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$، والعملية التي ترسم نتيجة الالتفاف y[n] مع n هي بأن نقوم بفرض قيمة n ونقوم بإجراء العملية : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$ لهذه القيمة n ثم نرسم النتيجة العددية الوحيدة y[n] عند هذه القيمة n، ثم نكرر العملية نفسها لكل قيمة ـ n. في كل مرة نختار قيمة جديدة n فإن الدالة h[n.m] يتم إزاحتها للموضع الجديد، و x[m] تظل في موضعها نفسه لأنه لا توجد n في x[m] ويكون المجموع $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$ هو ببساطة مجموع حواصل الضرب x[m] و h[n-m] لهذه القيم المختارة n. شكل (٥,٣٥) يوضح هذه العملية.

لكل قيم n غير الممثلة في شكل (٥,٣٥)، تكون y[n]=0، ولذلك يمكننا الآن رسم y[n] كما هو موضح في شكل (٥,٣٦).

من الشائع جداً في التدريبات الهندسية أن تكون كل من الإشارتين اللتين ستجرى عليهما عملية الالتفاف أن تكونا صفراً قبل زمن محدد. افترض أن x تساوي صفراً قبل $n=n_x$ وأن h تساوي صفراً قبل $n=n_h$، المجموع الالتفافي سيكون :

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

وحيث إن x تساوي صفراً قبل $n=n_x$ فإن كل عناصر المجموع لقيم $m<n_x$ ستكون أصفارا ويمكننا كتابة ما يلي :

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=n_x}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

أيضاً، عندما $n-m<n_h$ فإن كل عناصر الـ h ستكون أصفاراً، وهذا سيضع حداً أعلى للـ m وهو $n-n_h$، ويمكننا كتابة ما يلي :

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=n_x}^{n-n_h} x[m]h[n-m]$$

لقيم n التي تحقق $n-n_h<n_x$، فإن حد الجمع الأدنى يكون أكبر من حد الجمع الأعلى وستكون نتيجة الالتفاف تساوي صفراً. ولذلك فإنه يكون أكثر دقة أن نقول إن نتيجة الالتفاف ستكون على الصورة :

$$x[n] * h[n] = \begin{cases} \sum_{m=n_x}^{n-n_h} x[m]h[n-m], & n-n_h \geq n_x \\ 0 & n-n_h < n_x \end{cases}$$

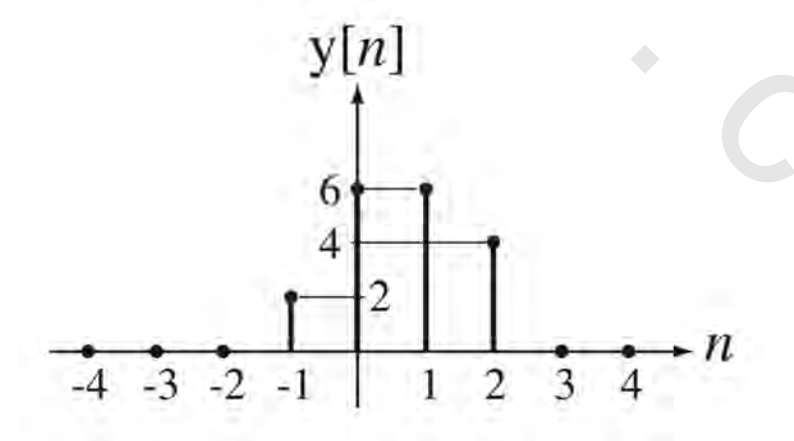
$n = -1$: x[m], h[-1 - m], x[m]h[-1 - m], y[-1] = 2

$n = 0$: x[m], h[0 - m], x[m]h[0 - m], y[0] = 6

$n = 1$: x[m], h[1 - m], x[m]h[1 - m], y[1] = 6

$n = 2$: x[m], h[2 - m], x[m]h[2 - m], y[2] = 4

**شكل رقم (٥,٣٥) y[n] لقيم n تساوي 1- و 0 و 1 و 2.**




**شكل رقم (٥,٣٦) شكل يوضح y[n].**

**مثال ٥,٨**

**استجابة مرشح المتوسط المتحرك الرقمي**

مرشح المتوسط المتحرك الرقمي له الاستجابة الصدمية على الصورة التالية :

h[n]=(u[n]-u[n-N])/N

احسب استجابة هذا المرشح عندما N=8 و x[n]=cos(2πn/16). بعد ذلك غير الإثارة إلى x[n]=cos(2πn/8) واحسب الاستجابة الجديدة.

باستخدام الالتفاف ستكون الاستجابة كما يلي :

y[n]=x[n]*h[n]=cos(2πn/16)*(u[n]-u[n-8])/8

بتطبيق تعريف المجموع الالتفافي :

$$y[n]=\frac{1}{8}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos(\frac{2\pi m}{16})(u[n-m]-u[n-m-8])$$

تأثير دالتي وحدة الخطوة هو للحد من مدى الجمع في المعادلة السابقة ليصبح على الصورة :

$$y[n]=\frac{1}{8}\sum_{m=n-7}^{n}\cos(\frac{2\pi m}{16})$$

باستخدام الدالة المثلثية $\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة :

$$y[n]=\frac{1}{16}\sum_{m=n-7}^{n}\left(e^{j2\pi m/16}+e^{-j2\pi m/16}\right)$$

بوضع q=m-n+7 يمكن كتابة :

$$y[n]=\frac{1}{16}\sum_{q=0}^{7}\left(e^{j2\pi(q+n-7)/16}+e^{-j2\pi(q+n-7)/16}\right)$$

$$y[n]=\frac{1}{16}\left(e^{j2\pi(n-7)/16}\sum_{q=0}^{7}e^{j2\pi q/16}+e^{-j2\pi(n-7)/16}\sum_{q=0}^{7}e^{-j2\pi q/16}\right)$$

مجموع المتوالية الهندسية ذات الـ N من العناصر تعطي بالمعادلة :

$$\sum_{n=0}^{N-1}r^n=\begin{cases}N, & r=1\\ \frac{1-r^N}{1-r}, & r\neq 1\end{cases}$$

هذه المعادلة تعمل مع أي قيمة مركبة لـ r. ولذلك، بتجميع هذه المتواليات الهندسية التي طول كل منها ٨ نحصل على :

$$y[n]=\frac{1}{16}\left(e^{j\pi(n-7)/8}\frac{\overbrace{1-e^{j\pi}}^{=2}}{1-e^{j\pi/8}}-e^{-j\pi(n-7)/8}\frac{\overbrace{1-e^{j\pi}}^{=2}}{1-e^{-j\pi/8}}\right)$$

بتبسيط هذه المعادلة :

$$y[n]=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{j\pi(n-7)/8}}{1-e^{j\pi/8}}+\frac{e^{-j\pi(n-7)/8}}{1-e^{-j\pi/8}}\right)=\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\frac{\pi(n-7)}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi(n-8)}{8}\right)}{1-\cos(\frac{\pi}{8})}$$

بعد ذلك باستخدام دورية جيب التمام ، فإن $\cos(\pi(n-8)/8)=\cos(\pi n/8)$ نحصل على :

$$y[n]=1.6421[\cos(\pi(n-7)/8)+\cos(\pi n/8)]$$

الآن بوضع $x[n]=\cos(2\pi n/8)$ ، فإن العملية ستكون أساساً كما هي ، فيما عدا دورة جيب التمام. ستكون النتيجة كما يلي :

$$y[n]=x[n]*h[n]=\cos(2\pi n/8)*(u[n]-u[n-8])/8$$

$$y[n]=\frac{1}{16}\sum_{m=n-7}^{n}\left(e^{j2\pi m/8}+e^{-j2\pi m/8}\right)$$

$$y[n]=\frac{1}{16}\left(e^{j2\pi(n-7)/8}\sum_{q=0}^{7}e^{j2\pi q/8}+e^{-j2\pi(n-7)/8}\sum_{q=0}^{7}e^{-j2\pi q/8}\right)$$

$$y[n]=\frac{1}{16}\left(e^{j\pi(n-7)/4}\frac{1-e^{j2\pi}}{1-e^{j2\pi/8}}+e^{-j\pi(n-7)/4}\ \frac{1-e^{-j2\pi}}{1-e^{-j2\pi/8}}\right)=0$$

لأن $e^{j2\pi}=e^{-j2\pi}=1$.

إذا كان زمن حساب المتوسط في مرشح المتوسط المتحرك يساوي تماماً رقماً صحيحاً من دورة الجيب ، فإن الاستجابة ستكون صفراً لأن القيمة المتوسطة لأي جيب على أي عدد صحيح من الدورات تكون صفراً ، وإلا فإن الاستجابة لا تساوي الصفر في أي حالة أخرى.

**خواص الالتفاف**

يتم التعبير عن الالتفاف في الأزمنة المتقطعة ، مثله في ذلك مثل الأزمنة المستمرة ، بالعلامة * كما يلي :

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]$$ المعادلة رقم (٥,٢٢)

خواص الالتفاف في الالتفاف في الأزمنة المتقطعة مشابهة تماماً لخواصة في الأزمنة المستمرة :

$$\boxed{x[n]*A\delta[n-n_0]=Ax[n-n_0]}$$ المعادلة رقم (٥,٢٣)

$$\boxed{y[n-n_0]=x[n]*h[n-n_0]=x[n-n_0]h[n]}$$ المعادلة رقم (٥,٢٤)

خواص التبادلية، والارتباطية، والتوزيعية، والفرق، والمجموع، للمجموع الالتفافي كلها مثبتة في ملحق الويب ج وتم تلخيصها فيما يلي :

| | |
|---|---|
| خاصية التبادلية | x[n]*y[n]=y[n]x[n] |
| خاصية الارتباطية | (x[n]*y[n])*z[n]=x[n]*(y[n]*z[n]) |
| خاصية التوزيع | (x[n]+y[n])*z[n]=x[n]*z[n]+y[n]*z[n] |
| إذا كانت y[n]=x[n]*h[n] فإن : | |
| خاصية الفرق | y[n]-y[n-1]=x[n]*(h[n]-h[n-1]) |
| خاصية المجموع | مجموع y = (مجموع x) × (مجموع h) |
| لكي يتقارب المجموع الالتفافي، فإن كل من الإشارتين اللتين يتم إجراء الالتفاف عليهما يجب أن تكونا محدودتين وعلى الأقل تكون واحدة منهما لها مجموع تام ومحدود. | |

**الالتفاف العددي**

**الالتفاف العددي في الزمن المتقطع** : ماتلاب به الأمر conv الذي يقوم بحساب المجموع الالتفافي. الصورة العامة لهذا الأمر هي y=conv(x,h)، حيث كل من x و h هما متجهان من القيم من الإشارتين المتقطعتين زمنياً، و y هي متجه يحتوي قيم التفاف الإشارتين x و h. بالطبع فإن ماتلاب لا يمكنه حساب مجموع لا نهائي كما هو موضح بالمعادلة (٥,٢٢). يمكن فقط لماتلاب أن يحسب التفاف الإشارات المحددة زمنياً، ويجب أن يحتوي المتجهين x و h كل القيم غير الصفرية للإشارات التي تمثلها. (يمكن أيضاً أن تحتوي أصفاراً زائدة إذا ما طلب ذلك). إذا كان زمن العنصر الأول في الإشارة x هو $n_{x0}$ وزمن أول عنصر في الإشارة h هو $n_{h0}$، فإن زمن أول عنصر في y سيكون $n_{x0}+n_{h0}$.

إذا كان زمن آخر عنصر في x هو $n_{xl}$، وزمن آخر عنصر في h هو $n_{hl}$، فإن زمن آخر عنصر في y سيكون $n_{xl}+n_{hl}$. سنفترض طول الإشارة x هو $n_{xl}-n_{x0}+1$ وطول الإشارة h هو $n_{hl}-n_{h0}+1$. وعلى ذلك فإن y ستمتد في المدى $n_{x0}+n_{h0}\le n\le n_{xl}+n_{hl}$ وسيكون طولها هو :

$$n_{xl}+n_{hl}-(n_{x0}+n_{h0})+1=\underbrace{n_{xl}-n_{x0}}_{\text{طول } x}+1+\underbrace{n_{hl}-n_{h0}}_{\text{طول h}}+1-1$$

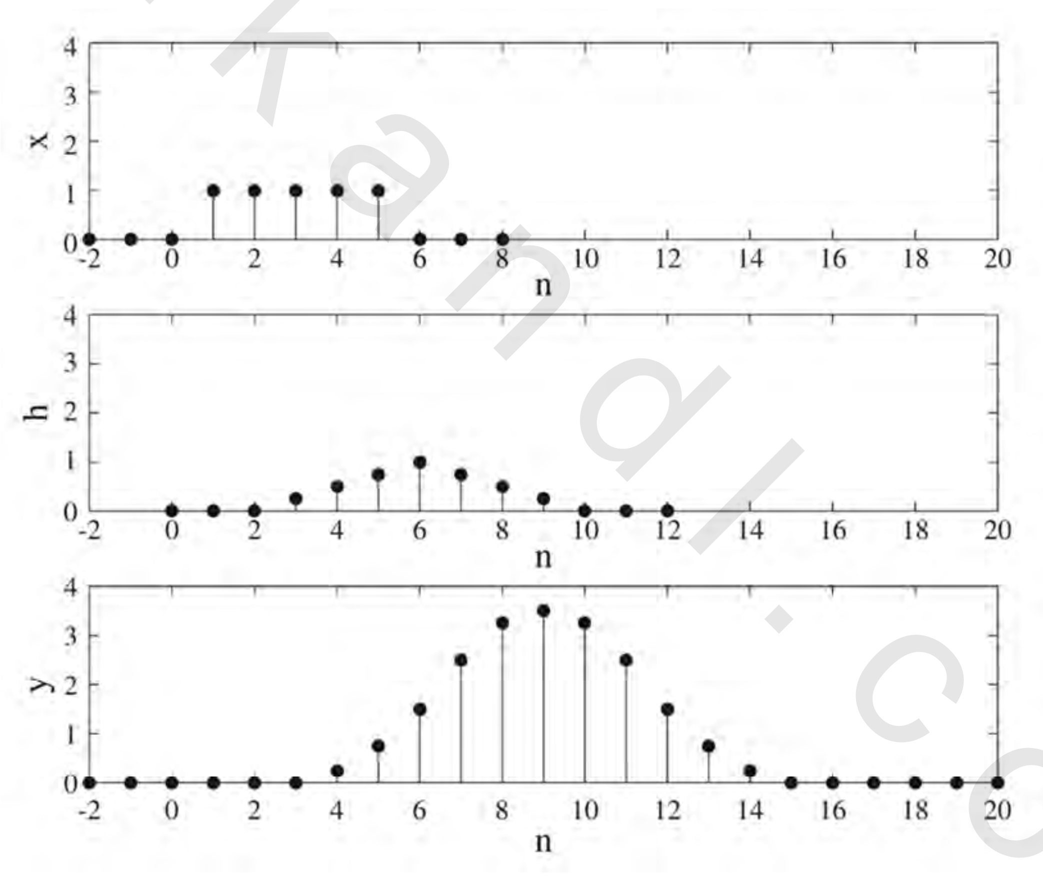
وعلى ذلك فإن طول y يساوي مجموع طولي كل من x و h ناقص واحد.

**مثال ٥,٩**

**حساب المجموع الالتفافي باستخدام ماتلاب**

لنفترض أن x[n]=u[n-1]-u[n-6] و h[n]=tri((n-6)/4). احسب المجموع الالتفافي x[n]*h[n] باستخدام الدالة conv في ماتلاب.

الإشارة x[n] محدودة في المدى $1\le n\le 5$ و h[n] محدودة في المدى $3\le n\le 9$. وعلى ذلك فإن أي متجه يصف x[n] يجب أن يكون طوله ٥ عناصر على الأقل، وأي متجه يصف h[n] يجب أن يكون طوله ٧ عناصر على الأقل. دعنا نضع بعض الأصفار الإضافية، ونحسب الالتفاف ونرسم الإشارتين والتفافهما باستخدام برنامج ماتلاب الذي تم توضيح خرجه كما في شكل (٥,٣٧).




**شكل رقم (٥,٣٧) الإثارة، واستجابة النبضة، والاستجابة للنظام باستخدام الدالة conv في ماتلاب.**

```
nx = -2:8 ; nh = 0:12; % x, h وضع المتجهين
x = usD(n-1) - usD(n-6); % x حساب قيمة المتجه
h = tri((nh-6)/4); % h حساب قيمة المتجه
y = conv(x,h); % حساب قيمة التفاف المتجهين
%
% وضع قيمة المتجه y المتقطع زمنياً
%
ny = (nx(1) nh(1)) (0:(length(nx) length(nh) - 2)) ;
%
% رسم النتيجة
%
subplot(3,1,1) ; stem(nx,x,'k','fi lled');
xlabel('n') ; ylabel('x'); axis([-2,20,0,4]);
subplot(3,1,2) ; stem(nh,h,'k','fi lled') ;
xlabel('n') ; ylabel('h'); axis([-2,20,0,4]);
subplot(3,1,3) ; stem(ny,y,'k','fi lled');
xlabel('n') ; ylabel('y'); axis([-2,20,0,4]);
```

**الالتفاف العددي المستمر زمنياً**

عند هذه النقطة يظهر سؤال طبيعي ، حيث إنه لا توجد دالة في ماتلاب تقوم بإجراء التكامل الالتفافي ، هل يمكننا إجراء التكامل الالتفافي باستخدام بالستخدام الدالة conv ؟ الإجابة القصيرة، أو المباشرة هي لا. ولكن إذا كان من الممكن أن نقبل بعض التقريب (والمهندسون عادة يمكنهم ذلك)، فإن الإجابة الأطول ستكون نعم تقريباً. يمكننا أن نبدأ بالتكامل الالتفافي كما يلي :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بتقريب كل من x(t) و h(t) بتتابع من المستطيلات التي عرضها (الزمني) هو Ts :

$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)rect\left(\frac{t-nTs-Ts/2}{Ts}\right)$$

و :

$$h(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nTs)rect\left(\frac{t-nTs-Ts/2}{Ts}\right)$$

وعلى ذلك فهذا التكامل يمكن تقريبه عند النقاط الزمنية المتقطعة كما يلي :

$$y(nTs) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mTs)h(n-m)Ts)Ts$$

وذلك يمكن التعبير عنه كمجموع التفافي كما يلي :

$$y(nTs) = Ts\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = T_s x[n] * h[n]$$ المعادلة رقم (٥،٢٥)

حيث x[n]=x(nTs) و h[n]=h(nTs)، ويمكن تقريب التكامل الالتفافي بمجموع التفافي تحت الشروط نفسها كما هو الحال في الدالة conv لإجراء الالتفاف. لكي يتقارب التكامل الالتفافي، فإن x(t) أو h(t) أو كليهما يجب أن تكون إشارة طاقة. بفرض أن x(t) كانت لا تساوي الصفر في الفترة المحدودة $n_{x0} \le t \le n_{xl}Ts$، و h(t) أيضاً لا تساوي الصفر في الفترة $n_{h0} \le t \le n_{hl}Ts$، فإن y(t) ستكون غير مساوية للصفر في الفترة $(n_{x0}+n_{h0})Ts \le n < (n_{xl}+n_{hl})Ts$ وقيم $T_s x[n]*h[n]$ يمكن إيجادها باستخدام الدالة conv ستغطي هذا المدى. للحصول على تقريب جيد لنتائج الالتفاف فإن Ts يجب اختيارها بحيث إن الدالتين x(t) و h(t) لن تتغيرا كثيرا في هذه الفترة.

**مثال ٥.١٠**

**رسم التفاف إشارتين مستمرتين زمنياً باستخدام الدالة conv في ماتلاب**

ارسم الالتفاف y(t)=tri(t)*tri(t).

على الرغم من أن هذا الالتفاف يمكن إجراؤه تحليليا، إلا أنه سيكون مملاً، لذلك فإنه مرشح جيد للالتفاف التقريبي باستخدام الطرق العددية، وبالتحديد الدالة conv في ماتلاب. ميل هاتين الدالتين يكون إما سالباً، أو موجباً. للحصول على تقريب دقيق بدرجة معقولة، فإننا سنختار الزمن بين هذه العينات ليكون 0.01 ثانية، مما يعني أن الدالة لن تغير قيمتها بأكثر من 0.01 بين أي عينتين متجاورتين. على ذلك من المعادلة (٥،٢٥) يمكننا كتابة ما يلي :

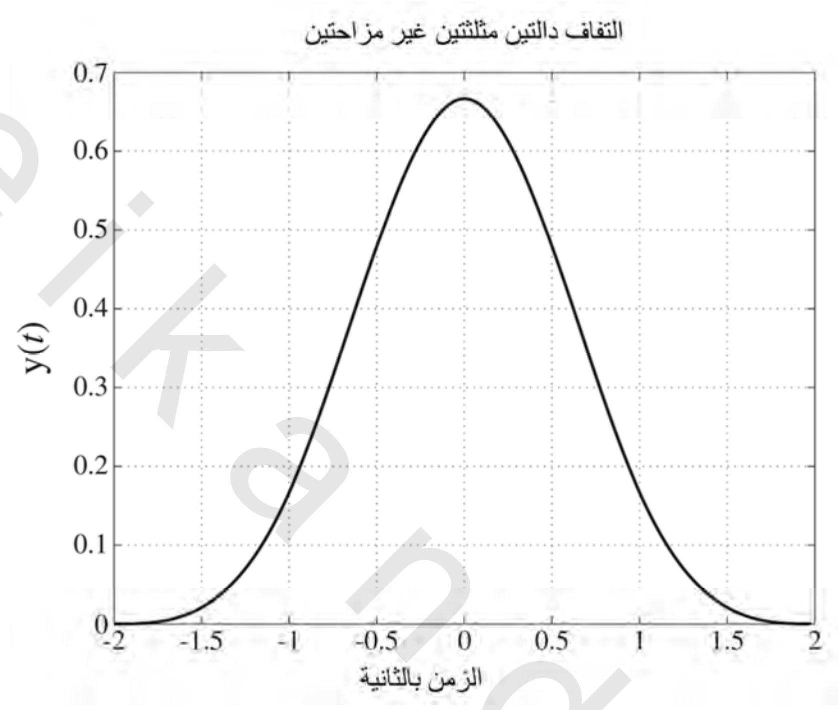
$$y(0.01n) \cong 0.01 \sum_{m=-\infty}^{\infty} tri(0.01m)tri(0.01(n-m))$$

الحدود على الأجزاء التي لا تساوي الصفر لهاتين الدالتين هي $-1 \le t < 1$، التي يتم ترجمتها إلى حدود على الإشارات المقابلة المتقطعة زمنياً إلى $-100 \le n < 100$. برنامج ماتلاب الذي سيجري هذا التقريب سيكون كما يلي :

```
% برنامج لإجراء التقريب المتقطع زمنياً للالتفاف دالتين مثاثتين
% حساب الالتفاف
Ts = 0.01; % الزمن بين العينات
nx = [-100:99]' ; nh _ nx ; % المتجهان المقطعان زمنياً للإشارتين
x = tri(nx*Ts) ; h = tri(nh*Ts) ; % توليد الإشارتين
ny = [nx(1)nh(1):nx(end)nh(end)]'; % المتجه المتقطع للنتيجة
y = Ts*conv(x,h) ; % إجراء الالتفاف
% الرسم والتعليق
```

```
p = plot(ny*Ts,y,'k') ; set(p,'LineWidth',2); grid on ;
xlabel('Time, {\itt} (s)','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('y({\itt})','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Convolution of Two Unshifted Unit Triangle Functions',...
'FontName','Times','FontSize',18);
set(gca,'FontName','Times','FontSize',14);
```

انظر الرسم الموضح في شكل (٥,٣٨).




**شكل (٥,٣٨) تقريب الالتفاف المستمر زمنياً باستخدام الطرق العددية.**

هذه النتائج البيانية تتوافق بدرجة كبيرة مع الحل التحليلي التالي :

$$y(t) = (1/6)\begin{bmatrix}(t+2)^3u(t+2) - 4(t+2)^3u(t+1) + 6t^3u(t)\\ -4(t-1)^3u(t-1) + (t-2)^3u(t-2)\end{bmatrix}$$

**الاستقرار ودالة النبضة**

لقد تم تحديد الاستقرار على وجه العموم في الفصل ٤ عن طريق القول بأن النظام المستقر يعطي إشارة خرج محددة عند إثارته بأي إشارة دخل محددة. يمكننا الآن أن نجد طريقة لتحديد إذا كان نظاماً ما مستقراً أم لا ، عن طريق فحص استجابته الصدمية. إن التفاف أي إشارتين يتقارب إذا كانت كل من الإشارتين محددة وعلى الأقل واحدة منهما يكون لها مجموع محدد. استجابة أي نظام y[n] للإشارة x[n] هي y[n]=x[n]*h[n]. إذا كانت x[n] محددة فإن y[n] ستكون محددة إذا كانت h[n] لها مجموع محدد (وبالتالي فإنها تكون محددة). بمعنى آخر إذا كان $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$ محدداً.

يكون أي نظام مستقراً BIBO إذا كانت استجابته الصدمية لها مجموع محدد.

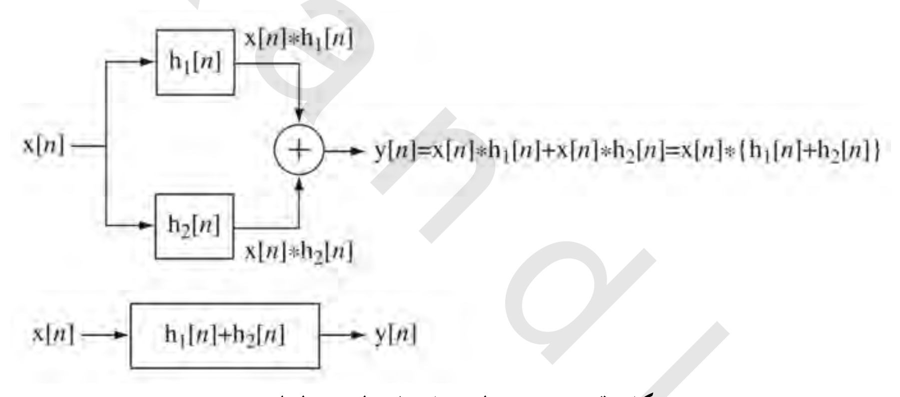
**توصيلات الأنظمة**

هناك اثنان من التوصيلات الشائعة بين الأنظمة وهي التوصيل على التوالي والتوصيل على التوازي كما هو مبين في شكل(٥,٣٩) وشكل (٥,٤٠).

$x[n] \rightarrow h_1[n] \rightarrow x[n]*h_1[n] \rightarrow h_2[n] \rightarrow y[n]=\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$

$x[n] \rightarrow h_1[n]*h_2[n] \rightarrow y[n]$

**شكل رقم (٥,٣٩) التوصيل على التوالي لنظامين.**




**شكل رقم (٥,٤٠) التوصيل على التوازي لنظامين.**

باستخدام خاصية الترابط للالتفاف يمكننا أن نبين أن التوصيل على التوالي لنظامين يمكن اعتباره كنظام واحد له استجابة نبضة تساوي التفاف استجابتي النبضة لكل من النظامين. باستخدام خاصية التوزيع للالتفاف يمكننا أن نبين أن التوصيل المتوازي لنظامين يمكن اعتباره كنظام واحد له استجابة نبضة تساوي مجموع استجابتي النبضة لكل من النظامين.

**استجابة وحدة الخطوة واستجابة النبضة**

استجابة أي نظام LTI تساوي التفاف الإثارة لهذا النظام مع استجابة النبضة له :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

افترض أن الإثارة ستكون تتابع وحدة وسنفترض أن الاستجابة لوحدة التتابع سنرمز لها بالرمز $h_{-1}[n]$، وبالتالي يمكننا كتابة :

$$h_{-1}[n] = u[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[n-m]$$

بفرض q=n-m، بالتالي فإن :

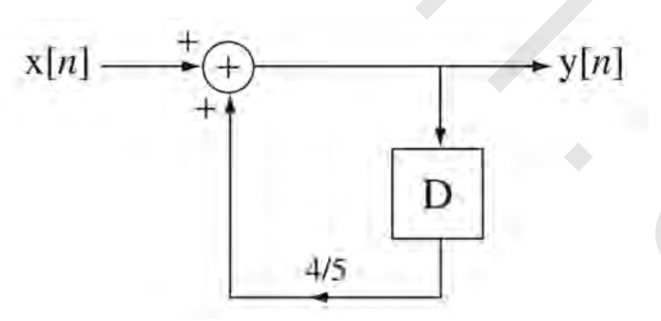
$$h_1[n] = \sum_{q=n}^{-\infty} h[q] = \sum_{q=-\infty}^{n} h[q]$$

وعلى ذلك فاستجابة أي نظام LTI متقطع زمنياً مثار بوحدة تتابع تساوي تراكم استجابته الصدمية. تماما مثلما أن وحدة التتابع تساوي تراكم استجابة النبضة، فإن الاستجابة لوحدة التتابع تساوي تراكم استجابة النبضة لهذا النظام. الرمز الجانبي في $h_{-1}[n]$ توضح عدد الفروق. في هذه الحالة يوجد 1- فرق، أو بمعنى آخر يوجد تراكم في الانتقال من استجابة النبضة إلى استجابة وحدة التتابع. هذه النتيجة تكون محققة لأي إثارة. إذا تغيرت أي إثارة إلى التراكم الخاص بها، فإن الاستجابة أيضاً تتغير إلى التراكم لهذه الإشارة، وإذا تغيرت الإثارة للفرق العكسي الأول، فإن الاستجابة تتغير أيضاً للفرق العكسي الأول لها.

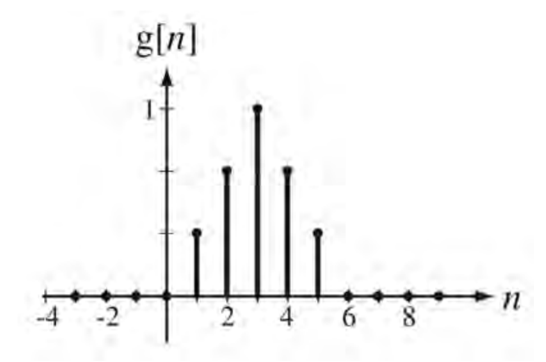
**مثال ٥,١١**

**حساب استجابة نظام باستخدام الالتفاف**

أوجد الاستجابة للنظام الموضح في شكل (٥,٤١) للإثارة الموضحة في شكل (٥,٤٢).




**شكل رقم (٥,٤١) النظام المطلوب إيجاد استجابته.**




**شكل رقم (٥,٤٢) الإثارة لهذا النظام.**

نريد أولاً أن نوجد استجابة النبضة لهذا النظام. يمكننا إيجادها باستخدام الطرق التي تم تقديمها مسبقاً، ولكن في هذه الحالة حيث إننا أوجدنا استجابتها لوحدة التتابع كالتالي : $h_{-1}[n]=[5-4(4/5)^n]u[n]$ (انظر الفصل ٤ الجزء الخاص بخواص الأنظمة المقطعة زمنياً)، فإننا نستطيع إيجاد استجابة النبضة على أنها الفرق العكسي الأول لاستجابة وحدة الخطوة كالتالي : $h[n]=h_{-1}[n]-h_{-1}[n-1]$، بتجميع المعادلات نحصل على :

$$h[n]= [5-4(4/5)^n]u[n]- [5-4(4/5)^{n-1}]u[n-1]$$

$$h[n]= \underbrace{5(u[n]-u[n-1])}_{=\delta[n]} -4(4/5)^{n-1}[(4/5)u[n]-u[n-1]]$$

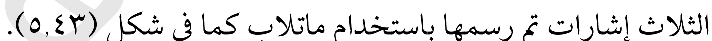
$$h[n]= \underbrace{5\delta[n]-4(4/5)n\delta[n]}_{=\delta[n]} + (4/5)nu[n-1]$$

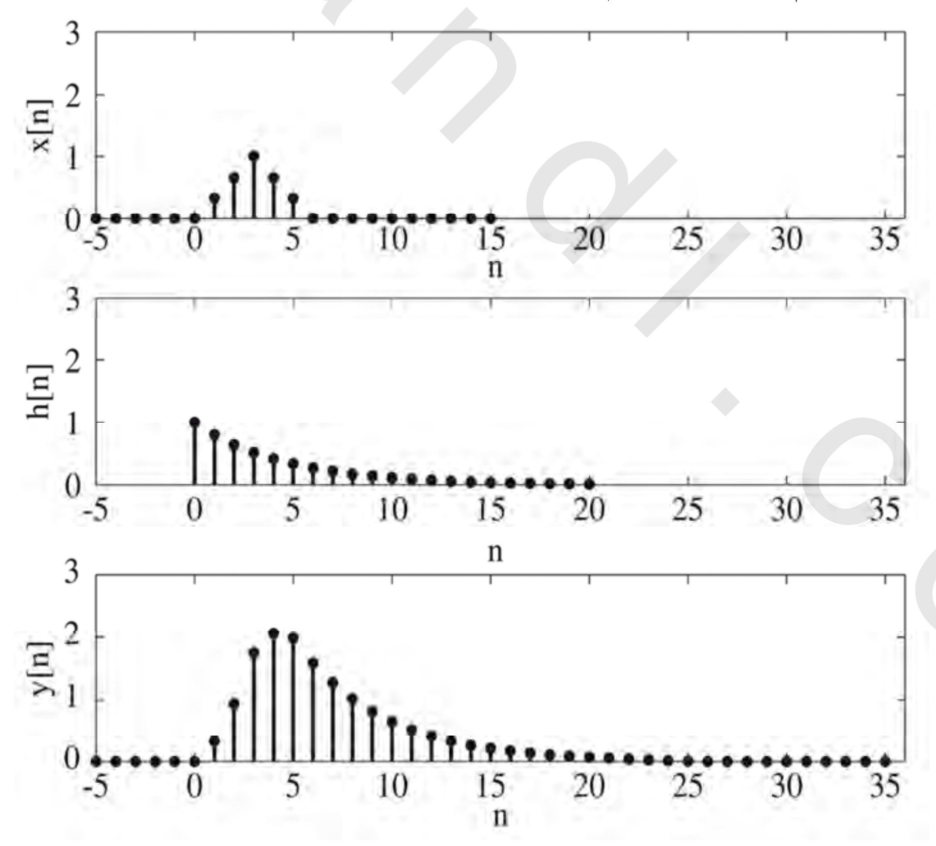
$$h[n]=(4/5)^n u[n]$$

الآن كل ما يبقى هو إجراء عملية الالتفاف. يمكننا عمل ذلك باستخدام برنامج ماتلاب التالي :

```
% برنامج للتحقق من الالتفاف في الزمن المتقطع
nx = -5:15 ; % وضع متجه الإثارة المتقطع زمنياً
x = tri((n-3)/3; % توليد متجه إشارة الإثارة
nh = 0:20 ; % وضع متجه استجابة النبضة المتقطع
% توليد متجه استجابة النبضة
h = ((4/5).^nh).*usD(nh);
% حساب أزمنة البداية والنهاية للنظام
% متجه الاستجابة من متجهي الإثارة واستجابة النبضة
nymin = nx(1), nh(1); nymax = nx(length(nx)), length(nh);
ny = nymin:nymax-1;
```

```
توليد متجه الاستجابة عن طريق التفاف الإثارة واستجابة النبضة %
y = conv(x,h);
رسم الإثارة واستجابة النبضة واستجابة النظام كلهم على المحور الزمني للمقارنة نفسi %
رسم الإثارة %
subplot(3,1,1); p = stem(nx,x,‘k’,’fi lled’);
set(p,’LineWidth’,2,‘MarkerSize’,4);
axis([nymin,nymax,0,3]);
xlabel(‘n’); ylabel(‘x[n]’);
رسم استجابة النبضة %
subplot(3,1,2); p = stem(nh,h,‘k’,‘fi lled’);
set(p,’LineWidth’,2,‘MarkerSize’,4);
axis([nymin,nymax,0,3]);
xlabel(‘n’); ylabel(‘h[n]’);
رسم استجابة النظام %
subplot(3,1,3); p _ stem(ny,y,‘k’,‘fi lled’);
set(p,‘LineWidth’,2,‘MarkerSize’,4);
axis([nymin,nymax,0,3]);
xlabel(‘n’); ylabel(‘y[n]’);
```


الثلاث إشارات تم رسمها باستخدام ماتلاب كما في شكل (٥,٤٣).




شكل رقم (٥,٤٣) الإثارة، واستجابة النبضة، واستجابة النبضة للنظام.

**الإثارة الأسية المركبة ودالة العبور**

في التدريبات الهنسية يكون الوصف الأكثر شيوعاً للأنظمة المتقطعة زمنياً هو المعادلة الفرقية، أو معادلة النظام الفرقية. افترض أن الصورة العامة لمعادلة النظام الفرقية تكون على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ المعادلة رقم (٥,٢٦)

تتسبب الإثارة الأسية المركبة في استجابة أسية مركبة في الأنظمة المستمرة زمنياً و الشيء نفسه يكون حقيقياً مع الأنظمة المتقطعة زمنياً. ولذلك، إذا كانت $x[n]=Xz^n$، فإن $y[n]$ ستكون على الصورة $y[n]=Yz^n$ حيث كل من X و Y عبارة عن ثوابت مركبة. وعلى ذلك ففي المعادلة الفرقية التالية :

$y[n-k]=z^{-k}Yz^n$ و $x[n-k]=Xz^{n-k} = z^{-k}Xz^n$

وبالتالي فإن المعادلة (٥- ٢٦) يمكن كتابتها كما يلي :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y z^n = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X z^n$$

وبالتالي فإن كل من $Xz^n$ و $Yz^n$ يمكن أخذهم كمشتركات كما يلي :

$$Yz^n \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = Xz^n \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{Yz^n}{Xz^n} = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

هذه النسبة Y/X هي نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z. إنها تمثل دالة العبور للأنظمة المتقطعة زمنياً ويرمز لها عادة بالرمز H(z). بمعنى :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$ المعادلة رقم (٥,٢٧)

وبالتالي فإن $y[n]=Yz^n=H(z)Xz^n=H(z)x[n]$. بذلك يمكن كتابة دالة العبور مباشرة من المعادلة الفرقية، وإذا كانت المعادلة الفرقية تصف النظام، فإن دالة العبور تكون كذلك واصفة للنظام. بضرب البسط والمقام في المعادلة (٥,٢٧) في $z^N$ يمكن التعبير عن H(z) بطريقة بديلة :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_{M-1} z + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N}$$ المعادلة رقم (٥,٢٨)

الصورتان السابقتان متكافئتان ولكن كل واحدة منهما تكون أكثر مناسبة لمواقف معينة.

يمكننا أيضاً إيجاد استجابة النظام باستخدام الالتفاف. الاستجابة y[n] لنظام LTI له استجابة النبضة h[n] لإثارة أسية مركبة $x[n]=Xz^n$ يمكن كتابتها على الصورة :

$$y[n] = h[n] * Xz^n = X \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} = Xz^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$$

بمساواة صورتي الاستجابة :

$$H(z) X z^n = X z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$$

التي منها يمكن كتابة :

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$$

التي توضح العلاقة بين دالة العبور واستجابة النبضة لنظام LTI متقطع زمنياً. المجموع $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$ تسمى تحويل z لـ h[n] كما سنرى في الفصل ٩.

**الاستجابة الترددية**

المتغير z في الأس المركب $z^n$ يكون عامة مركب القيمة. افترض الحالة الخاصة التي يكون فيها المتغير z محدوداً بدائرة الوحدة في المستوى المركب بحيث إن |z|=1. بذلك فإن z يمكن التعبير عنها كما يلي : $z=e^{j\Omega}$ حيث Ω هي متغير حقيقي يمثل التردد الزاوي في الزمن المتقطع، و $z^n$ تصبح $e^{j\Omega n}$، والتي تمثل جيباً مركباً في الزمن المتقطع $e^{j\Omega}=\cos(\Omega)+j\sin(\Omega)$، وتصبح دالة العبور للنظام هي التردد الزاوي للنظام $H(e^{j\Omega})$. من $Yz^n=H(z)Xz^n$، وبوضع $z=e^{j\Omega}$ يمكن كتابة ما يلي :

$$Ye^{j\Omega n} = |Y|e^{j\measuredangle Y}e^{j\Omega n} = H(e^{j\Omega})Xe^{j\Omega n} = |H(e^{j\Omega})|e^{j\measuredangle H(e^{j\Omega})}e^{j\Omega n}|X|e^{j\measuredangle X}e^{j\Omega n}$$

بالقسمة على $e^{j\Omega n}$ نحصل على :

$$|Y|e^{j\measuredangle Y} = |H(e^{j\Omega})||X|e^{j(\measuredangle H(e^{j\Omega})+\measuredangle X)}$$

بمساواة المقادير نحصل على $|Y|=|H(e^{j\Omega})||X|$، وبمساواة الزوايا نحصل على $\measuredangle Y=\measuredangle H(e^{j\Omega})+\measuredangle X$. الدالة $H(e^{j\Omega})$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام ؛ لأنه عند أي تردد زاوي Ω، إذا كنا نعرف مقدار وزاوية الإثارة ومقدار وزاوية الاستجابة الترددية ، فإنه يمكننا إيجاد مقدار وزاوية الاستجابة.

كما كان الأمر حقيقياً بالنسبة للأنظمة المستمرة زمنياً، إذا تم تطبيق الإثارة المركبة x[n] لأي نظام وتسبب ذلك في استجابة y[n]، فإن الجزء الحقيقي من x[n] يتسبب في الجزء الحقيقي من الاستجابة y[n]، والجزء التخيلي من الإثارة x[n] يتسبب في الجزء التخيلي من الاستجابة y[n]. ولذلك، إذا كانت الإثارة الحقيقية لأي نظام هي $x[n]=A_x\cos(\Omega n+\theta_x)$، فإنه يمكننا إيجاد استجابة النظام لأي إثارة على الصورة :

$$x_C[n]=A_x\cos(\Omega n+\theta_x)+jA_x\sin(\Omega n+\theta_x)=A_xe^{j(\Omega n+\theta x)}$$

كما يلي :

$$y_C[n]=A_y\cos(\Omega n+\theta_y)+jA_y\sin(\Omega n+\theta_y)=A_xe^{j(\Omega n+\theta y)}$$

ويمكننا أن نأخذ الجزء الحقيقي $y[n]=A_y\cos(\Omega n+\theta_y)$ على أنه الاستجابة للجزء الحقيقي من الاستجابة $x[n]=A_x\cos(\Omega n+\theta_x)$. وباستخدام $|Y|=|H(j\omega)||X|$ و $\measuredangle Y=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X$ نحصل على :

$$\theta_y=\measuredangle H(e^{j\Omega})+\theta_x \quad و \quad A_y=|H(e^{j\Omega})|A_x$$

**مثال ٥,١٢**

**دالة العبور والاستجابة الترددية**

نظام LTI موصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

y[n]-).75y[n-1]+0.25y[n-2]=x[n]

(أ) احسب دالة العبور

بالنسبة للمعادلة الفرقية التي على الصورة $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ ، و N=2 و M=0 و $a_0$=0.25 و $a_1$=-0.75 و $a_2$=1 و $b_0$=1، يمكننا كتابة دالة العبور على الصورة :

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 0.75z + 0.25}$$

(ب) إذا كانت $x[n]=Xe^{j0.5n}$ و $y(t)=Ye^{j0.5n}$ و $X=12e^{-j\pi/4}$ ، احسب مقدار وزاوية Y.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(e^{j\Omega})^2 - 0.75(e^{j\Omega}) + 0.25} = \frac{1}{e^{j2\Omega} - 0.75e^{j\Omega} + 0.25}$$

التردد الزاوى هو Ω=0.5، ولذلك :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{e^{j} - 0.75(e^{j/2}) + 0.25} = 2.001e^{-j1.303}$$

$$|Y|=|H(e^{j0.5})|x12=2.001x12=24.012$$

$$\measuredangle Y=\measuredangle H(e^{j0.5})-\pi/4=-1.3032-\pi/4=-2.0886 \text{ radisns}$$

(ج) إذا كانت $x[n]=25\cos(2\pi n/5)$ و $y[n]=A_y\cos(2n/5+\theta_y)$ ، احسب $A_y$ و $\theta_y$.

$$A_y=|H(e^{j\pi/9})|A_x=1.2489x25=31.2225$$

$$\theta_y = \measuredangle H\left(e^{j2\pi/5}\right) + \theta_x = 2.9842 + 0 = 2.9842\ radians$$

## (٥,٤) ملخص النقاط المهمة

١- كل نظام LTI يكون موصوفاً تماماً باستجابته الصدمية

٢- استجابة أي نظام LTI لأي إشارة دخل اختيارية يمكن إيجادها عن طريق التفاف إشارة الدخل مع الاستجابة الصدمية للنظام.

٣- الاستجابة الصدمية لنظامين LTI موصلين على التوالي تساوي التفاف الاستجابة الصدمية لكل من النظامين مع بعضهما بعضاً.

٤- الاستجابة الصدمية لنظامين LTI موصلين على التوازي تساوي مجموع الاستجابة الصدمية لكل من النظامين.

٥- أي نظام LTI مستمر زمنياً يكون مستقراً لـ BIBO إذا كانت استجابته الصدمية يمكن تكاملها؟

٦- أي نظام LTI متقطع زمنياً يكون مستقراً (BIBO) إذا كانت استجابته الصدمية يمكن جمعها.

**تمارين مع الإجابات**

(في كل تمرين ، تكون الإجابات مدونة بصورة عشوائية )

**الزمن المستمر**

**استجابة النبضة**

١- احسب استجابة النبضة للأنظمة الموصوفة بالمعادلات التالية :

(أ) $y'(t)+5y(t)=x(t)$

(ب) $y''(t)+6y'(t)+4y(t)=x(t)$

(ج) $2y'(t)+3y(t)=x'(t)$

(د) $4y'(t)+9y(t)=2x(t)+x'(t)$

**الإجابة** : $h(t)=1(1/16)e^{-9t/4}u(t)+(1/4)\delta(t)$ ، $e^{-5t}u(t)-(3/4)e^{-3t/2}u(t)+(1/2)\delta(t)$

، $0.2237(e^{-0.76t}-e^{-5.23t})u(t)$

**الالتفاف**

٢- إذا كانت $x(t)=2tri(t/4)*\delta(t-2)$ فأوجد قيمة :

(أ) $x(1)$

(ب) $x(-1)$

**الإجابة** : 3/2 ، ½

٣- إذا كانت $x(t)=-5rect(t/2)*(\delta(t+1)+\delta(t))$ فأوجد قيمة :

(أ) $x(1/2)$

(ب) $x(-1/2)$

(ج) $x(-5/2)$

**الإجابة** : 10- و 0 و 5-

٤- احسب قيم هذه الدوال

(أ) إذا كانت $g(t)=4\sin(\pi t/8)*\delta(t-4)$ فاحسب $g(-1)$.

(ب) إذا كانت $g(t)=-5rect((t+4)/2)*\delta(3t)$ فاحسب $g(1)=g(-4)$.

**الإجابة** : 3.696- و 5/3

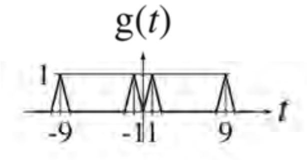
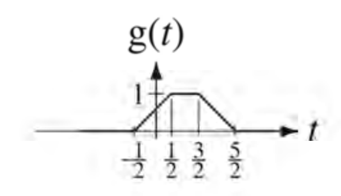
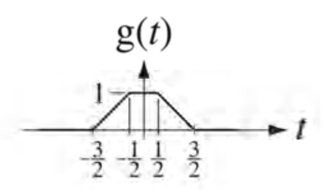
٥- ارسم $g(t)$ في كل مما يأتي :

(أ) $g(t)=rect(t)*rect(t/2)$

(ب) $g(t)=rect(t-1)*rect(t/2)$

(ج) $g(t)=[rect(t-5)+rect(t+2)]*[rect(t-4)+rect(t+4)]$

**الإجابة :**

**شكل رقم** (ت–٥).

٦- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g(t)=rect(4t)$

(ب) $g(t)=rect(4t)*4\delta(t)$

(ج) $g(t)=rect(4t)*4\delta(t-2)$

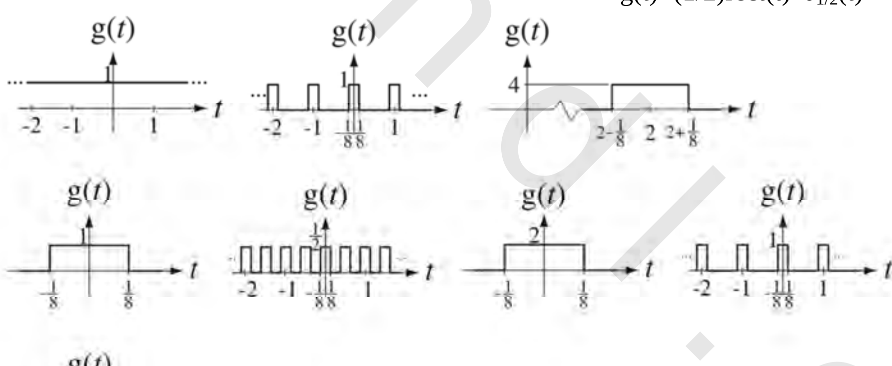
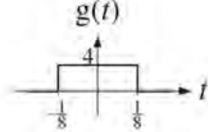
(د) $g(t)=rect(4t)*4\delta(2t)$

(ه) $g(t)=rect(4t)*\delta_1(t)$

(و) $g(t)=rect(4t)*\delta_1(t-1)$

(ز) $g(t)=(1/2)rect(4t)*\delta_{1/2}(t)$

(ح) $g(t)=(1/2)rect(t)*\delta_{1/2}(t)$

**شكل رقم** (ت–٦).

٧- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g(t)=rect(t/2)*[\delta(t+2)-\delta(t+1)]$

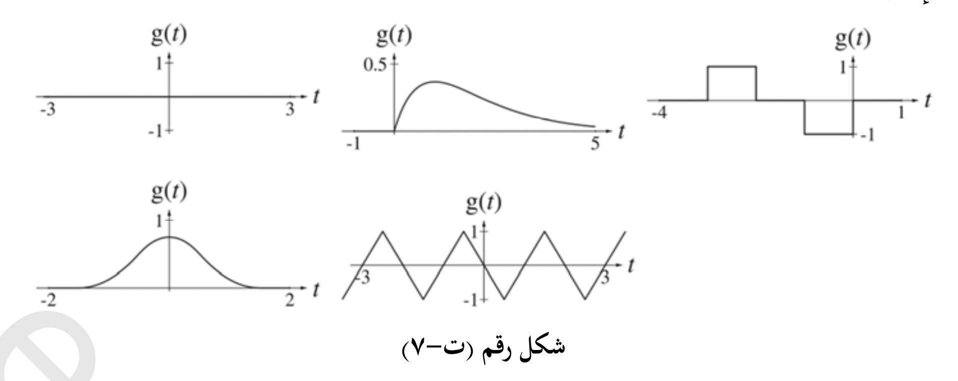
(ب) $g(t)=rect(t)*tri(t)$

(ج) $g(t)=e^{-t}u(t)*e^{-t}u(t)$

(د) $g(t)=[tri(2(t+1/2))-tri(2(t-1/2))]*\delta_2(t)$

(ه) $g(t)=[tri(2(t+1/2))-tri(2(t-1/2))]*\delta_1(t)$

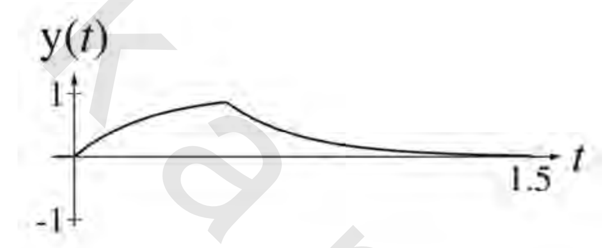



**شكل رقم (ت-٧)**

٨- نظام له استجابة النبضة التالية $h(t)=4e^{-4t}u(t)$. احسب وارسم استجابة النظام للدخل $x(t)=rect(2(t-1/4))$.

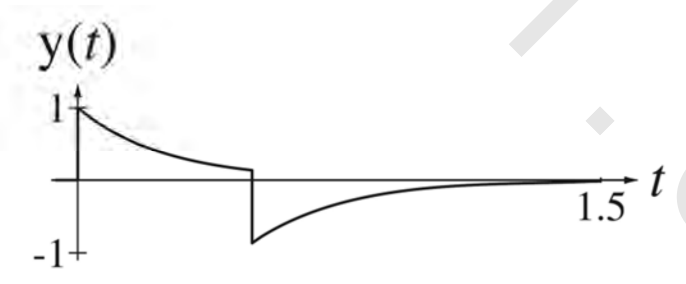
**الإجابة :**




**شكل رقم (ت-٨)**

٩- غير استجابة النبضة في تمرين ٨ إلى $h(t)=\delta(t)-4e^{-4t}u(t)$ واحسب وارسم استجابة النظام للدخل $x(t)=rect(2(t-1/4))$.

**الإجابة :**

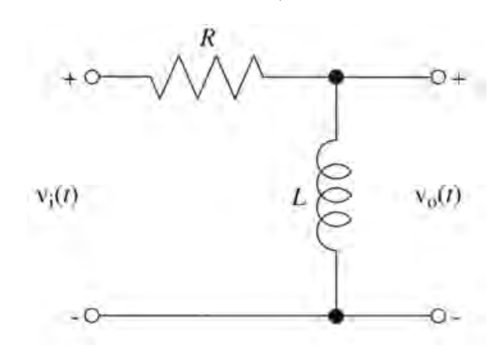



**شكل رقم (ت-٩)**

١٠- للدائرة المبينة في شكل (ت-١٠)، إشارة جهد الدخل هي $v_i(t)$ وإشارة جهد الخرج هي $v_o(t)$ :

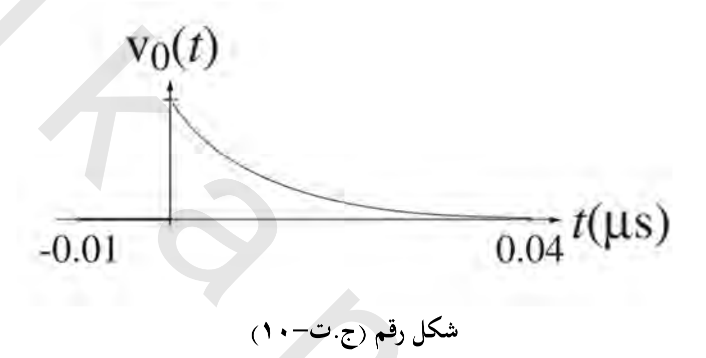
(أ) احسب استجابة النبضة بدلالة R و L.

(ب) إذا كانت $R=10k\Omega$ و $L=100\mu H$ فارسم استجابة وحدة الخطوة.




**شكل رقم (ت–١٠)**

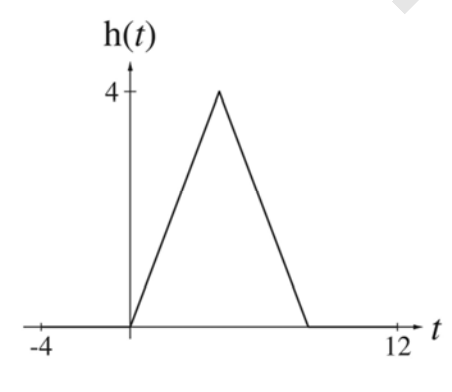
**الإجابة :** $\delta(t)-(R/L)e^{-tR/L}$




**شكل رقم (ج.ت–١٠)**

١١- نظامان لهما استجابتا النبضة التاليتان $h_1(t)=u(t)-u(t-4)$ و $h_2=rect((t-2)/4)$. إذا تم توصيل هذين النظامين على التوالي فارسم الاستجابة $y(t)$ للنظام الكلي للدخل $x(t)=\delta(t)$.

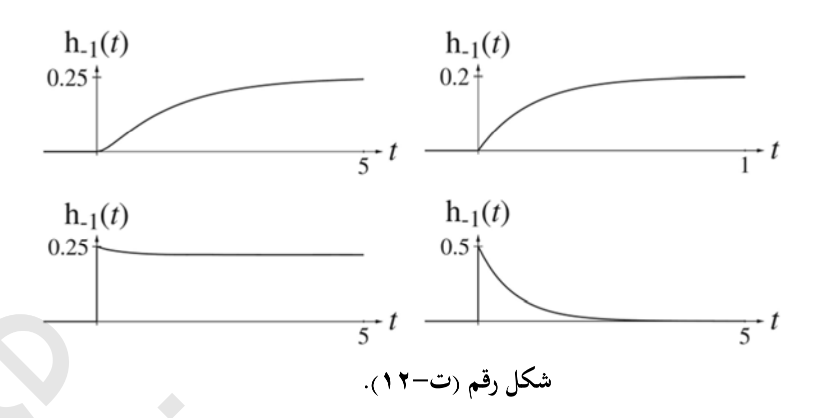
**الإجابة :**




**شكل رقم (ت–١١)**

١٢- ارسم استجابات الأنظمة في تمرين ١ لوحدة الخطوة.

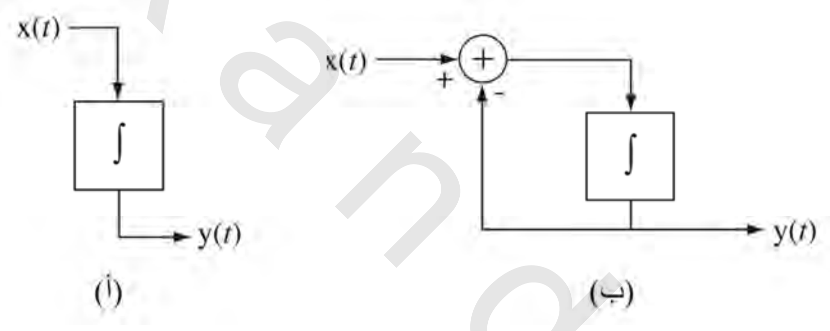
**الإجابة :**




**شكل رقم (ت–١٢).**

**الاستقرار**

١٣- أوجد استجابات النبضة للنظامين الموضحين في شكل (ت- ١٣). هل هذان النظامان مستقران BIBO أم لا ؟

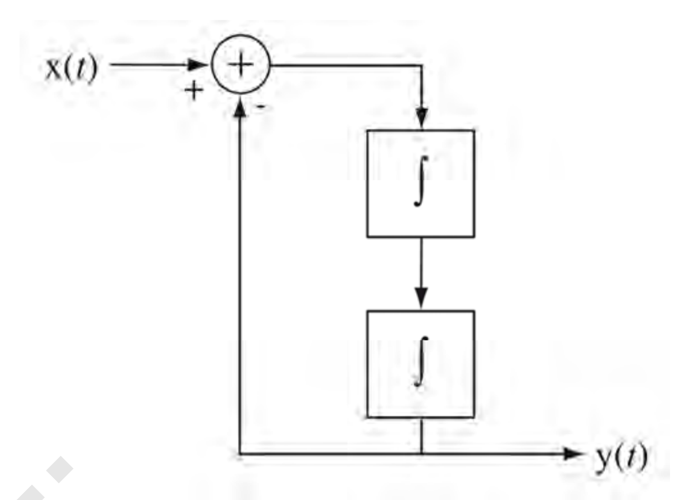



**شكل رقم (ت–١٣) نظامان للتكامل الأحادي.**

**الإجابة :**

واحد من النظامين مستقر (BIBO)، وواحد غير مستقر (BIBO).

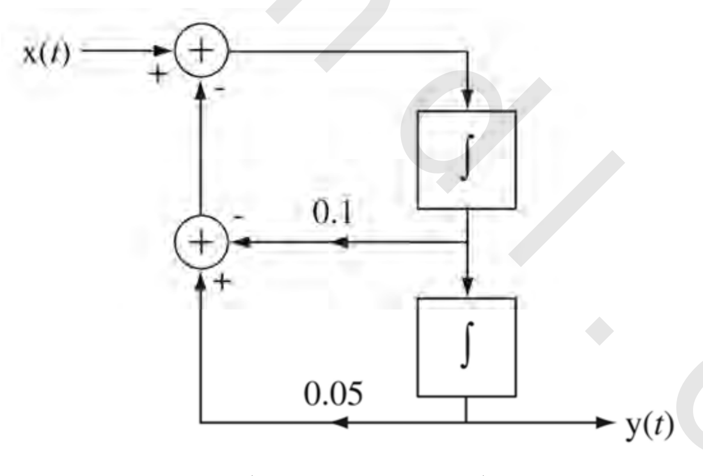
١٤- أوجد استجابة النبضة للنظام في شكل (ت–١٤). هل هذا النظام مستقر (BIBO)؟




**شكل رقم (ت–١٤) نظام تكامل مزدوج.**

**الإجابة** : النظام غير مستقر BIBO.

١٥- أوجد استجابة النبضة للنظام الموضح في شكل (ت–١٥) وتحقق من استقراره BIBO.




**شكل رقم (ت–١٥) نظام بتكاملين**

**الإجابة** :

$4.589e^{0.05t}\sin(0.2179t)u(t)$ ، والنظام غير مستقر BIBO

**الزمن المتقطع**

**استجابة النبضة**

١٦- أوجد استجابة النبضة لكل نظام من النظم الموصوفة في المعادلات التالية :

(أ) $y[n]=x[n]-x[n-1]$

(ب) $25y[n]+6y[n-1]+y[n-2]=x[n]$

(ت) $4y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=x[n]$

(ث) $2y[n]+6y[n-2]=x[n]-x[n-2]$

**الإجابة** : $\delta[n]-\delta[n-1]$ ، $[1/3-(1/12)(1/4)^n]u[n]$ ،

$h[n]=\cos(2.214n+0.644)/[20(5)^n]$ ، $(\sqrt{3}/2)\cos(\pi n/2)(u[n]+u[n-2])$

**الالتفاف**

١٧- أوجد القيم العددية للدوال التالية :

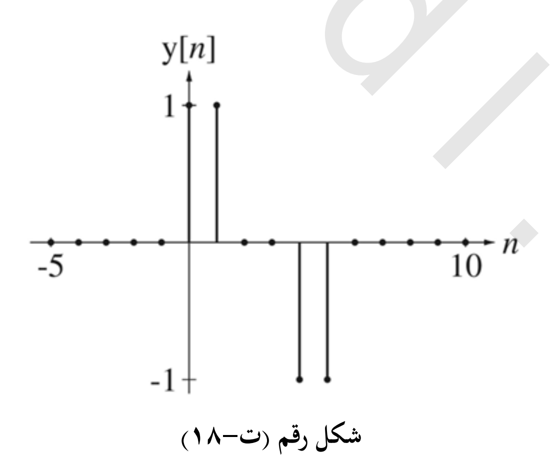
(أ) إذا كانت $g[n]=10\cos(2\pi n/12)*\delta[n+8]$ ، فاحسب $g[4]$

(ب) إذا كانت $g[n]=(u[n+2]-u[n-3])*(\delta[n-1]-2\delta[n-2])$ ، فاحسب $g[2]$

**الإجابة** : 1- و 10

١٨- ارسم الالتفاف التالي $y[n]=x[n]*h[n]$ حيث $x[n]=u[n]-u[n-4]$ و $h[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$.

**الإجابة** :




**شكل رقم (ت-١٨)**

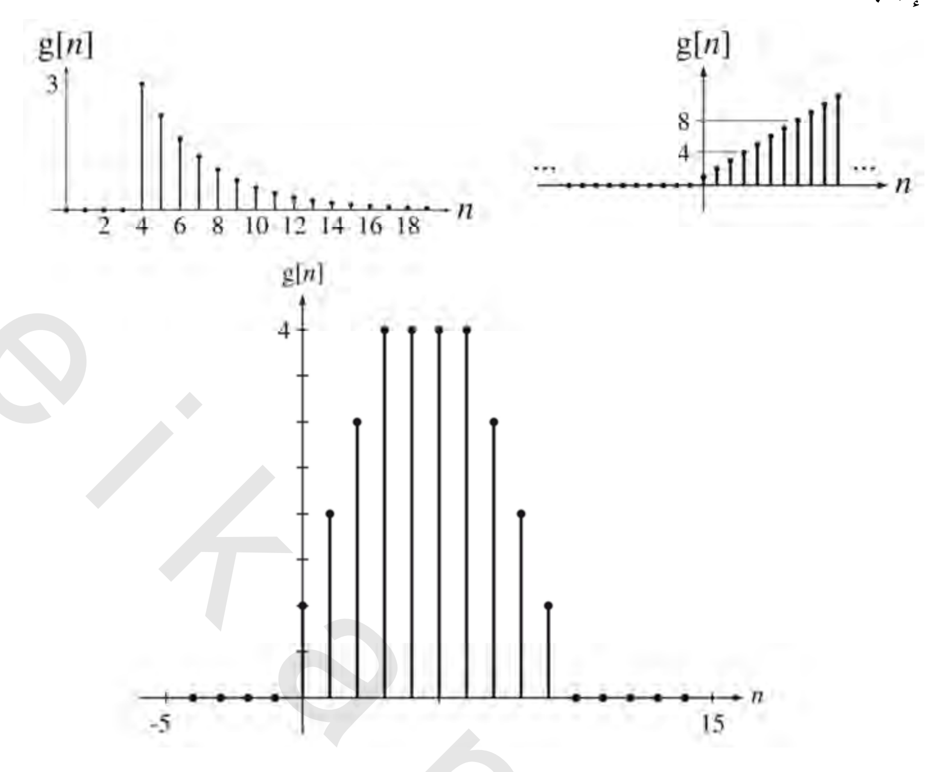
١٩- ارسم $g[n]$ وأوجد الحل الرياضي، وقارن الحل الرياضي مع النتائج التي يمكن أن تحصل عليها من استخدام أمر ماتلاب conv لإجراء عمليات الالتفاف التالية :

(أ) $g[n]=u[n]*u[n]$

(ب) $g[n]=3\delta[n-4]*(3/4)^n u[n]$

(ت) $g[n]=(u[n]-u[n-7])*(u[n]-u[n-4])$

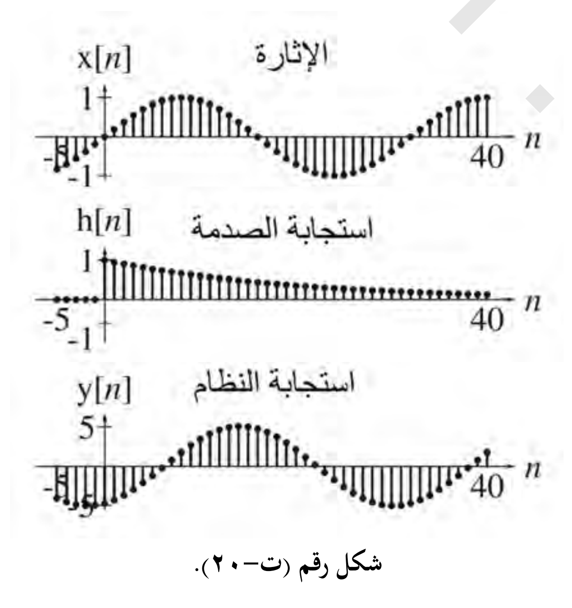
**الإجابة :**




**شكل رقم (ت-١٩).**

٢٠- افترض الإثارة $x[n]=\sin(2\pi n/32)$ واستجابة النبضة $h[n]=(0.95)^n u[n]$ أوجد صورة مغلقة للاستجابة $y[n]$ وارسم هذه الاستجابة.

**الإجابة :**



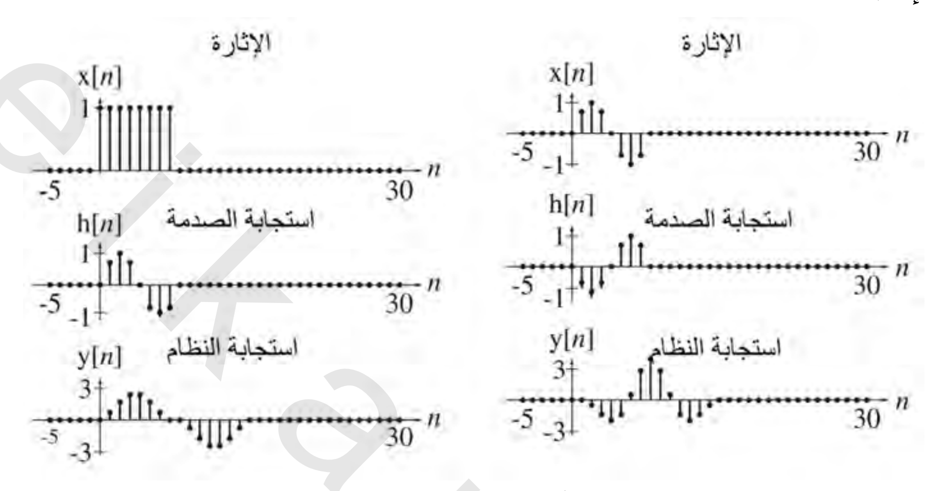

**شكل رقم (ت-٢٠).**

٢١- افترض الإثارة x[n]، واستجابة النبضة h[n]، استخدم ماتلاب لرسم استجابة النظام y[n] في كل مما يأتي :

(أ) x[n]=u[n]-u[n-8] ، و h[n]=sin(2πn/8)(u[n]-u[n-8])

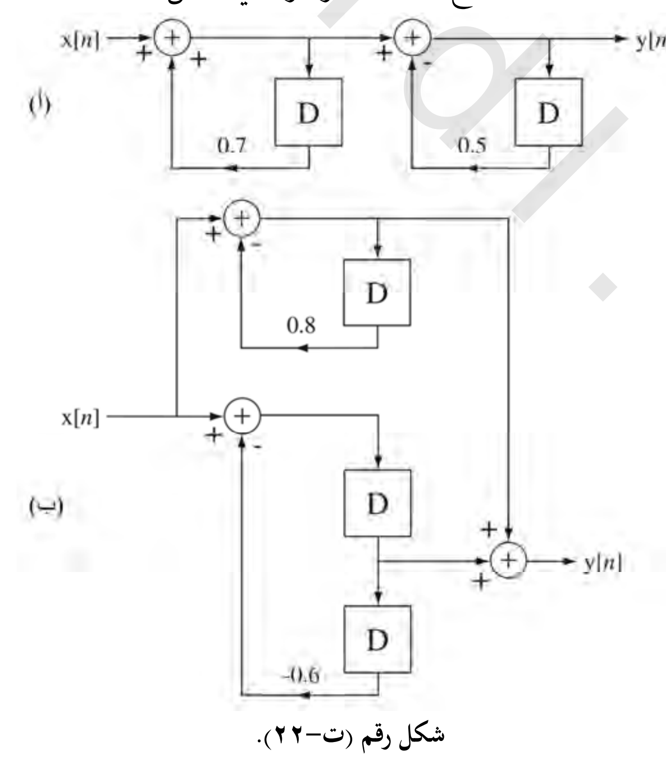
(ب) x[n]=sin(2πn/8)(u[n]-u[n-8]) ، و h[n]=-sin(2πn/8)(u[n]-u[n-8])

**الإجابة :**

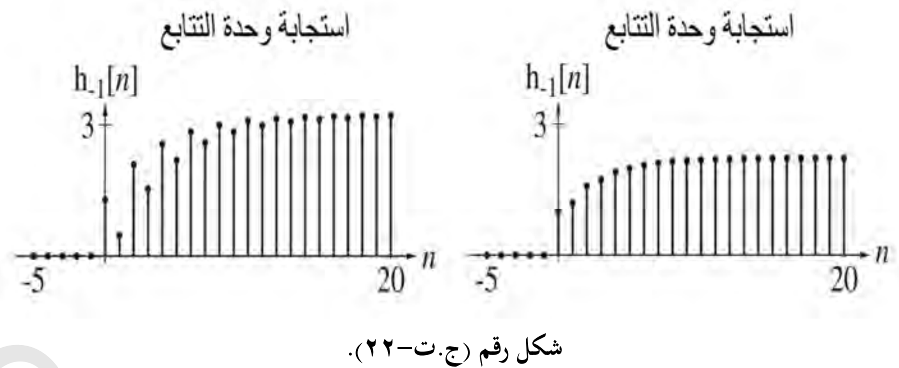



**شكل رقم (ج ت-٢١)**

٢٢- أوجد وارسم استجابة وحدة التتابع للأنظمة الموجودة في شكل (ت- ٢٢).



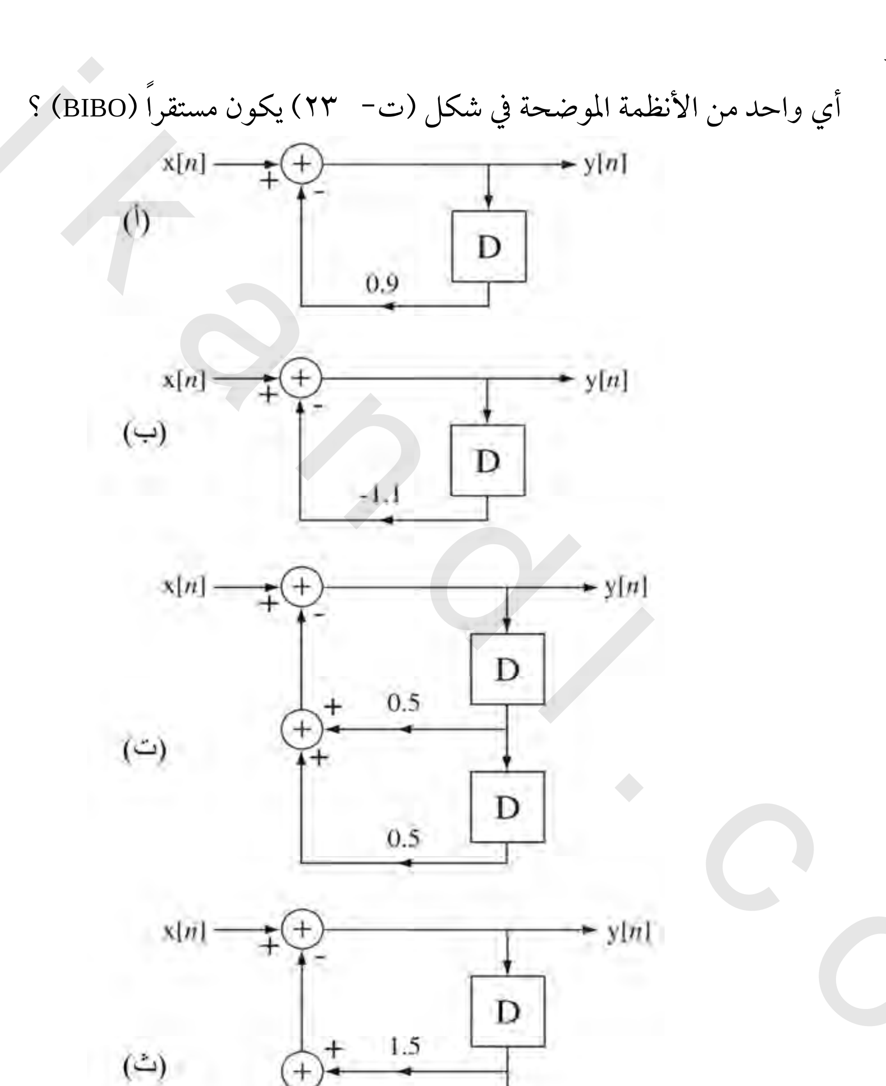

**شكل رقم (ت-٢٢).**




شكل رقم (ج.ت-٢٢).

**الاستقرار**

٢٣- أي واحد من الأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٢٣) يكون مستقراً (BIBO) ؟




شكل رقم (ت-٢٣).

**الإجابة** : اثنان مستقران واثنان غير مستقرين

**تمارين بدون إجابة**

**الزمن المستمر**

**استجابة النبضة**

٢٤- أوجد استجابة النبضة للأنظمة الموصوفة بالمعادلات التالية :

(أ) $4y''(t)=2x(t)-x'(t)$

(ب) $y''(t)+9y(t)=-6x'(t)$

(ج) $-y''(t)+3y'(t)=3x(t)+5x''(t)$

٢٥- نبضة جهد مربعة تبدأ عند الزمن t=0، وعرضها 2 ثانية ، وارتفاعها 0.5V استخدمت لإثارة مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة فيه R=10kΩ و C=100µF.

(أ) ارسم الجهد على المكثف مع الزمن

(ب) غير عرض النبضة إلى 0.2 ثانية وارتفاعها إلى 5V وأعد الجزء (أ)

(ج) غير عرض النبضة إلى 2 ميللي ثانية وارتفاعها إلى 500V وأعد الجزء (أ)

(د) غير عرض النبضة إلى 2 ميكروثانية وارتفاعها إلى 500kV وأعد الجزء (أ)

اعتماداً على هذه النتائج ، ماذا سيحدث من وجهة نظرك إذا افترضنا أن جهد الدخل أصبح وحدة نبضة؟

**الالتفاف**

٢٦- دالة مستمرة زمنياً لا تساوي الصفرعلى مدى معاملها من 0 حتى 4. تم التفاف هذه الدالة مع دالة أخرى لا تساوي الصفر على مدى معاملها من 1- حتى 3-. ما هو المدى الذي يكون فيه التفاف الدالتين لا يساوي الصفر.

٢٧- ما هي الدالة التي عند التفافها مع الدالة -2cos(t) تعطي 6sin(t) ؟ (هناك أكثر من إجابة صحيحة)

٢٨- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g(t)=3\cos(10\pi t)*4\delta(t+1/10)$

(ب) $g(t)=\text{tri}(2t)*\delta_1(t)$

(ج) $g(t)=2[\text{tri}(2t)-\text{rect}(t-1)]*\delta_2(t)$

(د) $g(t)=8[\text{tri}(t/4)\delta_1(t)]*\delta_8(t)$

(ه) $g(t)=e^{-2t}u(t)*[\delta_4(t)-\delta_4(t-2)]$

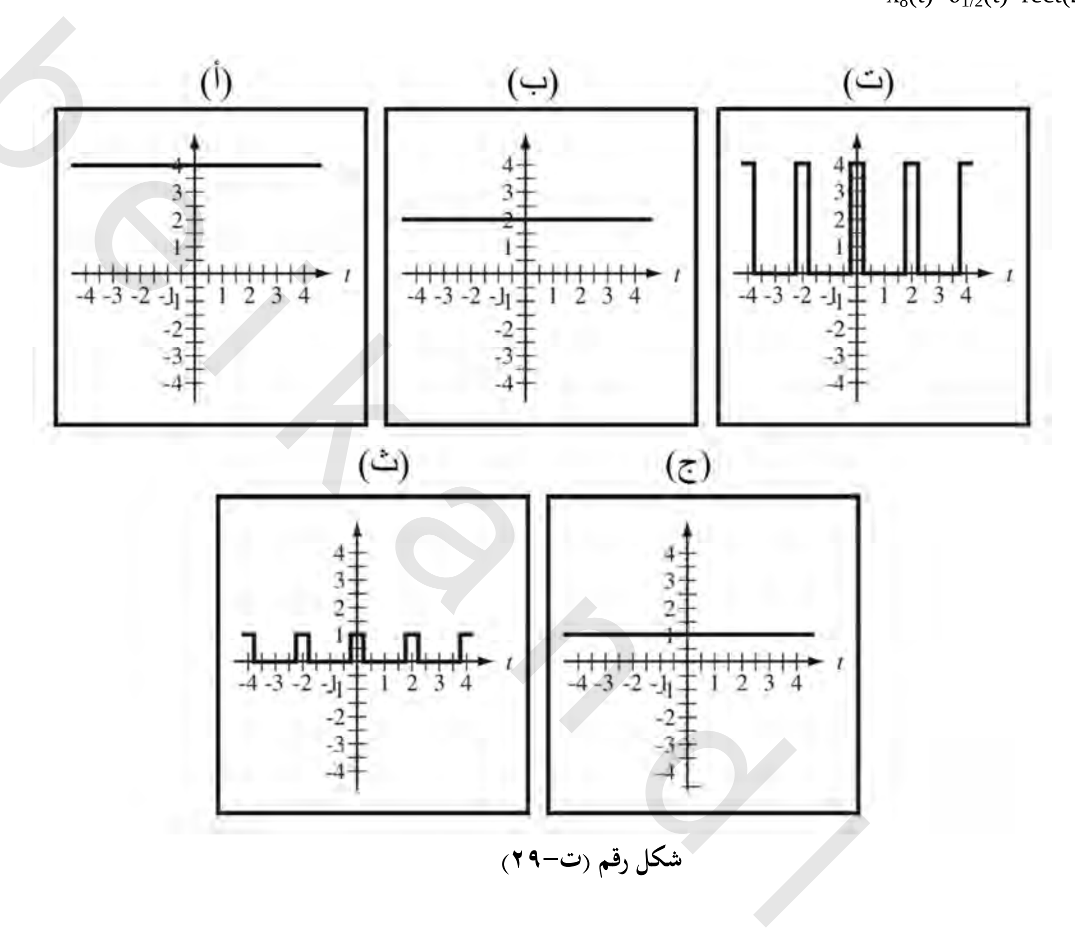
٢٩- لكل رسم في شكل (ت- ٢٩) إختر الإشارة ، أو الإشارات المقابلة من المجموعة $x_1(t)$ حتى $x_8(t)$.

(الإشارة المقابلة من الممكن ألا تكون واحدة من الاختيارات A حتى E).

$x_1(t)=\delta_2(t)*\text{rect}(t/2)$

$x_2(t)=4\delta_2(t)*\text{rect}(t/2)$

$x_3(t)=(1/4)\delta_{1/2}(t)*\text{rect}(t/2)$
$x_4(t)=\delta_{1/2}(t)*\text{rect}(t/2)$
$x_5(t)=\delta_2(t)*\text{rect}(2t)$
$x_6(t)=4\delta_2(t)*\text{rect}(2t)$
$x_7(t)=(1/4)\delta_{1/2}(t)*\text{rect}(2t)$
$x_8(t)=\delta_{1/2}(t)*\text{rect}(2t)$




**شكل رقم (ت–٢٩)**

٣٠- احسب متوسط طاقة كل واحدة من الإشارات التالية :

(أ) $x(t)=4\text{rect}(t)*\delta_4(t)$

(ب) $x(t)=4\text{tri}(t)*\delta_4(t)$

٣١- وضح أن خاصية المساحة وخاصية التحجيم للتكامل الالتفافي يكونان متفقين عن طريق إيجاد المساحة لـ $x(at)*h(at)$ ومقارنتها مع مساحة الـ $x(t)*h(t)$.

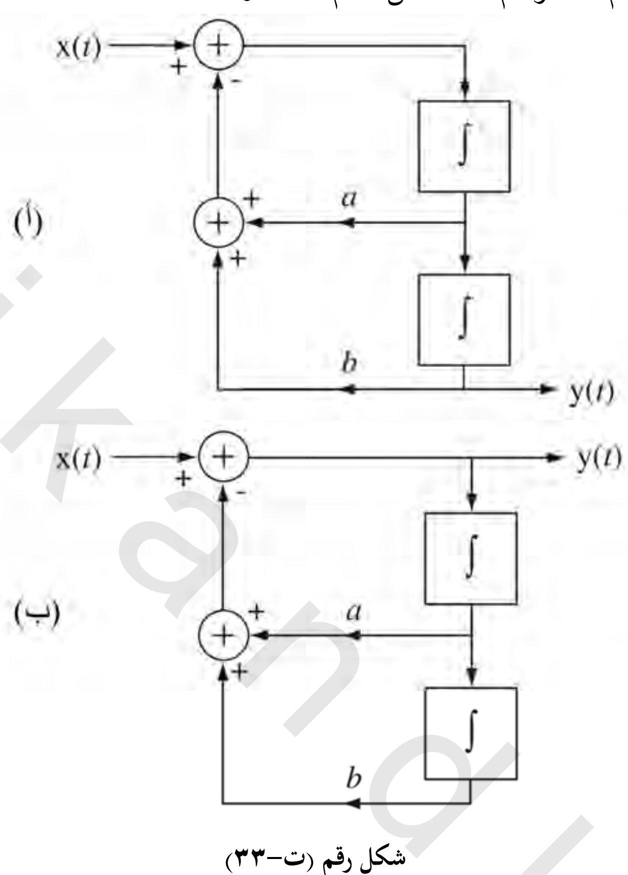
٣٢- التفاف الدالة $g(t)$ مع المزدوج يمكن كتابته كما يلي :

$$g(t)*u_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u_1(t-\tau)d\tau$$

بإجراء التكامل بالتجزئ وضح أن $g(t)*u_1(t)=g'(t)$.

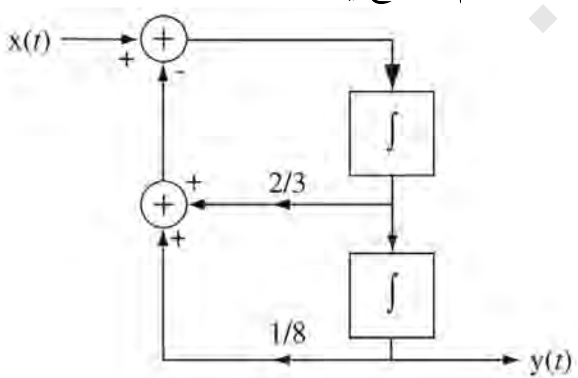
**الاستقرار**

٣٣- اكتب المعادلة التفاضلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣٣)، وأوجد استجابة النبضة لكل منها وحدد إذا كان النظام مستقراً أم لا ؟. لكل نظام a=0.5 و b=-0.1.



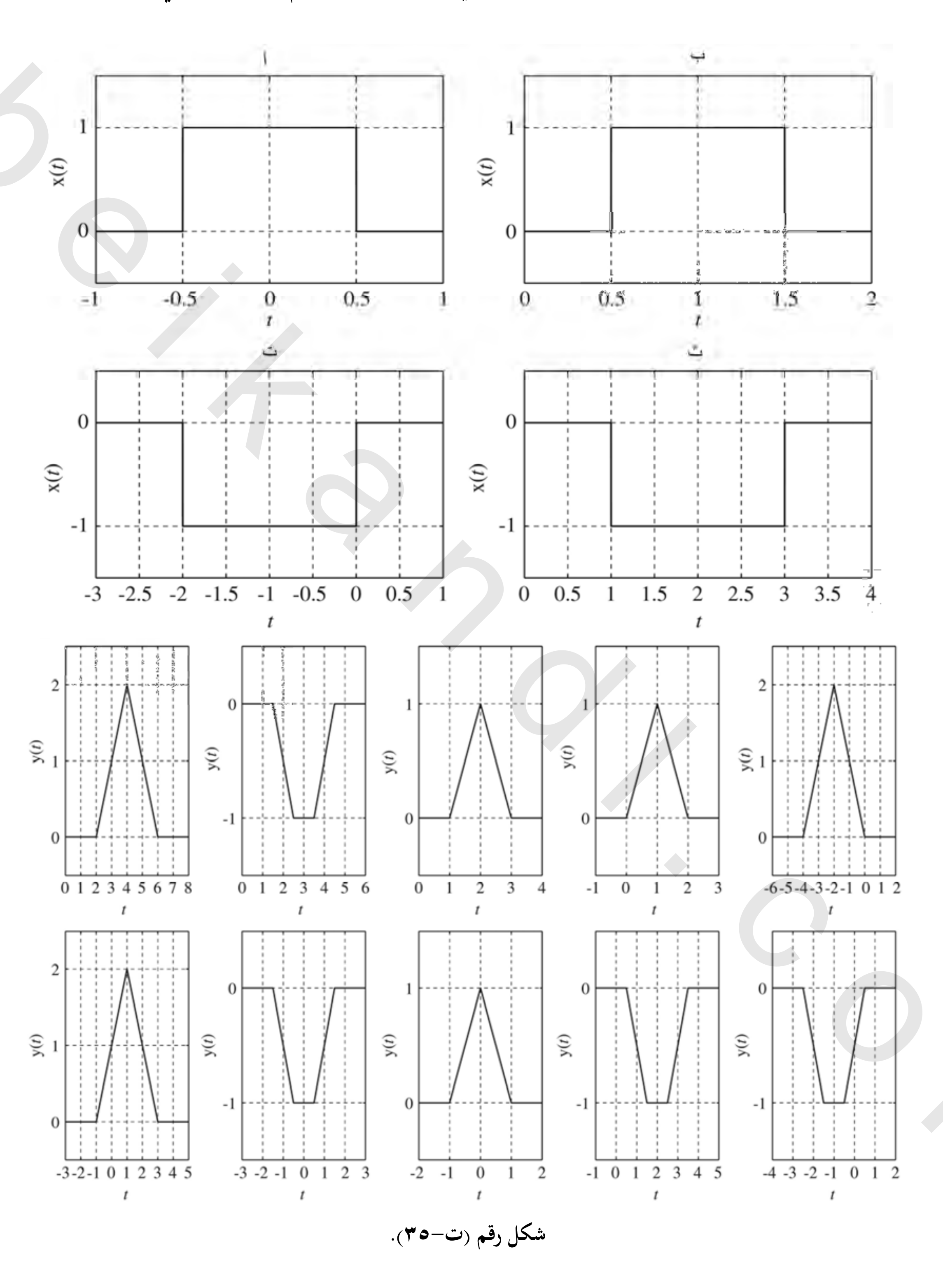

**شكل رقم (ت-٣٣)**

٣٤- أوجد استجابة النبضة للنظام الموضح في شكل (ت- ٣٤) وتحقق من استقراره BIBO ؟




**شكل رقم (ت-٣٤) نظام مكون من تكاملين.**

٣٥- هذه الدوال الأربع المستطيلة الأربعة تم التفافها كأزواج (بما في ذلك التفاف هذا المستطيل مع نفسه). الالتفافات موضحة أسفل. لكل التفاف، حدد أي الدوال المستطيلة تم التفافها لتعطي كل شكل.

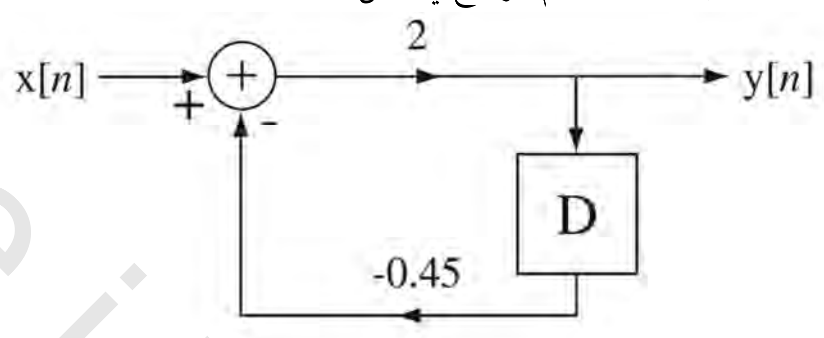



**شكل رقم (ت-٣٥).**

## الزمن المتقطع

### استجابة النبضة

٣٦- أوجد استجابة النبضة h[n] للنظام الموضح في شكل (ت- ٣٦).




شكل رقم (ت-٣٦) الرسم الصندوقي للنظام.

٣٧- أوجد استجابة النبضة للنظام الموصوف بالمعادلات التالية :

(أ) $3y[n]+4y[n-1]+y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

(ب) $(5/2)y[n]+6y[n-1]+10y[n-2]=x[n]$

### الالتفاف

٣٨- ارسم g[n] وتحقق من رسمك باستخدام الدالة conv في ماتلاب في كل مما يأتي :

(أ) $g[n]=(u[n+1]-u[n-2])*\sin(2\pi n/9)$

(ب) $g[n]=(u[n+2]-u[n-3])*\sin(2\pi n/9)$

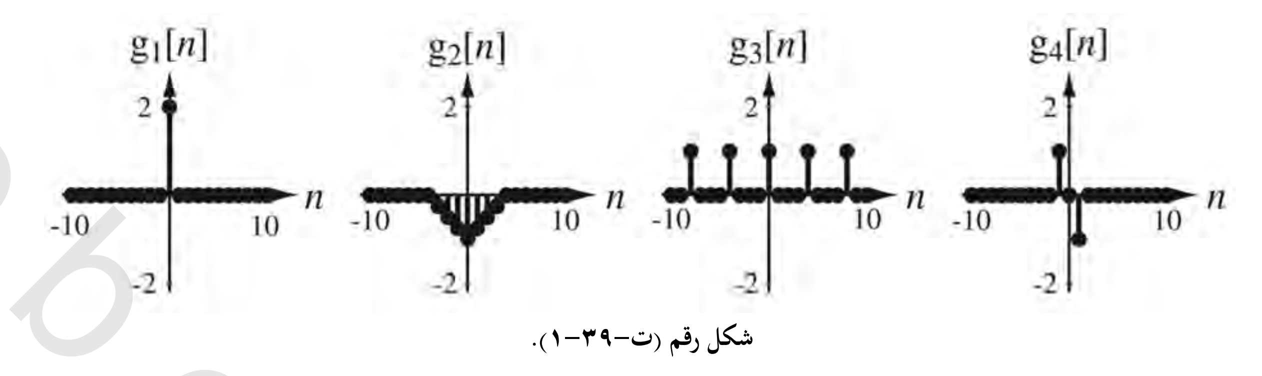
(ج) $g[n]=(u[n+4]-u[n-5])*\sin(2\pi n/9)$

(د) $g[n]=(u[n+3]-u[n-4])*(u[n+3]-u[n-4])*\delta_{14}[n]$

(ه) $g[n]=(u[n+3]-u[n-4])*(u[n+3]-u[n-4])*\delta_{7}[n]$

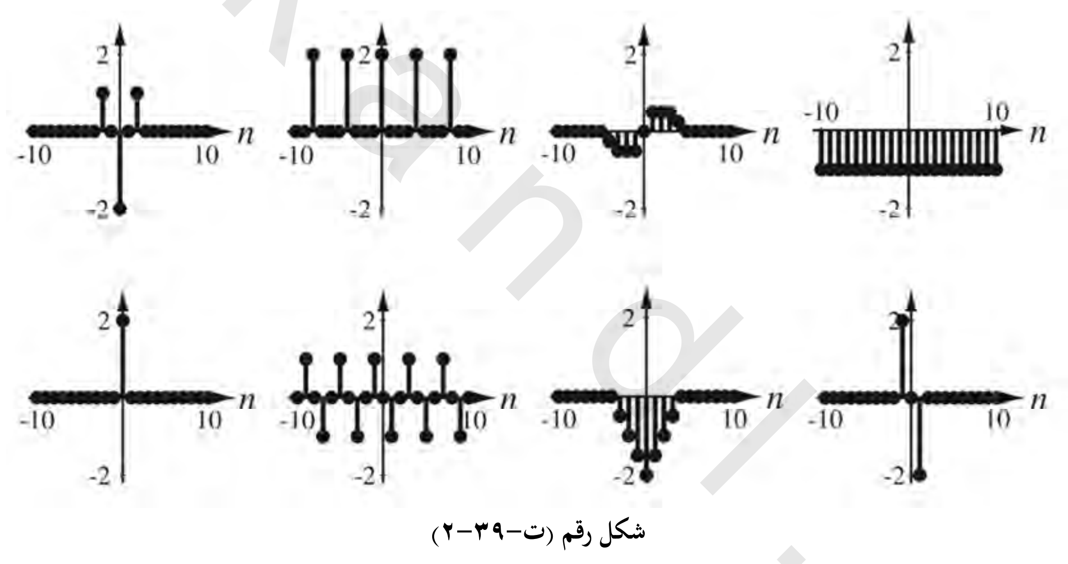
(و) $g[n]=2\cos(2\pi n/7)*(7/8)^n u[n]$

٣٩- افترض أشكال الدوال ١ حتى ٤ في شكل (ت- ٣٩- ١)، وافق كل تعبير التفافي a حتى j مع واحدة من الدوال a حتى h في شكل (ت- ٣٩- ٢) (إذا كان هناك توافق).



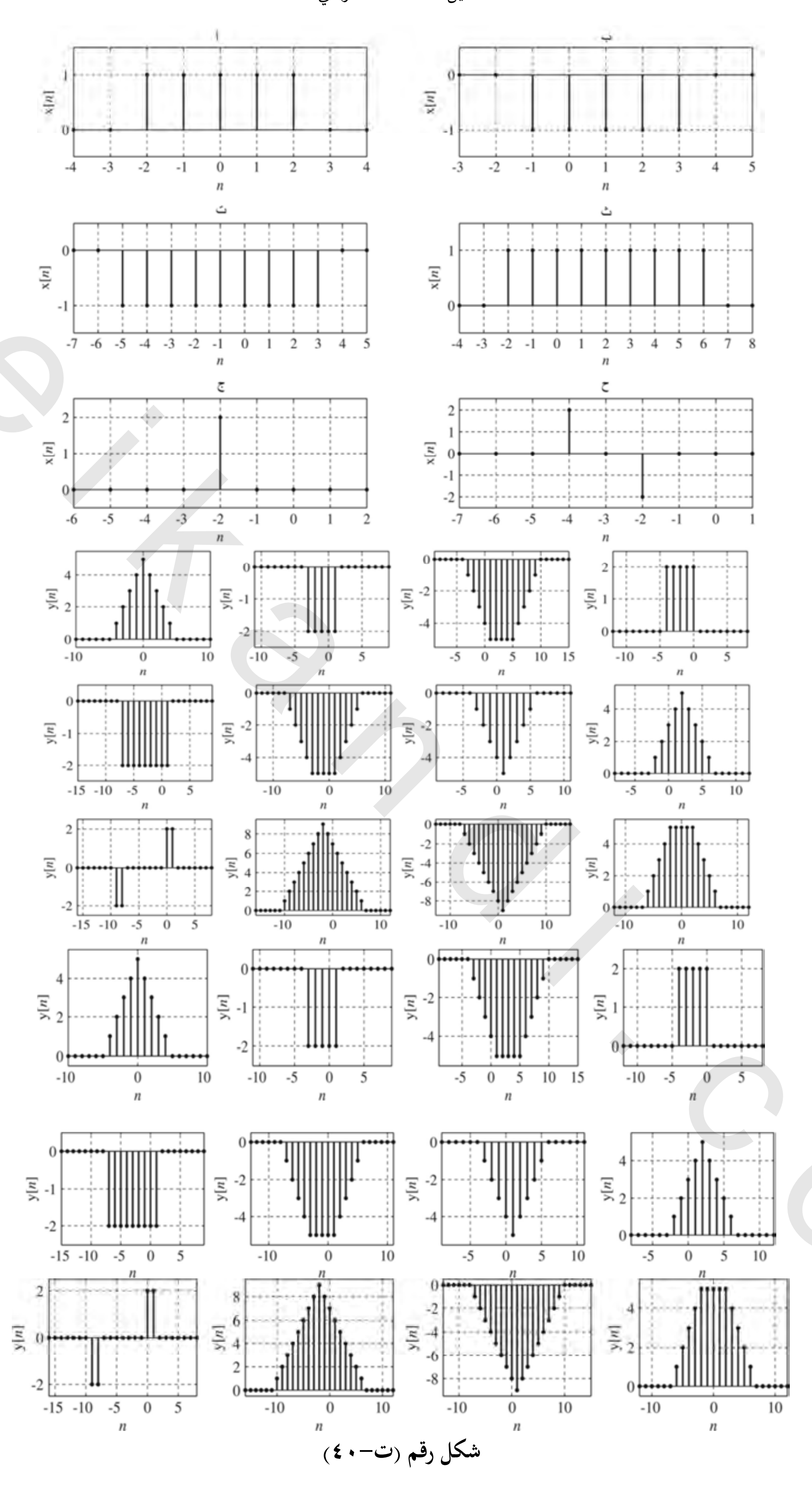

شكل رقم (ت-٣٩-١).

(a) $g_1[n]*g_1[n]$ (b) $g_2[n]*g_2[n]$ (c) $g_3[n]*g_3[n]$ (d) $g_4[n]*g_4[n]$
(e) $g_1[n]*g_2[n]$ (f) $g_1[n]*g_3[n]$ (g) $g_1[n]*g_4[n]$ (h) $g_2[n]*g_3[n]$
(i) $g_2[n]*g_4[n]$ (j) $g_4[n]*g_3[n]$



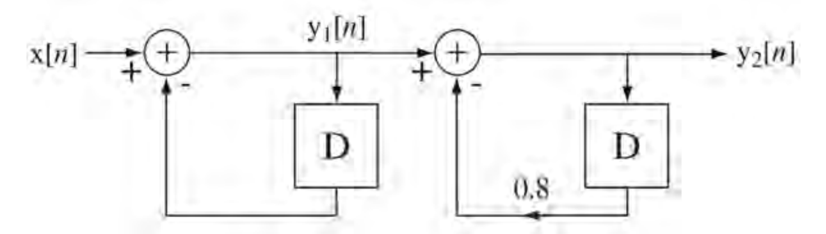

شكل رقم (ت-٣٩-٢)

٤٠- أول ٦ أشكال هي ليست إشارات متقطعة زمنياً مطلوب إجراء الالتفاف عليها. (كل إشارة تساوي صفراً خارج المدى الموضح في الرسم). فيما يلي ١٢ نتيجة لعملية الالتفاف على أزواج من هذه الإشارات (بما في ذلك التفاف كل إشارة مع نفسها). لكل نتيجة من نتائج الالتفاف حدِّد أي زوج من الإشارات تم عمل الالتفاف عليهما لتعطي هذه النتيجة؟




شكل رقم (ت-٤٠)

٤١- أوجد استجابة النبضة للأنظمة الجانبية الموضحة في شكل (ت- ٤١) وبعد ذلك قم بإجراء عملية الالتفاف عليها لإيجاد استجابة النبضة للتوصيل على التوالي للنظامين معاً.




**شكل رقم (ت-٤١) توصيل على التوالي لنظامين.**

٤٢- بفرض الإثارة x[n] واستجابة النبضة h[n]، أوجد تعبير مغلق لاستجابة النظام y[n] وارسم هذه الاستجابة.

(أ) $h[n]=n(7/8)^n u[n]$ و $x[n]=u[n]$

ملاحظة فاضل بالنسبة ل r $\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} \frac{1-r^N}{1-r}, & r \neq 1 \\ N, & r = 1 \end{cases}$

(ب) $h[n]=(4/7)\delta[n]-(-3/4)^n u[n]$ و $x[n]=u[n]$

**الاستقرار**

٤٣- لقد تمت إثارة نظام بوحدة انحدار متقطعة زمنياً والاستجابة كانت غير محدودة. من هذه الحقائق وحدها من الممكن أن نحدد إذا كان النظام سيكون مستقراً (BIBO) أم لا. لماذا؟

٤٤- لقد تمت إثارة نظام بدالة وحدة التتابع وكانت استجابته هي $K(1-\alpha^n)$.

(أ) إذا كانت K=-2 و α=1.1 فهل النظام مستقر (BIBO)؟

(ب) إذا كانت K=2 و α=-1.1 فهل النظام مستقر (BIBO)؟

٤٥- إستجابة النبضة لأحد الأنظمة كانت صفراً لكل الأزمنة السالبة، وللأزمنة n≥0 تكون تتابعاً متذبذباً كالتالي ... ,1- ,1 ,1- ,1 ,1- ,1 مستمراً إلى ما لانهاية، فهل هذا النظام مستقر؟

# طرق فورير المستمرة زمنياً

## (٦.١) المقدمة والأهداف

لقد تعلمنا في الفصل ٥ كيف نحسب استجابة نظام LTI عن طريق التعبير عن إثارة هذا النظام كمجموع خطي من الصدمات والتعبير عن استجابة النظام كمجموع خطي لاستجابات هذه الصدمات. لقد أطلقنا على هذه الطريقة الالتفاف. هذا النوع من التحليل يستفيد من مميزات الخطية ونظرية التجميع ويقوم بتجزيء المشكلة الكبيرة المعقدة إلى عدد من المشاكل المبسطة التحليل.

في هذا الفصل سنقوم أيضاً بالتعبير عن أي إشارة كمجموع خطي من الإشارات البسيطة ولكن هنا ستكون هذه الإشارات هي الإشارات الجيبية. ستكون استجابة النظام مجموعاً خطياً من الاستجابات لهذه الإثارات الجيبية. كما أوضحنا في الفصل ٥ ، فإن استجابة أي نظام LTI لدالة جيب تكون دالة جيب أخرى لها التردد نفسه ولكن بمقدار وزاوية مختلفين عموماً. التعبير عن الإشارات بهذه الطريقة يؤدي إلى مفهوم النطاق الترددي، بمعنى التفكير في الإشارات كدوال في التردد بدلاً من الزمن.

تحليل الإشارات كمجموع خطي من الدوال الجيبية ليس غريباً كما قد يبدو. إن الأذن البشرية تفعل شيئا مثل ذلك. عندما نسمع أي صوت، ما هي الاستجابة الحقيقية للمخ ؟ كما هو موضح في الفصل ١ ، فإن الأذن تستشعر التغيرات الزمنية لضغط الهواء. افترض أن هذه التغيرات كانت نغمة ذات تردد واحد، مثل أي شخص يطلق صافرة. عندما نستمع لهذه الصافرة فإننا لا نهتم بترددات (سرعة) ضغط الهواء مع الزمن. بدلاً من ذلك فإننا نكون حريصين على ثلاث خواص للصوت، وهي، الاهتزازات، أو التردد، وشدة الصوت، أو مقداره، وفترة بقاء هذا الصوت. إن نظام الأذن مع المخ يحدد معاملات فعلية للإشارة في صورة ثلاث معاملات بسيطة، وهي، التردد، والشدة، وفترة البقاء، ولا يحاول تتبع التغيرات السريعة (وسريعة التكرار) لضغط الهواء بالتفصيل. في أثناء ذلك فإن نظام الأذن مع المخ يقوم بترشيح المعلومات الموجودة في الإشارة ويحولها إلى معناها، أو جوهرها. إن

التحليل الرياضي للإشارات كمجموع خطي من الدوال الجيبية يفعل شيئاً مثل ذلك ولكن بطريقة حسابية أكثر دقة. إن النظر للإشارات بهذه الطريقة يؤدي أيضاً إلى فكر جديد عن طبيعة الأنظمة، ولبعض الأنواع من الأنظمة المعينة، يبسط بدرجة كبيرة عملية تصميم وتحليل هذه الأنظمة.

**أهداف الفصل**

١- تحديد تتابع فورير على أنه طريقة للتعبير عن الإشارات الدورية كمجموع خطي من الإشارات الجيبية.

٢- استنتاج، باستخدام مفهوم التعامد، طرق لتحويل الإشارات بين النطاق الزمني والنطاق الترددي.

٣- تحديد أنواع الإشارات التي يمكن التعبير عنها بتتابع فورير.

٤- إعداد وتعلم استخدام خواص تتابع فورير.

٥- تعميم تتابع فورير ليصبح تحويل فورير للتعبير عن الإشارات غير الدورية

٦- تعميم تحويل فورير ليمكن تطبيقه على بعض الإشارات الشائعة المفيدة

٧- إعداد وتعلم استخدام خواص تحويل فورير

٨- لنرى، من خلال أمثلة، بعض استخدامات تتابع فورير وتحويل فورير

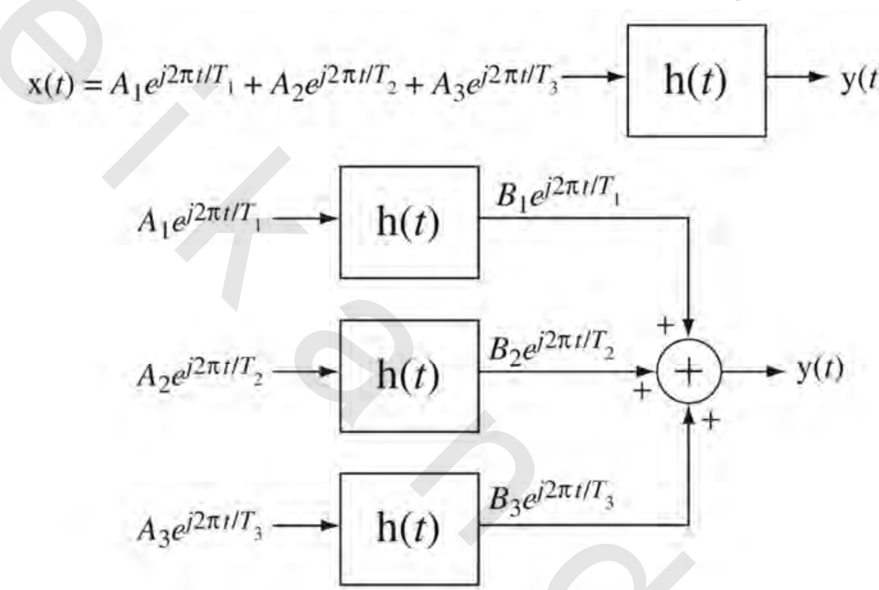
## (٦.٢) تتابع فورير للزمن المستمر

**مفاهيم أساسية**

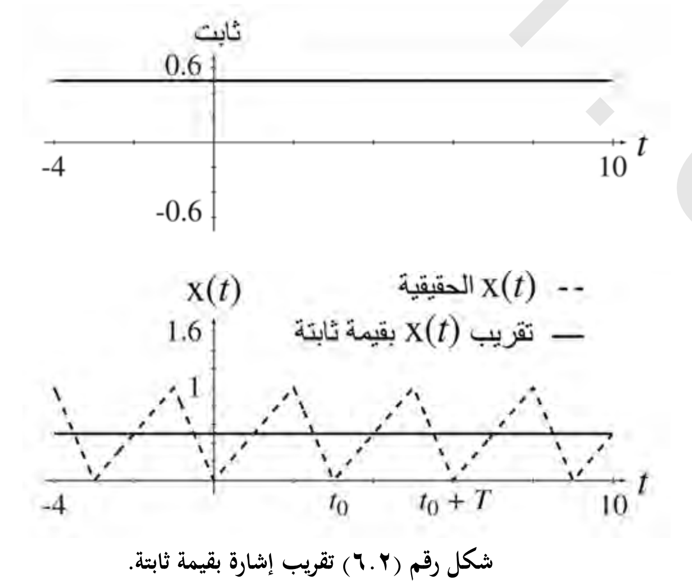
أحد المواقف الشائعة في تحليل الإشارات والأنظمة إثارة الأنظمة LTI بإشارات دورية. نتيجة مهمة جداً من الفصل ٥ هي أنه إذا تمت إثارة نظام LTI عن طريق إشارة جيبية، فإن الاستجابة تكون جيبية أيضاً، بالتردد نفسه ولكن بمقدار وزاوية مختلفتين. يحدث ذلك بسبب أن الدالة المميزة للمعادلات المختلفة التي تصف الأنظمة LTI تكون أسساً مركبة، والجيب يكون مجموعاً خطياً من الأسس المركبة.

هناك نتيجة مهمة أيضاً من الفصل ٤ هي أنه إذا تمت إثارة نظام LTI بمجموعة من الإشارات، فإن الاستجابة الكلية تكون مجموع الاستجابات لكل واحدة من الإشارات على حدة. إذا كانت هناك طريقة للتعبير عن الاشارات الاختيارية كمجموع خطي من الجيوب، فإننا يمكننا استخدام نظرية التجميع لإيجاد استجابة أي نظام LTI لأي إشارة اختيارية عن طريق جمع الاستجابات لهذه الجيوب المختلفة. إن التعبير عن الإشارة الجيبية كمجموع خطي من الجيوب تسمى تتابع فورير. هذه الجيوب من الممكن أن تكون جيوباً حقيقية على الصورة $A\cos(2\pi t/T_0+\theta)$ أو من الممكن أن تكون جيوباً مركبة على الصورة $Ae^{j2\pi t/T_0}$.

في البداية عند تقديم فكرة التعبير عن الإشارات الحقيقية كمجموع خطي من الجيوب المركبة، فإن الطلاب في العادة يقعون في حيرة ويسألون لماذا نقدم بعداً آخر (قد يبدو غير ضروري) وهو الأرقام والدوال التخيلية. لقد حدد أويلر Euler العلاقة $e^{jx}=\cos(x)+j\sin(x)$ التي تبين العلاقة القريبة جداً بين الجيوب الحقيقية والتخيلية. سيتضح فيما بعد، ونتيجة المنهج المدمج الناتج، ونتيجة التبسيطات الحسابية المعينة التي تحدث عند استخدام الجيوب المركبة، فإنها في الحقيقة تكون أكثر سهولة وقوة في التحليل عن الجيوب الحقيقية. ولذلك فإننا نشجع القارئ أن يؤجل هذه الحيرة لفترة بسيطة حتى نعود لها مرة أخرى.




**شكل رقم (٦.١). التكافؤ بين استجابة نظام LTI لإشارة إثارة ومجموع استجابات النظام لمجموعة من الجيوب المركبة التي يكون مجموعها مكافئاً للإثارة.**

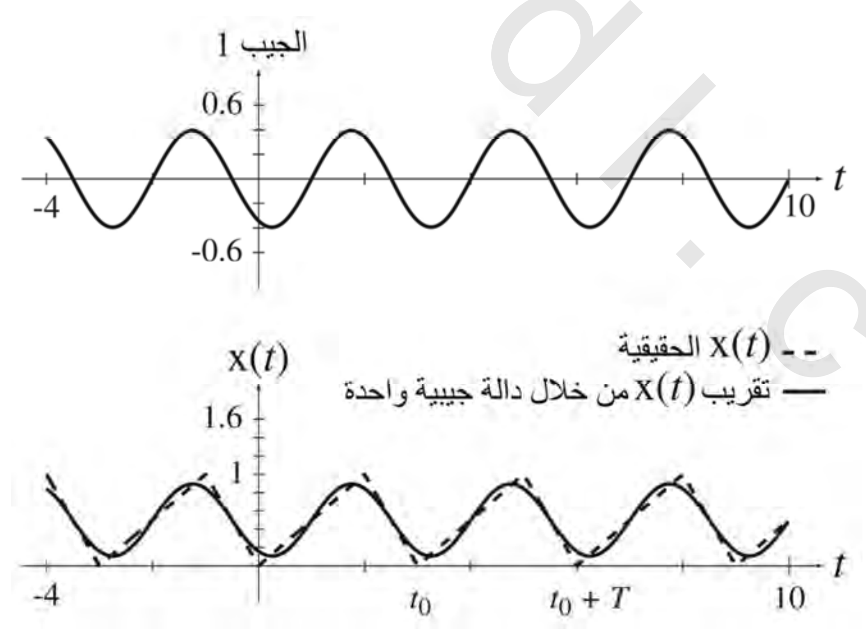



**شكل رقم (٦.٢) تقريب إشارة بقيمة ثابتة.**

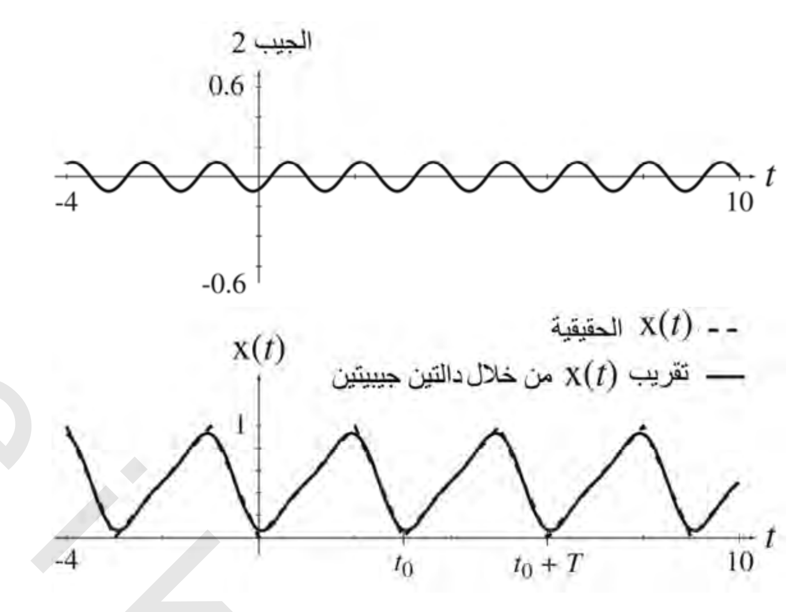
إذا كنا قادرين على التعبير عن إشارة إثارة كمجموع خطي من الجيوب، فإنه يمكننا أن نستفيد من خاصية الخطية ونظرية التجميع ونطبق كل جيب على حدة على النظام، وبعد ذلك نقوم بتجميع كل هذه الاستجابات للحصول على استجابة النظام الكلية كما في شكل (٦.١).

افترض إشارة اختيارية x(t) المطلوب التعبير عنها كمجموع خطي من الجيوب على فترة زمنية من زمن ابتدائي $t_0$ حتى زمن نهائي $t_0+T$ كما في الشكل(٦.٢) الخط المقطع. في هذا التوضيح سنستخدم جيوباً ذات قيم حقيقية لنجعل الرسم بسيطاً بقدر الإمكان.

في شكل (٦.٢) تم تقريب الإشارة بقيمة ثابتة تساوي 0.5، التي تمثل متوسط قيمة الإشارة في الفترة $t_0<t<t_0+T$. القيمة الثابتة تعتبر حالة خاصة من الدالة الجيبية، إنها جيب التمام عندما يكون التردد يساوي صفراً. إن ذلك يعتبر أفضل تقريب للإشارة x(t) بقيمة ثابتة. كلمة أفضل هنا تعني أن لها أقل متوسط لمربع الخطأ بين x(t) والقيمة المقربة. بالطبع فإن هذه القيمة الثابتة، على الرغم من أنها أفضل تقريب الآن، ليست تقريباً جيداً جداً لهذه الإشارة. يمكننا أن نجعل التقريب أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية دورتها الأساسية تساوي دورة الإشارة x(t) إلى القيمة الثابتة كما في شكل (٦.٣). هذا التقريب الأخير يعتبر تحسيناً كبيراً عن التقريب السابق ويعتبر التقريب الأفضل الذي يمكن الحصول عليه باستخدام قيمة ثابتة ودالة جيبية واحدة لها التردد الأساسي نفسه للإشارة x(t). يمكننا تحسين التقريب أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية أخرى لها تردد ضعف التردد الأساسي كما في شكل (٦.٤).

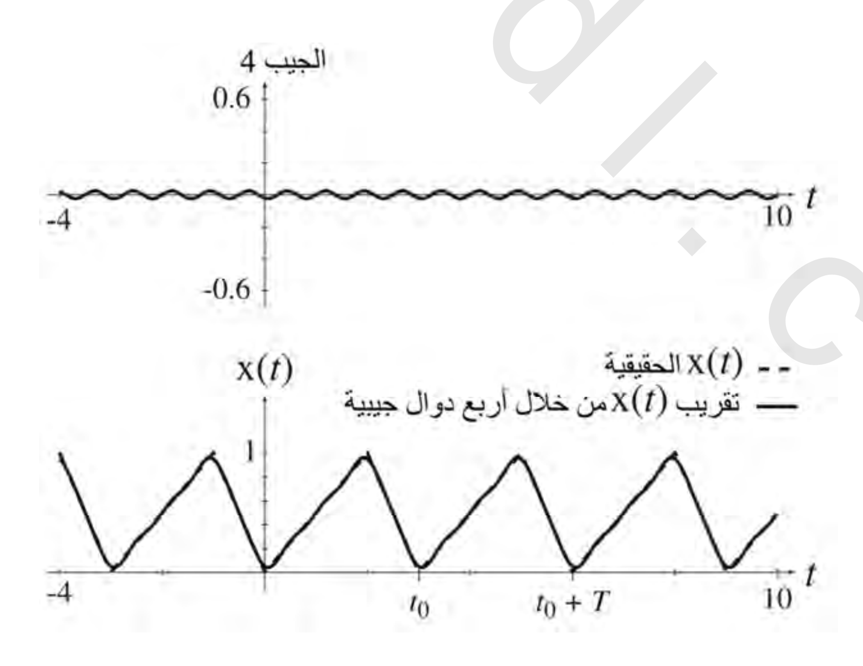



**شكل رقم (٦.٣) إشارة مقربة بقيمة ثابتة ودالة جيبية واحدة.**




**شكل رقم (٦.٤) إشارة مقربة بقيمة ثابتة ودالتين جيبيتين.**

إذا تم الاستمرار في إضافة الدوال الجيبية المختارة جيداً والتي ترددها يكون مضاعفات عليا صحيحة من التردد الأساسي للإشارة x(t)، فإن التقريب يصبح أفضل وأفضل، وفي النهاية عندما يقترب عدد الدوال الجيبية من الما لانهاية، فإن التقريب يصبح حقيقياً أي مطابقاً للإشارة الحقيقية x(t) كما في شكل (٦.٥) وشكل (٦.٦).




**شكل رقم (٦.٦) إشارة مقربة بقيمة ثابتة وأربع دوال جيبية.**

الجيب المضاف ذو التردد المساوي لثلاثة أضعاف التردد الأساسي يكون له مقدار يساوي صفراً، مما يبين مثل هذا الجيب لا يحسن من نتيجة التقريب. بعد إضافة الجيب الرابع ، فإن التقريب يصبح جيداً إلى حد ما مما ، يصعب معه التفريق بالنظر بينه وبين الدالة الحقيقية ، كما في شكل (٦.٦).

في هذا المثال كان التقريب يقترب من الإشارة الحقيقية في الزمن $t_0<t<t_0+T$ ، وأيضاً في كل الأزمنة ؛ لأن الدورة الأساسية للتقريب هي نفسها الدورة الأساسية للإشارة $x(t)$. من أكثر تطبيقات تتابع فورير شيوعاً هي تمثيل أي إشارة في الفترة $t_0<t<t_0+T$ ولكن ليس بالضرورة خارج هذه الفترة. ولكن في تحليل الإشارات والأنظمة يكون هذا التمثيل في العادة لإشارات دورية وتكون الدورة الأساسية للتمثيل في العادة أيضاً دورة مثل الإشارة بحيث يكون التعبير محققا عند كل الأزمنة ، وليس فقط في الفترة $t_0<t<t_0+T$. في هذا المثال كانت الإشارة الأصلية وتمثيلها لهما الدورة الأساسية نفسه ولكن في العموم من الممكن أن تكون دورة التمثيل أي دورة أخرى ، سواء كانت أساسية أم لا ، فإن التمثيل للإشارة يظل محققاً عند أي زمن.

كل واحدة من الدوال الجيبية المستخدمة في التقريب في المثال السابق كانت على الصورة $A\cos(2\pi kt/T+\theta)$. باستخدام قاعدة حساب المثلثات التالية :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

يمكننا التعبير عن الدالة الجيبية السابقة كما يلي :

$$A\cos(2\pi kt/T+\theta)=A\cos(\theta)\cos(2\pi kt/T)- A\sin(\theta)\sin(2\pi kt/T)$$

إن هذا يثبت أيضاً أن أي دالة جيب تمام مزاحة يمكن التعبير عنها أيضاً كمجموع من جيوب التمام غير المزاحة والجيوب المزاحة بالدورة نفسها إذا أحسن اختيار هذه المقادير. هذا التجميع الخطي لكل الجيوب التي يتم التعبير عنها كمجموع من جيوب التمام والجيوب يسمى تتابع فورير المستمر زمنياً continuous time Fourier series, CTFS والتي يمكن كتابتها كما يلي :

$$x(t)=a_x[0]+\sum_{k=1}^{\infty}a_x[k]\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)+b_x[k]\sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

حيث $a_x[0]$ هي القيمة المتوسطة للإشارة في التمثيل الزمني ، وk هي رقم التوافق harmonic و $a_x[k]$ و $b_x[k]$ هي دوال في المتغير k تسمى الدوال التوافقية. لقد استخدمنا هنا الرمز [.] ليحتوي المعامل k لأن رقم التوافق يكون دائما رقما صحيحا. الدوال التوافقية تضع مقادير الجيوب وجيوب التمام و k تحدد التردد. لذلك فإن الجيوب وجيوب التمام ذات الترددات العليا تكون تردداتها مضاعفات صحيحة من التردد الأساسي وهذا المضاعف يكون هو k. فمثلا الدالة $\cos(2\pi kt/T)$ تكون هي التوافق رقم k لجيب التمام. دورة هذا التوافق هي T/K وترددها الدوري هو k/T.

التعبير عن أي إشارة بهذه الطريقة كمجموع خطي من الجيوب وجيوب التمام ذات القيمة الحقيقية تسمى الصورة المثلثية لتتابع فورير المستمر زمنياً CTFS.

لأغراض خاصة، فإنه من المهم أن نمهد هنا لما سيأتي فيما بعد لنرى التكافؤ مع الصورة المركبة لتتابع فورير المتقطع زمنياً CTFS. كل جيب وجيب ذو قيمة حقيقية يمكن استبدالهما بالمجموع الخطي للأسس المركبة على الصورة :

$$\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)=\frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}}-e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{j2} \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)=\frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}}+e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2}$$

إذا أضفنا جيب التمام والجيب مع المقادير $a_x[k]$ و $b_x[k]$، على التوالي لأي توافق رقم k نحصل على :

$$a_x[\mathrm{k}]\cos\left(\frac{2\pi\mathrm{kt}}{\mathrm{T}}\right)+b_x[\mathrm{k}]\sin\left(\frac{2\pi\mathrm{kt}}{\mathrm{T}}\right)=a_x[\mathrm{k}]\frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}}+e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2}+b_x[\mathrm{k}]\frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}}-e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{j2}$$

بدمج الأسس المتماثلة في الطرف الأيمن نحصل على :

$$a_x[\mathrm{k}]\cos\left(\frac{2\pi\mathrm{kt}}{\mathrm{T}}\right)+b_x[\mathrm{k}]\sin\left(\frac{2\pi\mathrm{kt}}{\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{2}\{(a_x[\mathrm{k}]-jb_x[k])e^{j\frac{2\pi kt}{T}}+(a_x[k]+jb_x[k])e^{j\frac{-2\pi kt}{T}}\}$$

$$a_x[\mathrm{k}]\cos\left(\frac{2\pi\mathrm{kt}}{\mathrm{T}}\right)+b_x[\mathrm{k}]\sin\left(\frac{2\pi\mathrm{kt}}{\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}(a_x[k]-jb_x[k])e^{j2\pi kt/T}\\+(a_x[k]+jb_x[k])e^{-j2\pi kt/T}\end{Bmatrix}$$

والآن إذا حددنا الثوابت التالية :

$c_x[0]=a_x[0]$ ، $c_x[k]=(a_x[k]-jb_x[k])/2$ حيث $k>0$ و $c_x[-k]=c_x^*[k]$

فإنه يمكننا كتابة :

$$a_x[k]\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)+b_x[k]\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)=c_x[k]e^{j\frac{2\pi kt}{T}}+c_x[-k]e^{-j\frac{2\pi kt}{T}},\quad k>0$$

ولدينا المقدار $c_x[k]$ للجيب المركب $e^{j2\pi kt/T}$ عند المضاعفات الصحيحة الموجبة والسالبة للتردد الدوري 1/T. مجموع كل هذه الجيوب المركبة والثابت $c_x[0]$ يكافئ الدالة الأساسية، تماماً مثل مجموع جيوب وجيوب التمام والكمية الثابتة في الشرح السابق.

لتضمين الكمية الثابتة $c_x[0]$ في الشكل العام للجيوب المركبة سنفتضه أنه يمثل التوافقة رقم صفر k=0 من التردد الأساسي. بفرض k=0 فإن الجيب المركب $e^{j2\pi kt/T}$ سيساوي 1 وإذا قمنا بضربه في الاختيار الصحيح لمعامل $c_x[0]$ فإنه يمكننا تكملة كل تمثيل CTFS. وسنرى في المواضيع التالية أن الصورة العامة نفسها لإيجاد $c_x[k]$ لأي قيمة لـ k لا تساوي الصفر يمكن استخدامها أيضاً، بدون أي تعديل لإيجاد $c_x[0]$، وأن $c_x[0]$ هي ببساطة القيمة نفسها المتوسطة في الزمن التمثيلي $t_0<t<t_0+T$ للدالة المطلوب تمثيلها. $c_x[k]$ هي دالة التوافق المركبة للإشارة x(t). تتابع فورير

المستمر زمنياً CTFS والمركب يكون أكثر كفاءة من الصورة المثلثية ؛ لأنه توجد دالة توافق واحدة بدلاً من اثنين. لذلك يمكن كتابة تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS بصورة أكثر ترابطا كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T}$$ المعادلة رقم (٦.١)

لقد تأكدنا حتى الآن أن هذه الدوال التوافقية $c_x[k]$ موجودة ولكننا لم نوضح كيفية حسابها ، أو إيجادها. إن ذلك سيكون موضوع الجزء التالي.

**التعامدية والدوال التوافقية**

في تتابع فورير ، تحدد الكمية $c_x[k]$ مقدار وزاوية الجيوب المركبة التي تكون متعمدة فيما بينها. التعامد بين دالتين يعني أن الضرب القياسي للدالتين في الزمن على فترة زمنية معينة يساوي صفراً. الضرب القياسي هو تكامل حاصل ضرب إحدى الدالتين والمرافق المركب للدالة الأخرى على فترة زمنية معينة ، في هذه الحالة الفترة الزمنية هي T. لكي تكون الدالتان $x_1$ و $x_2$ متعامدتين على الفترة $t_0<t<t_0+T$ ، فإن :

$$\underbrace{(x_1(t), x_2(t))}_{\text{الضرب القياسي}} = \int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t) x_2^*(t) = 0$$

يمكننا أن نبين أن الضرب القياسي للجيب المركب $e^{j2\pi kt/T}$ والجيب المركب $e^{j2\pi qt/T}$ على الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$ يكون صفراً إذا كانت كل من k و q أرقاماً صحيحة و $k\neq q$. يمكننا أن نكتب الضرب القياسي لهاتين الدالتين على الصورة :

$$\left(e^{j2\pi kt/T}, e^{j2\pi qt/T}\right) = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi kt/T} e^{-j2\pi qt/T} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi(k-q)t/T} dt$$

باستخدام قاعدة أويلر :

$$\left(e^{j2\pi kt/T}, e^{j2\pi qt/T}\right) = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[cos\left(2\pi \frac{k-q}{T} t\right) + jsin\left(2\pi \frac{k-q}{T} t\right)\right] dt$$

حيث إن كل من k و q أرقام صحيحة ، فإنه إذا كانت $k\neq q$ ، فإن كلاً من دالتي الجيب وجيب التمام يتم تكاملهما على الدورة الكاملة (أو عدد صحيح من الدورة الأساسية). التكامل المحدود لأي جيب (بتردد لا يساوي الصفر) على أي دورة كاملة يساوي صفراً. إذا كانت k=q فإن ما تحت التكامل يصبح $\cos(0)+\sin(0)=1$ وسيكون الضرب القياسي في هذه الحالة يساوي T. أما إذا كانت $k\neq q$ فإن قيمة الضرب القياسي في المعادلة (٦.٢) سيساوي صفراً. وعلى ذلك فإن أي جيبين مركبين بعدد صحيح من الدورات الأساسية في الفترة $t_0<t<t_0+T$ سيكونان متعامدين ، إلا إذا كانا لهما العدد نفسه من الدورات الأساسية. على ذلك يمكننا أن نخلص بأن الدوال التي على الصورة

$e^{j2\pi kt/T}$، و $-\infty<k<\infty$ تكون عدداً لا نهائي من الدوال، كل منها متعامد مع الآخر على الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$ حيث $t_0$ اختيارية.

يمكننا الآن أن نستفيد من هذا التعامد بضرب كل من طرفي معادلة تتابع فورير في $e^{j2\pi qt/T}$ حيث q رقم صحيح فنحصل على المعادلة التالية :

$$x(t)e^{-j2\pi qt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{-j2\pi kt/T}e^{-j2\pi qt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}}$$

الآن، إذا كاملنا الطرفين على الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$ نحصل على :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T}dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}}\right]dt$$

حيث إن k و t متغيران مستقلان، فإن تكامل المجموع على الجانب الأيمن يكافئ مجموع التكاملات. وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة كالتالي :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}}dt$$

وباستخدام حقيقة أن التكامل يساوي صفراً إلا إذا كان $k=q$، فإن المجموع :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}}dt$$

يتحول إلى $c_x[q]T$ ويمكننا كتابة :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T}dt = c_x[q]T$$

بالحل لإيجاد $c_x[q]$،

$$c_x[q] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T}dt$$

إذا كان هذا التعبير صحيحاً لـ $c_x[q]$، فإن $c_x[k]$ في تتابع فورير الأصلي في المعادلة (٦.١) يمكن كتابته كما يلي :

$$c_x[k] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi kt/T}dt \qquad \text{المعادلة رقم (٦.٣)}$$

من هذه الإثباتات نستنتج أنه، إذا كان التكامل في (٦.٣) يتقارب، فإن الإشارة الدورية x(t) يمكن التعبير عنها كما يلي :

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T}$ المعادلة رقم (٦.٤)

حيث :

$c_x[k] = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j2\pi kt/T}\, dt$ المعادلة رقم (٦.٥)

والرمز $\int_T$ يعني التكامل نفسه مثل $\int_{t_0}^{t_0+T}$ مع اختيار $t_0$ بطريقة اختيارية. وعلى ذلك فإن x(t) و $c_x[k]$ يكونان زوج تابع فورير المستمر زمنياً، والذي يمكن توضيحه بالرمز :

$$x(t) \overset{\mathcal{F}_s}{\underset{T}{\leftrightarrow}} c_x[k]$$

حيث الاتجاه من اليسار لليمين يمثل حساب تابع فورير، و من اليمين لليسار يعني أن $c_x[k]$ يتم حسابها مع اعتبار T هي الدورة الأساسية لتمثيل x(t) كتتابع فورير في الزمن المستمر CTFS.

هذه الاستنتاجات تمت اعتماداً على استخدام الدورة T للإشارة على أنها فترة التعامد وأيضاً على أنها الدورة الأساسية لتمثيل تتابع فورير المستمر زمنياً. من الممكن أن تكون T أي دورة للإشارة، بما في ذلك دورتها الأساسية $T_0$ وهي الدورة التي يشيع استخدامها عملياً. في هذه الحالة تصبح علاقة تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T_0}$$

وأيضاً :

$$c_x[k] = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi kt/T_0}\, dt = f_0 \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

حيث $f_0=1/T_0$ هي التردد الدوري الأساسي للإشارة x(t).

إذا كان تكامل الإشارة x(t) على الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$، لا يتقارب أو بمعنى آخر يتباعد، فإن تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS لا يمكن الحصول عليه. هناك شرطان آخران لإمكانية تطبيق الـ CTFS، والتي مع شرط تقارب التكامل تسمى شروط درشليت Dirichlet. شروط درشليت يمكن كتابتها كما يلي :

١- الإشارة يجب أن تكون قابلة للتكامل التام على الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$، بمعنى، $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|\, dt < \infty$

٢- يجب أن يكون للإشارة عدد محدود من القيم العظمى والصغرى في الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$.

٣- يجب أن يكون للإشارة عدد محدود من نقاط عدم الاتصال، وكلها لها حجم محدود، في الفترة الزمنية $t_0<t<t_0+T$.

هناك إشارات افتراضية تكون شروط درشليت لها غير محققة، ولكنها ليس لها أي استخدام هندسي معروف.

**تتابع فورير المثلثي المدمج**

افترض تتابع فورير المثلثي التالي :

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} a_x[k]\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k]\sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

باستخدام العلاقة :

$$Acos(x) + Bsin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x - tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right))$$

يمكننا أن نكتب ما يلي :

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_x^2[k]+b_x^2[k]}\, cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + tan^{-1}\left(-\frac{b_x[k]}{a_x[k]}\right)\right)$$

أو :

$$x(t) = d_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} d_x[k]\cos(\frac{2\pi kt}{T} + \theta_x[k])$$

حيث :

$d_x[0] = a_x[0]$ و $d_x[k] = \sqrt{a_x^2[k]+b_x^2[k]}$ ، و $k>0$

وأيضاً :

$\theta_x[k] = tan^{-1}\left(-\frac{b_x[k]}{a_x[k]}\right)$ و $k>0$

هذه العلاقة هي ما يسمى بتتابع فورير المثلثي المدمج. إنها كما نرى معبراً عنها بدوال ومعاملات ذوات قيم حقيقية وهي مدمجة إلى حد ما عن الصورة المثلثية ولكنها ما زالت ليست مدمجة مثل الصورة المركبة التي على الصورة $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x e^{j2\pi kt/T}$ الصورة المثلثة هي في الحقيقة التي استخدمت عن طريق بابتست جوزيف فورير Baptiste Joseph Fourier.

**مثال ٦.١**

**الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً CTFS للموجة المستطيلة**

أوجد الدوال التوافقية المركبة CTFS للدالة $x(t)=rect(t/\omega)*\delta T_0(t)$ حيث $\omega<T_0$ مستخدما دورتها الأساسية في التعبير الزمني.

الدورة الأساسية هي $T_0$ ولذلك فإن الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر ستكون :

$$c_x[k] = (\frac{1}{T_0})\int_{T_0} Arect\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_o(t)e^{-j2\pi kt/To}\,dt$$

فترة التكامل من الممكن أن تكون في أي مكان طالما أن طولها هو $T_0$. للتسهيل سنختار فترة التكامل لتكون $-T_0/2\le t<T_0/2$ ، وعلى ذلك فإن :

$$c_x[k] = (\frac{A}{T_0})\int_{-T_{0/2}}^{T_{0/2}} rect\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_o(t) e^{-j2\pi kt/To}\, dt$$

باستخدام $\omega<T_0$ وحقيقة أن هذه الفترة تحتوي دالة مستطيلة واحدة :

$$c_x[k] = \left(\frac{A}{T_0}\right)\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} rect\left(\frac{t}{\omega}\right) e^{-\frac{j2\pi kt}{T_0}}\, dt = (\frac{A}{T_0})\int_{-\omega/2}^{\omega/2} e^{-j2\pi kt/T_0}\, dt$$

$$c_x[k] = \left(\frac{A}{T_0}\right)\left[\frac{e^{-j2\pi kt/T_0}}{-j2\pi k/T_0}\right]_{-\omega/2}^{\omega/2} = A\left[\frac{e^{-j\pi k\omega/To} - e^{j\pi k\omega/T_0}}{-j2\pi k}\right] = A\frac{\sin(\frac{\pi k\omega}{T_0})}{\pi k}$$

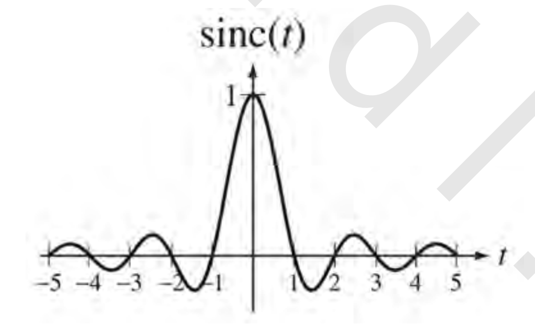
وفي النهاية يمكن كتابة :

$$x(t) = Arect\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_o(t) \overset{\mathcal{F}}{\underset{T}{\overset{s}{\leftrightarrow}}} c_x[k] = A\frac{\sin(\frac{\pi k\omega}{To})}{\pi k}$$

(على الرغم من أننا قصرنا ω في هذا المثال على أن تكون أقل من $T_0$ لتبسيط التحليل، إلا أن النتيجة ستكون صحيحة أيضاً لقيم ω أكبر من $T_0$ )

في المثال ٦.١ فقد أصبحت الدالة التوافقية هي $c_x[k] = A\frac{\sin(\frac{\pi k\omega}{To})}{\pi k}$. هذه الصورة الرياضية المكونة من جيب كمية معينة مقسومة على الكمية نفسه تحدث عادة وتكراراً في تحليلات فورير. لذلك سنحدد الآن دالة وحدة السنك unit sinc function كما هي موضحة في شكل (٦.٧) كما يلي :

$$sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$ المعادلة رقم (٦.٦)




**شكل رقم (٦.٧) دالة وحدة السنك.**

نستطيع الآن التعبير عن الدالة التوافقية في مثال ٦.١ كما يلي :

$$c_x[k] = \left(\frac{A\omega}{T_0}\right) sinc(\frac{k\omega}{T_0})$$

والتعبير عن زوج الـ CTFS كما يلي :

$$x(t) = Arect\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_o(t) \overset{\mathcal{F}}{\underset{T}{\overset{s}{\leftrightarrow}}} c_x[k] = \left(\frac{A\omega}{T_o}\right) sinc(\frac{\omega k}{T_0})$$

دالة وحدة السنك تسمى بدالة الوحدة ؛ لأن كل من ارتفاعها ومساحتها تساوي واحد.

واحد من الأسئلة الشائعة عند التعامل الأول مع الدالة سنك هو كيف نحدد القيمة sinc(0). عندما يكون المتغير المستقل t في الدالة sin(πt)/πt يساوي صفراً، فإن كل من البسط sin(πt) والمقام πt يؤوول إلى الصفر بحيث تنتهي بصورة غير محددة للدالة. الحل لذلك هو استخدام قانون لوبيتال L'Hopital، وعلى ذلك :

$$\lim_{t\to 0} sinc(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi\cos(\pi t)}{\pi} = 1$$

وعلى ذلك فإن sinc(t) تكون مستمرة عند t=0 وأيضاً sinc(0)=1.

**التقارب**

**الإشارات المستمرة**

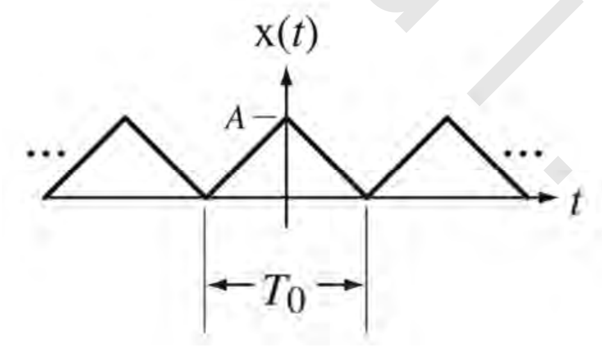
سنوضح في هذا الجزء كيف أن مجموع تتابع فورير المستمر زمنياً يقترب تماماً من الإشارة التي يمثلها مع اقتراب عدد الحدود المستخدمة في التقريب من الما لانهاية. سنوضح ذلك عن طريق فحص المجموع الجزئي التالي لكل القيم العليا من **N** :

$$X_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_x[k]e^{j2\pi kt/T}$$

كمثال أولي سنفترض هنا التعبير عن إشارة دورية مستمرة زمنياً كالموضحة في شكل (٦.٨) كتتابع فورير مستمر CTFS. كل من الإشارة، و CTFS يمكن كتابتهما كما يلي (باستخدام الدورة الأساسية للإشارة كدورة أساسية للتعبير عن CTFS) :

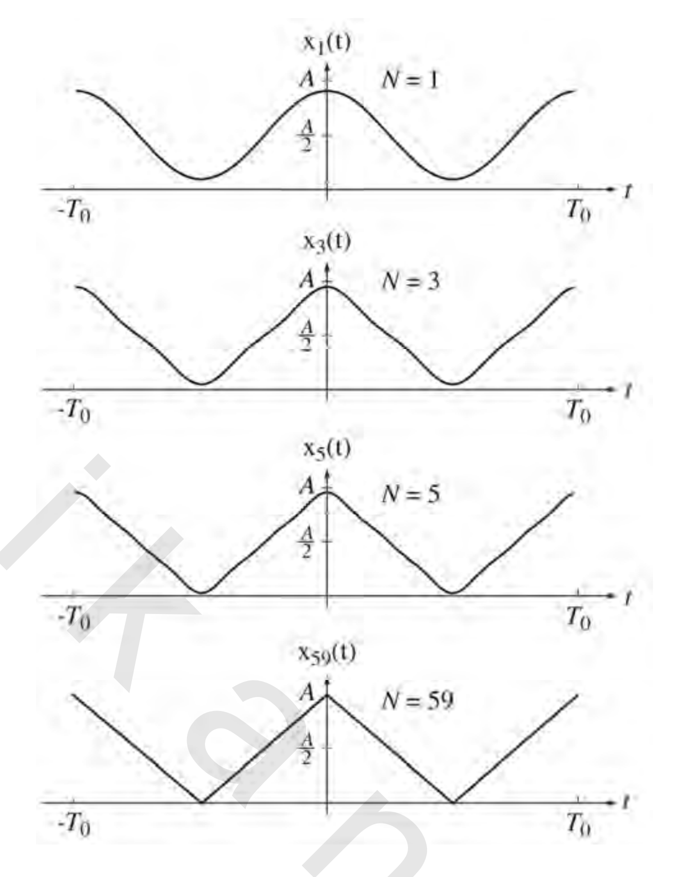
$$x(t)=A\text{tri}(2t/T_o)*\delta_{T_o}(t)$$

$$A\text{tri}(2t/To) * \delta To(t) \overset{\mathcal{F}_s}{\underset{T_0}{\leftrightarrow}} (A/2)sinc2(k/2)$$




**شكل رقم (٦.٨) دالة مستمرة مطلوب تمثيلها بتتابع فورير المستمر ومنيا CTFS.**

وتقريبات المجموع الجزئي $x_N(t)$ لقيم N=1, 3, 5, …, 59 موضحة في شكل (٦.٩).




**شكل (٦.٩) تقريبات متتالية قريبة من الموجة المثلثة.**

عندما N=59 (وربما عند قيم أقل لـ N)، فإنه من غير الممكن أن نفرق بين مجموع تقريبات CTFS والإشارة الأصلية من ملاحظة رسمهما على التدريج نفسه.

**الإشارات غير المتصلة**

افترض الإشارة الدورية التالية التي بها عدم اتصال كما في شكل (٦.١٠):

$$x(t) = Arect\left(2\frac{t - T_0/4}{T_0}\right) * \delta_{T_0}(t)$$

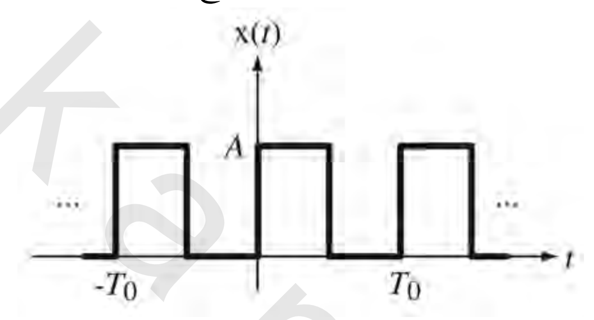
زوج تتابع فورير المتصل لهذه الدالة يمكن كتابتها كما يلي:

$$Arect\left(2\frac{t - T_0/4}{T_0}\right) * \delta_{To}(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (\frac{A}{2})(-j)^2 sinc(\frac{k}{2})$$

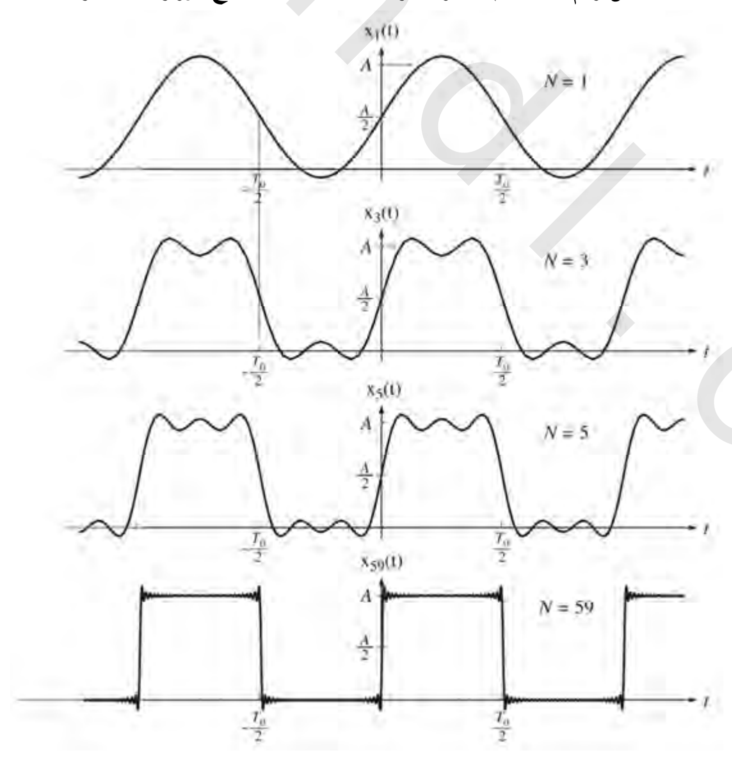
والتقريبات المختلفة $x_N(t)$ لقيم N=1, 3, 5, 59 موضحة في شكل (٦.١١).

على الرغم من أن الاستنتاج الرياضي يوضح أن الإشارة الأصلية وتمثيلها بتتابع CTFS يكونان متساويين في كل مكان، فإنه من الطبيعي أن نتعجب عما إذا كان ذلك سيكون حقيقيا بالنظر إلى شكل (٦.١١). هناك من الواضح وجود تخطٍّ وتذبذبات بالقرب من عدم الاتصال، والتي تكون غير موجودة في الأصل، أو تصبح أصغر

مع الزيادة في N. في الحقيقة فإن القيمة العظمى للتخطي بالقرب من أي عدم اتصال لا تنقص مع زيادة N، حتى لو اقتربت N من الما لانهاية. هذا التخطي يسمى بقانون جيبس نسبة إلى جوزيه جيبس Josiah Gibbs الذي كان أول من وصف هذه الظاهرة رياضياً. لاحظ أيضاً أن هذه التموجات يقتصر وجودها على أي مكان قريباً من أي عدم اتصال مع زيادة N. في النهاية ومع اقتراب N من الما لانهاية فإن ارتفاع هذا التخطي يكون ثابتاً ولكن عرضه يقترب من الصفر. الخطأ في تقريب المجموع الجزئي يكون هو الفرق بين هذا المجموع والإشارة الأصلية. في النهاية ومع اقتراب N من الما لانهاية فإن طاقة إشارة هذا الخطأ تقترب من الصفر؛ لأن الفرق في النقاط التي عرضها صفر عند نقاط عدم الاتصال لن يحتوي على أي طاقة. أيضاً عند أي قيمة معينة للزمن t (فيما عدا عند نقطة عدم الاتصال تماما)، فإن قيمة تمثيل تتابع فورير المستمر CTFS تقترب من الإشارة الأصلية مع اقتراب N من المالانهاية.

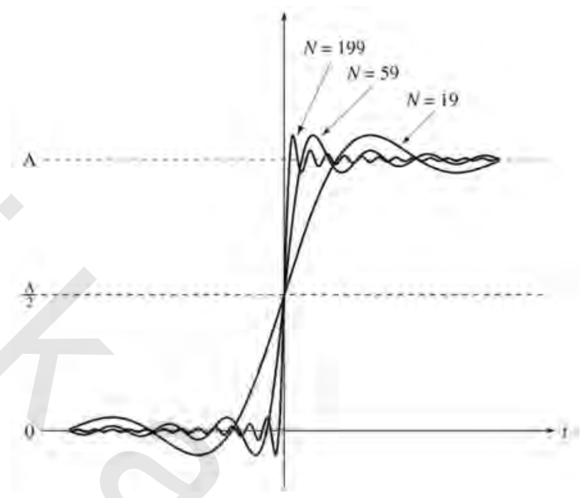



**شكل رقم (٦.١٠) إشارة غير متصلة لتمثيلها بتتابع فورير المستمر CTFS.**




**شكل رقم (٦.١١) تقريبات متتالية قريبة من الموجة المربعة.**

عند نقاط الانفصال فإن القيمة الدالية لتتابع فورير المستمر CTFS تكون دائما متوسط حدي الدالة الأصلية عندما تتقارب من أعلى ومن أسفل لأي قيمة لـ N. شكل (٦.١٢) هي منظر مكبر لتمثيل CTFS عند نقطة انفصال لثلاث قيم مختلفة لـ N. حيث إن طاقة إشارة الفرق بين الإشارتين تكون صفراً في أي فترة زمنية محددة، فإن تأثيرهما على أي نظام طبيعي حقيقي يكون هو نفسه ويمكن اعتبارهما متساويين للأغراض العملية.




**شكل رقم (٦.١٢) توضيح لظاهرة جيبس مع زيادة N.**

### أقل خطأ للمجموع الجزئي لتتابع فورير

إن تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS يتكون من مجموع لا نهائي من الجيوب. عموماً، للتساوي المطلق بين أي إشارة أصلية اختيارية وتمثيلها كتتابع فورير مستمر CTFS، فإنه لابد من استخدام عدد لانهائي من التتابعات. (الإشارات التي يمكن تحقيق التساوي لها بعدد محدود من التتابعات تسمى الإشارات المحدودة المجال ). إذا تم فرض تقريب المجموع الجزئي التالي :

$$X_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \qquad \text{المعادلة رقم (٦.٧)}$$

لأي إشارة $x(t)$ باستخدام أول N فقط من التوافقات لتتابع فورير المستمر، فإن الفرق بين $x_N(t)$ و $x(t)$ يكون هو خطأ التقريب $e_N(t)=x_N(t)-x(t)$. نحن نعلم من المعادلة (٦.٧) أنه عندما تؤول N إلى الما لانهاية فإن التساوي يتحقق عند كل نقطة من نقاط اتصال $x(t)$. ولكن عندما تكون N محدودة فهل الدالة التوافقية $c_x[k]$ لقيم $-N<k<N$ ستعطي أفضل تقريب ممكن للإشارة $x(t)$ ؟ بمعنى آخر، هل نستطيع اختيار دالة توافقية مختلفة $c_{x,N}[k]$ التي إذا تم استخدامها بدلاً من $c_x[k]$ في المعادلة (٦.٧) فمن الممكن أن تعطي تقريباً أفضل للإشارة $x(t)$ ؟

المهمة الأولى في الإجابة على هذا السؤال هي أن نحدد ما هو المقصود بعبارة "أفضل تقريب ممكن". في العادة يفترض أن المقصود من ذلك هو أن طاقة إشارة الخطأ $e_N(t)$ على مدار دورة واحدة T يكون أقل ما يمكن. دعنا الآن نوجد الدالة التوافقية الجديدة $c_{x,N}[k]$ التي ستعطي أقل طاقة إشارة للخطأ :

$$e_N(t) = \underbrace{\sum_{k=-N}^{N} c_{x,N}[k]e^{j2\pi kt/T}}_{x_{N(t)}} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi kt/T}}_{x(t)}$$

افترض :

$$c_y[k] = \begin{cases} c_{x,N}[k] - c_x[k], & |k| \le N \\ -c_x[k] & |k| > N \end{cases}$$

فإن :

$$c_N(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]e^{j2\pi kt/T}$$

طاقة إشارة الخطأ على دورة واحدة ستكون :

$$E_e = \frac{1}{T}\int_T |e_N(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_T \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]e^{j2\pi kt/T}\right|^2 dt$$

$$E_e = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]e^{j2\pi kt/T}\right)\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} c_y^*[q]e^{-j2\pi kt/T}\right)dt$$

$$E_e = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]c_y^*[k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty, q\neq k}^{\infty} c_y[k]c_y^*[q]e^{j2\pi(k-q)t/T}\right)dt$$

تكامل المجموع المزدوج يكون صفراً لكل $k\neq q$ لأن التكامل على دورة كاملة للأس $e^{j2\pi(k-q)t/T}$ يكون صفراً.

وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$E_e = \frac{1}{T}\int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]c_y^*[k]dt = \frac{1}{T}\int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_y[k]|^2 dt$$

بالتعويض عن $c_y[k]$ نحصل على :

$$E_e = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k=-N}^{N} \left|c_{x,N}[k] - c_x[k]\right|^2 + \sum_{|k|>N} |-c_x[k]|^2\right)dt$$

$$E_e = \sum_{k=-N}^{N} \left|c_{x,N}[k] - c_x[k]\right|^2 + \sum_{|k|>N} |c_x[k]|^2$$

كل الكميات التي يتم جمعها ليست سالبة ، وحيث إن المجموع الثاني يكون ثابتاً ، فإننا نريد المجموع الأول أن يكون أصغر ما يمكن. إنه يساوي صفراً إذا كان $c_{x,N}[k]=c_x[k]$ ، مما يثبت أن دالة التوافقات $c_x[k]$ تعطي أقل متوسط لمربع الخطأ في تقريب المجموع الجزئي.

### تتابع فورير للدوال الدورية الزوجية والفردية

لنفترض حالة التعبير عن الإشارات الدورية الزوجية $x(t)$ ذات الدورة الأساسية $T_o$ في تتابع فورير المستمر CTFS. الدالة التوافقية هي :

$$c_x[k]=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

بالنسبة للإشارات الدورية فإن هذا التكامل لا يعتمد على نقطة البداية. ولذلك يمكننا إعادة كتابة هذا التكامل كما يلي :

$$c_x[k]=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt-\\ \displaystyle j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt\end{bmatrix}$$

في التكامل الأول في الطرف الأيمن تكون الدالة $x(t)$ زوجية وجيب التمام $\cos(2\pi kt/T)$ زوجياً أيضاً ، وبالتالي فإن حاصل ضربهما يكون زوجياً. بالنسبة للتكامل الثاني فإن $x(t)$ زوجية والجيب $\sin(2\pi kt/T)$ فردي ، وبالتالي يكون حاصل ضربهما فردياً. باستخدام حقيقة أن تكامل أي دالة فردية على حدود متماثلة حول الصفر يكون صفراً ، وبالتالي فإن $c_x[k]$ ستكون حقيقية. بطريقة مماثلة يمكننا أن نبين أنه لأي دالة فردية فإن $c_x[k]$ ستكون تخيلية.

| |
|---|
| إذا كانت $x(t)$ زوجية وذات قيم حقيقية ، فإن $c_x[k]$ ستكون زوجية وذات قيم حقيقية.<br>إذا كانت $x(t)$ فردية وذات قيم حقيقية ، فإن $c_x[k]$ ستكون فردية وذات قيم تخيلية. |

### جداول تتابع فورير وخواصه

خواص تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS موضحة في جدول ٦.١ . يمكن إثبات كل هذه الخواص باستخدام تعريف تتابع فورير المستمر والدالة التوافقية الموضحين فيما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \underset{T}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x[k] = (\frac{1}{T}) \int_T x(t) e^{-j2\pi kt/T}\, dt$$

في خاصية ثنائية الضرب والالتفاف ، فإن التكامل التالي سيظهر :

$$x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

إن ذلك يشبه كثيراً التكامل الالتفافي الذي رأينا مُسبقاً فيما عدا أن مدى التكامل يكون على الدورة الأساسية T لتمثيل تتابع فورير المستمر CTFS بدلاً من ∞- إلى ∞.هذه العملية تسمى الالتفاف الدوري periodic convolution. في العادة يتم عمل الالتفاف الدوري على إشارتين دوريتين ، وعلى الدورة الأساسية T التي تكون مشتركة للإشارتين. الالتفاف الذي قدمناه في الفصل ٥ لم يكن التفافاً دورياً. الالتفاف الدوري يكافئ الالتفاف غير الدوري فيما يأتي. أي إشارة دورية $x_p(t)$ دورتها هي T يمكن التعبير عنها كمجموع من الإشارات متساوية التباعد غير الدورية $x_{ap}(t)$ كما يلي :

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{ap}(t-kT)$$

يمكننا أن نبين أن الالتفاف الدوري لـ $x_p(t)$ مع $y_p(t)$ يمكن كتابته كما يلي :

$$x_p(t) \otimes y_p(t) = x_{ap}(t) * y_p(t)$$

الدالة $x_{ap}(t)$ ليست دالة وحيدة أو فريدة. إنها يمكن أن تكون أي دالة تحقق الشرط التالي :

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{ap}(t-kT)$$

جدول ٦.٢ يبين بعض أزواج الـ CTFS الشائعة. كلها ، فيما عدا واحدة تعتمد على الدورة الأساسية T لتمثيل الـ CTFS الذي ستكون mTo ، حيث m أي رقم صحيح و $T_o$ هي الدورة الأساسية للإشارة.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/mT_0} \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x[k] = \frac{1}{mT_0} \int_{mT_0} x(t) e^{-j2\pi kt/mT_0}\, dt$$

**جدول رقم ٦.١ خواص تتابع فورير المستمر زمنياً**

| | |
|---|---|
| الخطية | $\alpha x(t)+\beta y(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \alpha c_x[k]+\beta c_y[k]$ |
| الإزاحة الزمنية | $x(t-t_0) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} e^{-j2\pi k t_0/T} c_x[k]$ |
| الإزاحة الترددية | $e^{j2\pi k t_0/T} x(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x[k-k_0]$ |
| الترافق | $x^*(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x^*[-k]$ |
| التفاضل الزمني | $\frac{d}{dt}\left(x(t)\right) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (j2\pi k/T) c_x[k]$ |
| الانعكاس الزمني | $x(-t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x[-k]$ |
| التكامل الزمني | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \frac{c_x[k]}{j2\pi k/T},\ k\neq 0\ \ if\ c_x[0]=0$ |
| نظرية بارسيفال | $\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_x[k]\rvert^2$ |
| تبادل الضرب والالتفاف | $x(t)\Theta y(t) = \int_T x(t)y(t-\tau)d\tau \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} T c_x[k] c_y[k]$ <br> $x(t)y(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_y[m]c_x[k-m] = c_x[k] * c_y[k]$ |
| تغيير الفترة الزمنية | $if\ x(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x[k]$ <br> $and\ x(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_{xm}[k]$ <br> $, c_{xm}[k] = \begin{cases} c_x[k/m], & k/m \text{ an intger} \\ 0, & otherwise \end{cases}$ |
| التحجيم الزمني | $if\ x(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_x[k]$ <br> $and\ z(t) = x(mt) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} c_z[k]$ <br> $, c_z[k] = \begin{cases} c_x[k/m], & k/m \text{ an intger} \\ 0, & otherwise \end{cases}$ |

**جدول رقم ٦.٢ بعض أزواج تتابع فورير المستمر زمنياً**

$$e^{j2\pi t/T_0} \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \delta[k-m]$$

$$cos(2\pi k/T_0) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (1/2)\delta[k-m] + \delta[k+m]$$

$$sin(2\pi k/T_0) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (j/2)\delta[k+m] - \delta[k-m]$$

$$1 \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \delta[k],\ T\ is\ arbitrary$$

$$\delta_{T_0}(t) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (1/T_0)\delta_m[k]$$

$$rect(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (\omega/T_0)sinc\ (\omega k/mT_0)\delta_m[k]$$

$$tri(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (\omega/T_0)sinc^2\ (\omega k/mT_0)\delta_m[k]$$

$$sinc(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} (\omega/T_0)rect\ (\omega k/mT_0)\delta_m[k]$$

$$t[u(t) - u(t-\omega)] * \delta_{T_0}(t) \underset{mT_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \frac{1}{T_0}\frac{[j(2\pi k\omega/mT_0)+1]e^{-j(2\pi k\omega/mT_0)}-1}{(2\pi k/mT_0)^2}\delta_m[k]$$

**مثال ٦.٢**

**الإثارة الدورية والاستجابة لنظام مستمر زمنياً**

يمكن وصف النظام المستمر زمنياً بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 0.04y'(t) + 1.58y(t) = x(t)$$

إذا كانت الإثارة هي $x(t)=tri(t)*\delta_5(t)$ ، فأوجد الإستجابة $y(t)$.

يمكن التعبير عن هذه الإثارة بتتابع فورير المستمر كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi kt/T_0}$$

حيث من جدول ٦.٢ يمكننا كتابة :

$$c_x[k] = \left(\frac{w}{T_0}\right) sinc^2\left(\frac{wk}{mT_0}\right)\delta_m[k]$$

بوضع $\omega=1$ و $To=5$ و $m=1$ فإن :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right) sinc^2\left(\frac{k}{5}\right)\delta_1[k]e^{j2\pi kt/5} = \left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} sinc^2\left(\frac{k}{5}\right)e^{j2\pi kt/5}$$

ونحن نعرف أن التعبير عن تتابع فورير المستمر يكون مجموعاً من الجيوب المركبة، والاستجابة لكل واحد من هذه الجيوب ستكون جيباً آخر بالتردد نفس. لذلك يمكن التعبير عن الاستجابة كما يلي :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]e^{j2\pi kt/5}$$

وكل جيب مركب في y(t) بتردد دوري أساسي k/5 يكون بسبب الجيب المركب في x(t) بالتردد نفسه.

بالتعويض عن هذه الاستجابة في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{j2\pi k}{5})^2 c_y[k]e^{j2\pi kt/5} + 0.04 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) c_y[k]e^{j2\pi kt/5} + 1.58 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k]e^{j2\pi kt/5} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi kt/5}$$

بتجميع بعض العناصر والتبسيط نحصل على :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\frac{j2\pi k}{5})^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58\,] c_y[k]e^{j2\pi kt/5} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi kt/5}$$

وعلى ذلك، فلأي قيمة معينة لـ k، فإن الإثارة والاستجابة سيرتبطان بالعلاقة التالية :

$$\left[(\frac{j2\pi k}{5})^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58\right] c_y[k] = c_x[k]$$

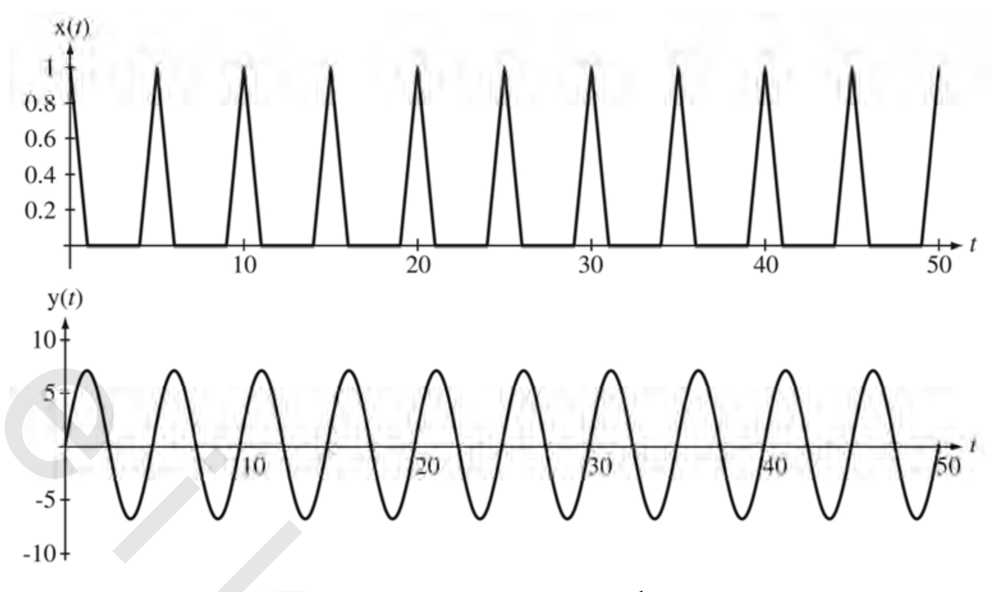
وبالتالي فإن :

$$\frac{c_y[k]}{c_x[k} = \frac{1}{(\frac{j2\pi k}{5})^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58}$$

الكمية $H[k] = \frac{c_y[k]}{c_x[k}$ تكافئ الاستجابة الترددية ويمكن بالمنطق نفسه أن نسميها الاستجابة التوافقية. استجابة النظام ستكون :

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sinc^2\left(\frac{k}{5}\right)}{(\frac{j2\pi k}{5})^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58} e^{j2\pi kt/5}$$

**شكل رقم (٦.١٣) دالة توافقات الإثارة، والاستجابة التوافقية للنظام، ودالة الاستجابة التوافقية.**




**شكل (٦.١٤) إثارة والاستجابة لها.**

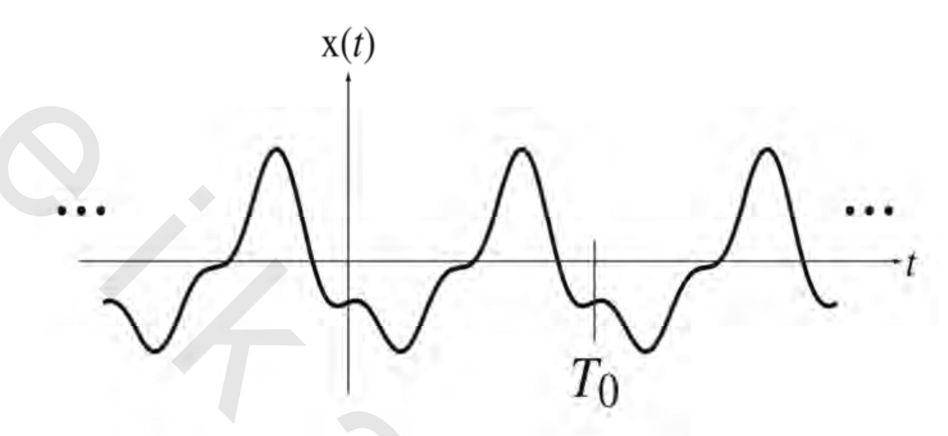
إن هذا التعبير السابق ذو الشكل المخيف إلى حد ما يمكن برمجته على الحاسب. بعض الإشارات، ودوالها التوافقية، والاستجابة التوافقية مبينة في شكل (٦.١٣) وشكل (٦.١٤).

يمكننا أن نرى من الاستجابة التوافقية أن النظام يستجيب بقوة عند التوافقية رقم واحد، وهي التردد الأساسي. الدورة الأساسية للإثارة x(t) هي $T_o$=5s. وبالتالي فإن y(t) يجب أن تكون لها استجابة قوية عند التردد 0.2Hz. بالنظر إلى شكل الاستجابة، فإننا سنرى إشارة تشبه الإشارة الجيبية ودورتها الأساسية هي ٥ ثوانٍ، وبالتالي فإن ترددها الأساسي هو 0.2Hz. مقدار كل التوافقات الأخرى، بما في ذلك k=0 تساوي الصفر تقريباً. وهذا هو السبب في أن القيمة المتوسطة للاستجابة تكون صفراً وتشبه الإشارة الجيبية، أي إشارة ذات تردد واحد. لاحظ أيضاً زاوية الاستجابة التوافقية عند التردد الأساسي. إنها تساوي 1.5536 راديان عند k=1، أي تساوي تقريبا $\pi/2$. هذه الإزاحة الزاوية ستغير جيب التمام إلى جيب. الإثارة دالة زوجية بمركبات جيب تمام فقط واستجابة تكون دالة فردية نتيجة هذه الإزاحة الطورية.

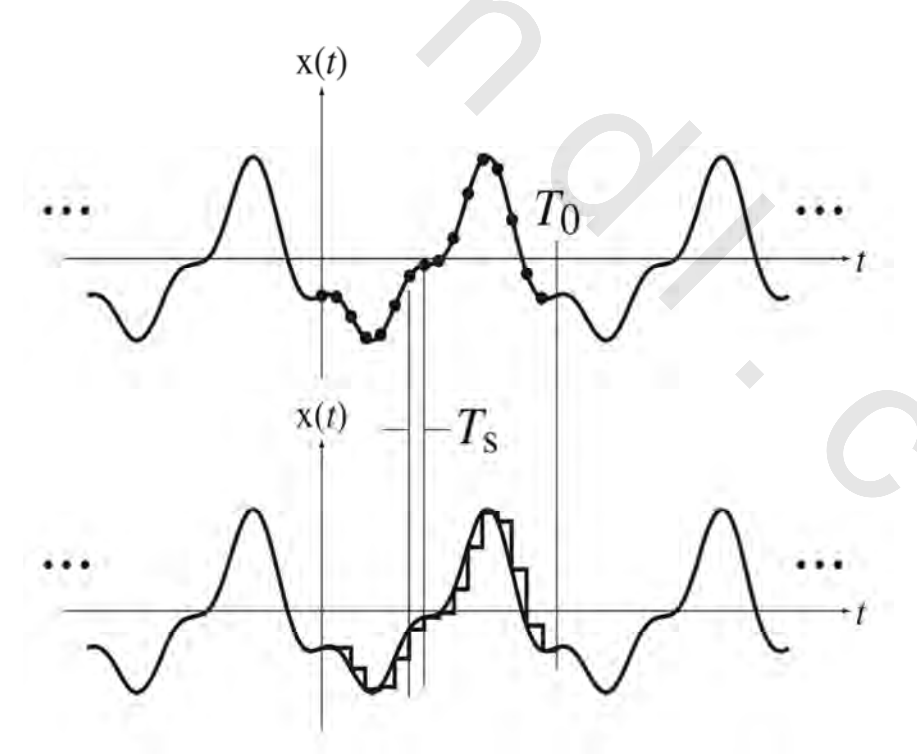
**الحساب العددي لتتابع فورير**

دعنا نفترض مثالا لنوع مختلف من الإشارات فقد نحتاج إلى حساب تتابع فورير المستمر، كما في شكل (٦.١٥). هذه الإشارة تعرض بعض المشاكل، حيث ليس من الواضح على الإطلاق كيف نصف هذه الإشارة. إنها ليست إشارة جيبية، أو أي إشارة لها شكل دالة رياضية معروفة. حتى الآن في دراستنا لتتابع فورير المستمر، فإنه لكي نحسب الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر لأي إشارة، فإننا نحتاج إلى وصف حسابي لهذه الإشارة. ولكن

ليس معنى أننا لا نستطيع وصف الإشارة حسابياً أنه لن يوجد تتابع فورير CTFS لها. إن معظم الإشارات الحقيقية التي قد نحتاج لتحليلها عملياً ليس لها وصف حسابي معروف. إذا كان لدينا مجموعة من العينات المأخوذة من دورة واحدة من هذه الإشارة، فإنه يمكننا أن نقدر الدالة التوافقية لتتابع فورير CTFS عددياً، وكلما كان عدد هذه العينات كبيراً، كان التقدير أكثر دقة كما في شكل (٦.١٦).




**شكل رقم (٦.١٥) إشارة دورية اختيارية.**




**شكل رقم (٦.١٦) عينات مأخوذة من الإشارة الاختيارية لتقدير الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً CTFS لها**

$$\mathbf{c_x[k]=\frac{1}{T}\int_T\ x(t)e^{-j2\pi kft/T}\,dt}$$

حيث إن نقطة البداية للتكامل تكون اختيارية، فإنه للتبسيط سنضع نقطة البداية لتكون t=0 وبالتالي :

$$c_x[k] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi kft/T}\,dt$$

نحن الآن لا نعرف الدالة x(t) ولكن إذا كان لدينا عدد N من العينات على مدى دورة واحدة تبدأ من t=0، فإن الزمن بين العينات سيكون Ts=T/N ويمكننا في هذه الحالة تقريب التكامل بمجموع لعدد من التكاملات كل منها يغطي الفترة الزمنية Ts كما يلي :

المعادلة رقم (٦.٨) $$c_x[k] \cong \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\int_{nTs}^{(n+1)Ts} x(nTs)e^{-j2\pi nTs/T}\,dt\right]$$

(في شكل (٦.١٦) نرى أن العينات تمتد على مدى دورة أساسية واحدة ولكن يمكنها أن تمتد على مدى أي فترة وسيظل التحليل صحيحا). إذا كانت العينات قريبة من بعضها بعضاً بما فيه الكفاية فإن x(t) لن يكون هناك تغير كبير فيها بين العينات، ويصبح التكامل في المعادلة (٦.٨)تقريباً جيداً. تفاصيل عملية التكامل موجودة في ملحق الويب رقم ح حيث تم بيان أنه بالنسبة للأرقام التوافقية |k|<N يمكن تقريب الدالة التوافقية كما يلي :

المعادلة رقم (٦.٩) $$c_x[k] \cong \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nTs)e^{-j2\pi nk/N}$$

المجموع الذي على الجانب الأيمن من المعادلة (٦.٩) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nTs)e^{-j2\pi nk/N}$$

عملية مهمة جداً في معالجة الإشارات تسمى تحويل فورير المتقطع discrete Fourier transform, DFT. وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة(٦.٩) كمايلي :

المعادلة رقم (٦.١٠) $c_x[k] \cong (1/N)DFT(x(nTs))$ حيث |k|<<N

وأيضاً :

$$DFT\big(x(nTs)\big) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nTs)e^{-j2\pi nk/N}$$

إن تحويل فورير المتقطع DFT يأخذ مجموعة من العينات التي تمثل دالة دورية على مدى دورة واحدة ويعطي مجموعة من الأرقام التي تمثل تقريبا للدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً CTFS لهذه الدالة مضروباً في عدد العينات N. هذه العملية أصبحت دالة ذاتية، أو مبرمجة داخلياً في العديد من لغات البرمجة المعروفة، ومنها ماتلاب. في ماتلاب اسم هذه الدالة هو fft، و التي تعني تحويل فورير السريع fast Fourier transform. إن هذا التحويل يعتبر خواريزم فعَّالاً لحساب DFT أو تحويل فورير المتقطع. (الـ DFT والـ FFT سيتم تغطيتهما بتفاصيل أكثر في الفصل ٧).

أبسط أشكال الدالة fft هو X=fft(x) ، حيث x هي متجه عينات الدالة مكون من N من العينات المرقمة في المدى 0≤n<N ، و X هي متجه من N من الأرقام المسترجعة من هذه الدالة في المدى 0≤k<N.

تحويل فورير المتقطع الذي على الصورة :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nTs)e^{-j2\pi nk/N}$$

يكون دورياً بالنسبة للمتغير k ودورته هي N. يمكن توضيح ذلك عن طريق إيجاد X[k+N] كما يلي :

$$X[k+N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nTs)e^{-\frac{j2\pi n(k+N)}{N}} = \frac{\overbrace{e^{-j2\pi n}}^{=1}}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nTs)e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = X[k]$$

التقريب في المعادلة (٦.٩) محقق لقيم |k|<<N. وهذا يحتوي على بعض القيم السالبة لـ k. ولكن الدالة fft تعطي قيم DFT في المدى من 0≤k<N. إن قيم الـ DFT لقيم ال k السالبة تكون هي نفسها مثل لقيم الـ k الموجبة المفصولة بدورة واحدة. وعلى ذلك، فمثلا لإيجاد X[-1] ، أوجد تكرارها الدوري X[N-1] ، التي تكون موجودة في المدى 0≤k<N.

من الممكن أن تكون هذه الطريقة العددية لإيجاد الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر مفيدة أيضاً في حالات تكون فيها صورة الدالة لـ x(t) معروفة ولكن التكامل :

$$c_x[k] = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

لا يمكن تنفيذه حسابياً أو تحليلياً.

**مثال ٦.٣**

**استخدام DFT لتقريب CTFS**

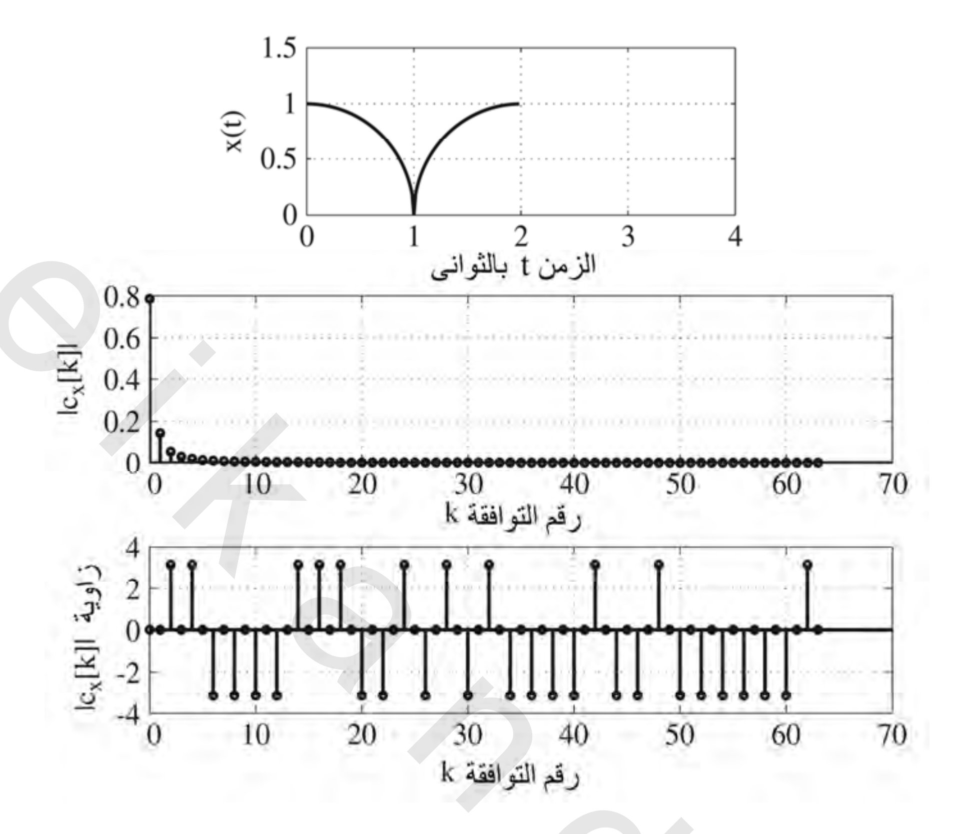
أوجد الدالة التوافقية التقريبية لتتابع فورير المستمر CTFS للدالة الدورية x(t)، التي يمكن وصف دورة واحدة منها كما يلي :

$$x(t) = \sqrt{1-t^2} \quad \text{و} \quad -1 \le t < 1$$

الدورة الأساسية لهذه الإشارة هي 2. لذلك يمكننا اختيار عدد صحيح من مضاعفات الرقم 2 على أنه الزمن الذي سنأخذ عليه العينات (تمثيل للزمن T). سنختار 128 عينة في دورة أساسية واحدة. برنامج ماتلاب التالي يحسب ويرسم الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS باستخدام تحويل فورير المتقطع DFT.

```
% برنامج لتقريب تتابع فورير المستمر باستخدام تحويل فورير المتقطع
% لدالة دورية موصوفة على مدى دورة واحدة بالمعادلة :
% x(t) = sqrt(1-t^2), -1 < t < 1
N = 128 ; % عدد العينات
T0 = 2 ; % الدورة الأساسية
T = T0 ; % زمن تمثيل الدالة
Ts = T/N ; % الزمن بين العينات
fs = 1/Ts ; % معدل أخذ العينات
n = [0:N-1]' ; % أرقام العينات
t = n*Ts ; % مدة أخذ العينات
% حساب قيمة الدالة عند زمن أخذ العينة
x = sqrt(1-t.^2).*rect(t/2) +...
sqrt(1-(t-2).^2).*rect((t-2)/2) +...
sqrt(1-(t-4).^2).*rect((t-4)/2) ;
cx = fft(x)/N ; % حساب تحويل فورير المتقطع
k = [0:N/2-1]' ; % متجه الأعداد التوافقية
% رسم النتائج
subplot(3,1,1) ;
p = plot(t,x,'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on ; axis('equal');
axis([0,4,0,1.5]) ;
xlabel('Time, t (s)') ; ylabel('x(t)') ;
subplot(3,1,2) ;
p = stem(k,abs(cx(1:N/2)),'k') ; set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('Harmonic Number, k') ; ylabel('|c_x[k]|') ;
subplot(3,1,3) ;
p = stem(k,angle(cx(1:N/2)),'k') ; set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',
4) ; grid on ;
xlabel('Harmonic Number, k') ; ylabel('Phase of c_x[k]') ;
```

شكل (٦.١٧) يبين رسماً لخرج هذا البرنامج.




**شكل رقم (٦.١٧) الدالة x(t) والتوافقات cx[k].**

في رسم الزاوية يوجد فقط ثلاث قيم مميزة وهي 0 و π و π–. الزاويتان π و π– متكافئتان، ولذلك كان من الممكن رسمهما على أنهما إما π أو π–. لقد حسب ماتلاب الزاوية ونتيجة أخطاء تقريبية في أثناء الحساب، فإنها أحياناً تكون رقم قريب جداً من π وأحياناً أخرى تكون رقم قريب جداً من الـ π–.

رسومات المقدار والزاوية لـ $c_x[k]$ في شكل (٦.١٧) تم رسمها في المدى $0\le k<N/2$. حيث إن $c_x[k]=c_x^*[-k]$ فإن ذلك يكون كافياً لتحديد $c_x[k]$ في المدى $-N/2\le k<N/2$، لذلك يكون دائماً من المطلوب رسم الدالة التوافقية في المدى $-N/2\le k<N/2$، ويمكن عمل ذلك عن طريق فهم أن الأرقام التي يعطيها تحويل فورير المقطع DFT تكون دورة واحدة تماما من دالة دورية. إذا كان ذلك هو الحال، فإن النصف الثاني من الأرقام التي تغطي المدى $N/2\le k<N$ يكون هو نفسه تماما مثل مجموعة الأرقام الواقعة الواقعة في المدى $-N/2\le k<0$. هناك دالة في ماتلاب تسمى fftshift تقوم باستبدال النصف الثاني من مجموعة الأرقام مع النصف الأول، وبالتالي فإن المجموعة الكاملة N من الرقام ستغطي المدى $-N/2\le k<N/2$ بدلاً من المدى $0\le k<N$.

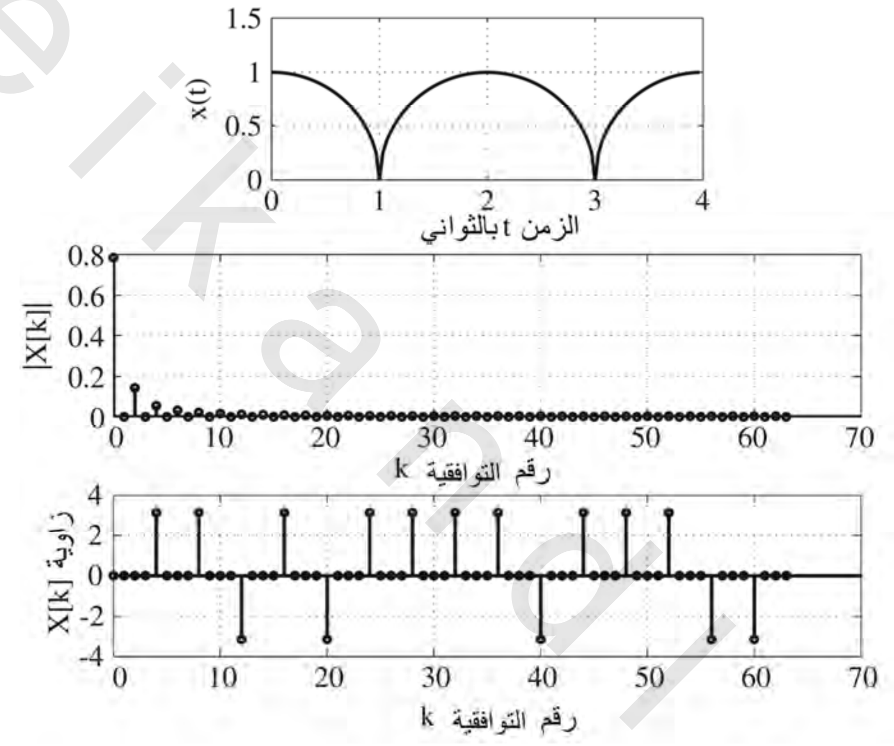
يمكننا تغيير برنامج ماتلاب لتحليل الإشارة على دورتين أساسيتين بدلاً من دورة واحدة عن طريق تغيير السطر :

```
T=T0;        %    تمثيل الزمن
```

إلى

```
T=2*T0       %    تمثيل الزمن
```

وستكون النتيجة كما هو مبين في شكل (٦.١٨).




**شكل رقم (٦.١٨) x(t) و X[k] باستخدام دورتين أساسيتين كتمثيل للزمن بدلاً من دورة واحدة.**

لاحظ الآن أن الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS تكون صفراً لكل القيم الفردية لـ k. لقد حدث ذلك نتيجة استخدامنا لاثنتين من دورات الدالة x(t) كتمثيل للزمن T. التردد الأساسي لتمثيل CTFS يكون نصف التردد الأساسي للدالة x(t). طاقة الإشارة تكون موجودة عند التردد الأساسي للإشارة x(t) وتوافقاته الزوجية التي تمثل التوافقات الزوجية لدالة تتابع فورير المستمر التوافقية، ولذلك فإن التوافقات الزوجية فقط هي التي ستختلف عن الصفر. التوافقية رقم k في التحليل السابق باستخدام دورة أساسية واحدة كتمثيل للزمن ستكون هي نفسها مثل التوافقية رقم 2k في هذا التحليل.

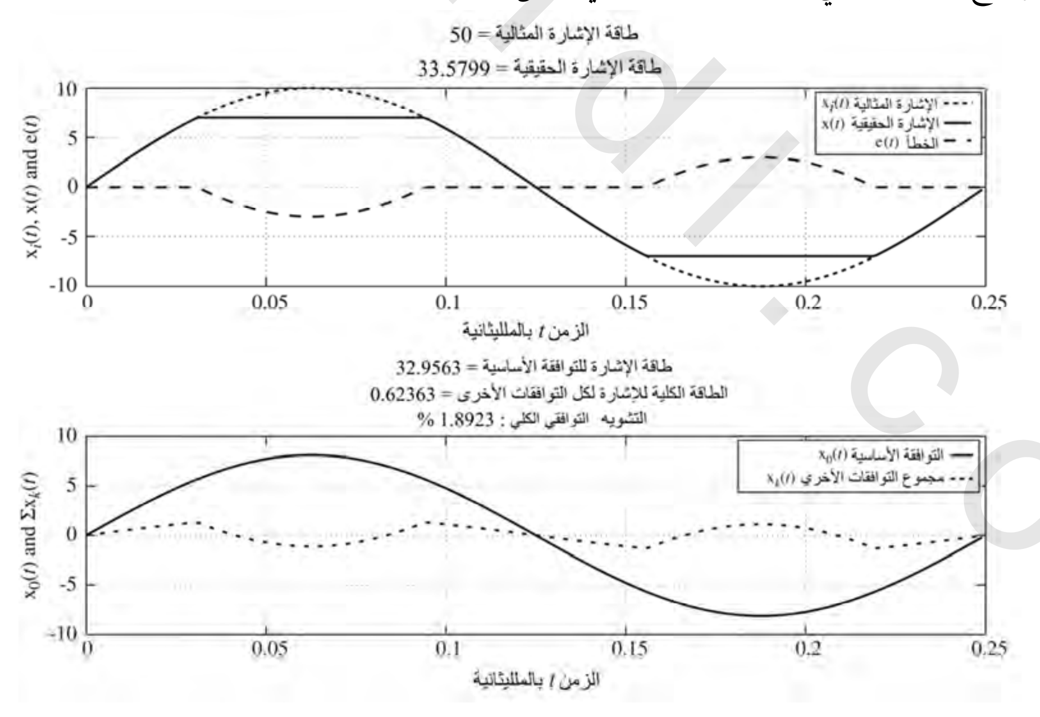
**مثال ٦.٤**

**حساب مركبة التشويه للتوافقات الكلية**

أحد أشكال الجدارة لبعض الأنظمة هو التشويه التوافقي الكلي total harmonic distortion, THD. إذا كانت إشارة الإثارة لأحد الأنظمة إشارة جيبية، فإن التشويه التوافقي الكلي THD في إشارة الاستجابة تساوي طاقة الإشارة الكلية في إشارة الاستجابة لكل التوافقات المختلفة عن التوافقة الأساسية ($k\neq\pm1$) مقسومة على طاقة الإشارة الكلية في إشارة الاستجابة عند التوافقة الأساسية.

غُذي مكبر سمعي بمعامل تكبير اسمي يساوي 100 عند التردد 4 كيلوهرتز بإشارة جيبية ترددها 4 كيلوهرتز أكبر مقدار لها يساوي 100 ميللي فولت. الاستجابة المثالية للمكبر من الممكن أن تكون $x_i(t)=10\sin(8000\pi t)$ فولت، ولكن إشارة الخرج الحقيقية للمكبر $x(t)$ كانت محدودة في المدى ±7 فولت، لذلك فإن الاستجابة الحقيقية تكون صحيحة لكل الجهود التي مقدارها أقل من 7 فولت ولكن لكل الجهود التي يكون مقدارها أكبر من 7 فولت يتم قصها عند القيمة ±7 فولت. احسب التشويه التوافقي الكلي THD لإشارة الاستجابة.

الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر $x(t)$ يمكن إيجادها تحليلياً ولكنها تكون أطول، وصعبة، وعرضة للخطأ. إذا كنا نبحث فقط عن THD، فإنه يمكننا إيجادها عددياً باستخدام تحويل فورير المتقطع وحاسب. ولقد تم ذلك في برنامج ماتلاب التالي، والنتيجة موضحة في شكل (٦.١٩) :




**شكل رقم (٦.١٩) نتائج حساب التشويه التوافقي الكلي THD.**

```
f0 = 4000 ; % التردد الأساسي للإشارة
T0 = 1/f0 ; % الدورة الأساسية للإشارة
N = 256 ; % عدد العينات في دورة واحدة
Ts = T0/N ; %  الزمن بين العينات
fs = 1/Ts ; % معدل أخذ العينات بالعينة/الثانية
t = Ts*[0:N-1]' ; %  متجه الزمن لرسم الإشارات
A = 10 ; % مقدار الإشارة المثالية
xi = A*sin(2*pi*f0*t) ; % الإشارة المثالية
Pxi = A^2/2 ; % طاقة الإشارة المثالية
x = min(xi,0.7*A) ; % قص الإشارة المثالية عند ٧ فولت
x = max(x,-0.7*A) ; % قص الإشارة المثالية عند سالب ٧ فولت
Px = mean(x.^2) ; % طاقة الإشارة الحقيقية
cx = fftshift(fft(x)/N); %  حساب الدالة التوافقية حتى
% k = +/- 128
k = [-N/2:N/2-1]' ; % متجه أرقام التوافقيات
I0 = fi nd(abs(k) == 1); % إيجاد قيم الدالة التوافقية عند التوافقية الأساسية
P0 = sum(abs(cx(I0)).^2); % حساب طاقة الإشارة للتوافقة الأساسية
Ik = fi nd(abs(k) ~= 1) ; %  حساب قيم الدالة التوافقية للتوافقيات غير
                % التوافقية الأساسية
Pk = sum(abs(cx(Ik)).^2); % حساب طاقة الإشارة للتوافقيات
THD = Pk*100/P0 ; % حساب التشويه الكلي للتوافقيات
% حساب قيم المركبات الأساسية للإشارة الحقيقية
x0 = 0*t ; for kk = 1:length(I0), x0 = x0 + cx(I0(kk))*exp(j*2*pi*
k(I0(kk))*f0*t) ; end
% حساب قيم مجموع مركبات الإشارة التي ليست توافقية أساسية في الإشارة الحقيقية
xk = 0*t ; for kk = 1:length(Ik), xk = xk + cx(Ik(kk))*exp(j*2*pi*
k(Ik(kk))*f0*t) ; end
x0 = real(x0); % إزالة أي أجزاء تخيلية متبقية نتيجة التقريب
xk = real(xk); % إزالة أي أجزاء تخيلية متبقية نتيجة التقريب
% رسم النتيجة وتسجيل طاقة الإشارة والتشويه الكلي للتوافقيات
```

```
ttl = ['Signal Power of Ideal Signal = ',num2str(Pxi)] ;
ttl = str2mat(ttl,['Signal Power of Actual Signal = ', num2str(Px)]);
subplot(2,1,1) ;
ptr = plot(1000*t,xi,'k:',1000*t,x,'k',1000*t,x-xi,'k--') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2) ;
xlabel('Time, {\itt} (ms)','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('x_i({\itt}), x({\itt}) and e({\itt})','FontName','Times','
FontSize',24) ;
title(ttl,'FontName','Times','FontSize',24) ;
ptr = legend('Ideal Signal, x_i({\itt})','Actual Signal, x({\itt})',
'Error, e({\itt})') ;
set(ptr,'FontName','Times','FontSize',18) ;
set(gca,'FontSize',18) ;
subplot(2,1,2) ;
ttl = ['Signal Power of Fundamental = ',num2str(P0)] ;
ttl = str2mat(ttl,['Total Signal Power of All Other Harmonics = ',
num2str(Pk)]) ;
ttl = str2mat(ttl,['Total Harmonic Distortion: ',num2str(THD),' %']) ;
ptr = plot(1000*t,x0,'k',1000*t,xk,'k:') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2) ;
xlabel('Time,{\itt} (ms)','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('x_0({\itt}) and \Sigma x_{\itk}({\itt})','FontName','Times',
'FontSize',24) ;
title(ttl,'FontName','Times','FontSize',24) ;
ptr = legend('Fundamental, x_0({\itt})','Sum of Other Harmonics,
x_{\itk}({\itt})') ;
set(ptr,'FontName','Times','FontSize',18) ;
set(gca,'FontSize',18) ;
```

التشويه الكلي للتوافقات THD كان 1.8923% مع هذا المقدار الخطير للقص البالغ ٪30 قص من كل قمة موجبة وسالبة. لذلك فإنه للحصول على أمانة تكبير جيدة للإشارة، فإن THD يجب أن تكون عموماً أقل من ٪1.

## (٦.٣) تحويل فورير للزمن المستمر

تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS يمثل أي إشارة دورية مع الفوائد الهندسية على مدار كل الأزمنة. بالطبع، فإن بعض الإشارات المهمة لا تكون دورية. ولذلك فإنه قد يكون من المفيد أن نمدد تتابع فورير المستمر CTFS لنكون قادرين على تمثيل الإشارات غير الدورية على مدار كل الأزمنة. يمكن عمل ذلك والنتيجة هي ما يسمى بتحويل فورير Fourier transform.

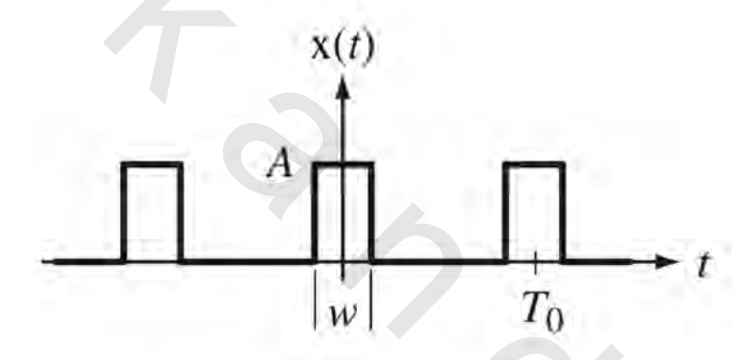
### تمديد تتابع فورير ليشتمل على الإشارات غير الدورية

الفرق البارز بين الإشارة الدورية والإشارة غير الدورية هو أن الإشارة الدورية تتكرر في زمن محدد يسمي الدورة. هذه الإشارة مفروض أنها تتكرر منذ الأبد وتستمر بهذه الدورة حتى الما لانهاية. الإشارة غير الدورية ليس لها دورة محددة. الإشارة غير الدورية من الممكن أن تكرر نموذجاً أو نمطاً معيناً عدة مرات خلال فترة زمنية معينة،

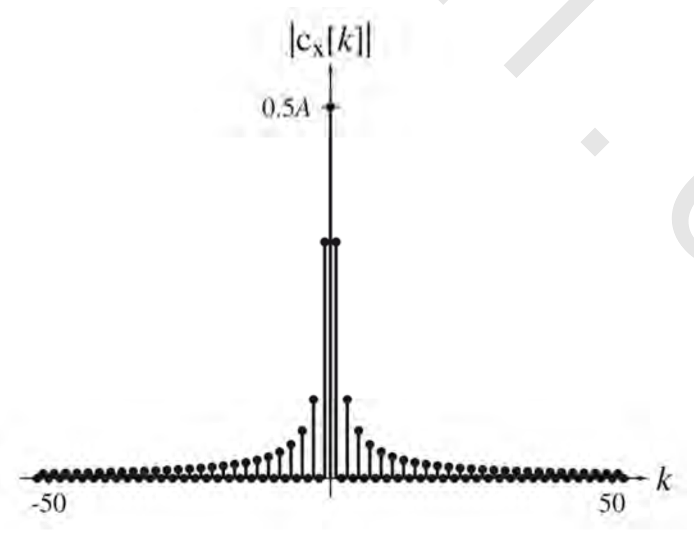
ولكن ليس على كل المدار الزمني. الانتقال من تتابع فورير إلى تحويل فورير يتم تحقيقه عن طريق إيجاد تتابع فورير لإشارة دورية، وبعد ذلك نجعل دورة هذه الإشارة تمتد إلى ما لانهاية. حسابياً، فإن القول بأن الدالة تكون غير دورية أو القول بأن الإشارة لها دورة ممتدة إلى الما لانهاية يكون هو القول نفسه أو المعنى نفسه.

لنفترض دالة في المجال الزمني x(t) تتكون من نبضات مستطيلة ارتفاعها هو A وعرضها هو ω ودورتها الأساسية هي $T_0$ كما في شكل (٦.٢٠). هذه الإشارة ستوضح الظاهرة التي تحدث عند جعل الدورة الأساسية تقترب من المالانهاية لأي إشارة عامة. تمثيل هذا القطار من النبضات بتتابع فورير المستمر CTFS، فإن الدالة التوافقية وجد أنها تساوي $c_x[k]=(A\omega/T_0)\text{sinc}(k\omega/T_0)$ مع $T=T_0$.

لنفترض أن $\omega=T_0/2$ (مما يعني أن الشكل الموجي يكون A لمدة نصف الزمن، ويساوي صفراً في النصف الآخر، مما يعني ٥٠٪ زمن خدمة duty cycle). وعلى ذلك فإن $c_k[k]=(A/2)\text{sinc}(k/2)$ يمكن رسمها كما في شكل (٦.٢١).



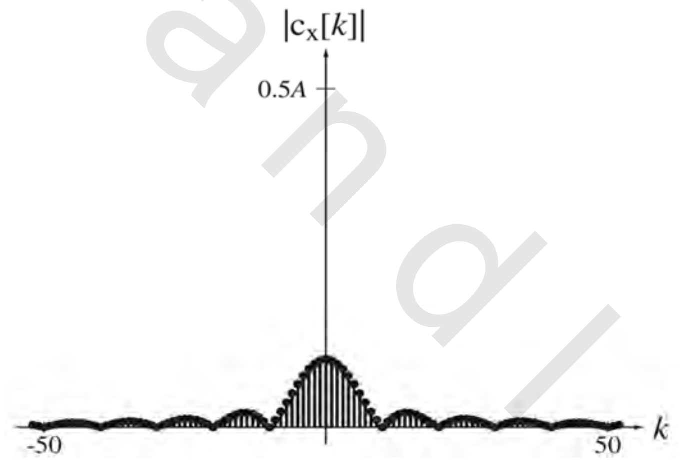

**شكل رقم (٦.٢٠) إشارة موجة مستطيلة.**



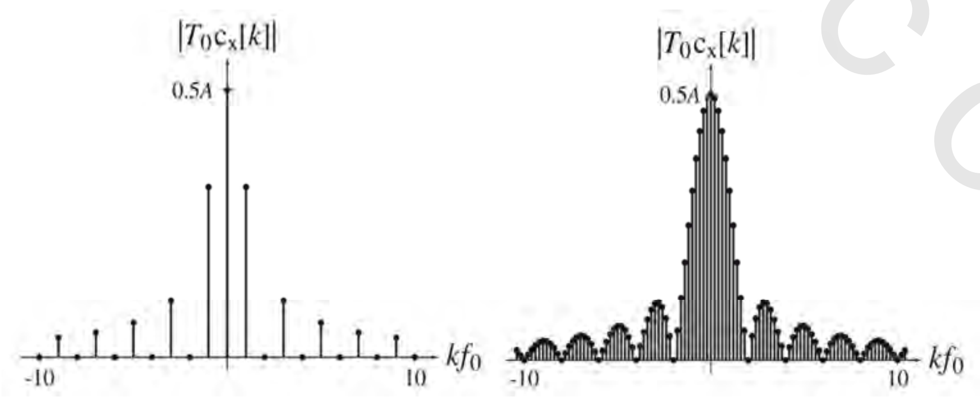

**شكل رقم (٦.٢١) مقدار الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر لإشارة مربعة الشكل وزمن الخدمة لها 50%.**

سنفترض الآن أن الدورة الأساسية $T_0$ زادت من 1 إلى 5 بينما لم تتغير ω. في هذه الحالة تصبح $c_x[0]$ تساوي 1/10 والدالة التوافقية للـ CTFS تصبح $c_x[k]=(1/10)\text{sinc}(k/10)$ كما في شكل (٦.٢٢).

القيمة العظمى لمقدار التوافقة تكون 5 مرات أقل من ذي قبل؛ لأن القيمة المتوسطة للدالة تكون 5 مرات أقل من ذي قبل. مع زيادة الدورة الأساسية $T_0$ فإن مقادير مقادير التوافقات تقع في دالة سنك sinc أعرض مع نقص في مقاديرها مع زيادة $T_0$. في النهاية ومع اقتراب $T_0$ من الما لانهاية فإن الشكل الموجي للدالة x(t) في النطاق الزمني تقترب من نبضة واحدة مستطيلة عند نقطة الأصل، وتقترب عينات الدالة التوافقية من سنك عرضه لا نهائي مع مقدار يقترب من الصفر. إذا قمنا بضرب $c_x[k]$ في $T_0$ قبل رسمها، فإن المقدار من الممكن أن لا يصل إلى الصفر مع اقتراب $T_0$ من الما لانهاية ولكن ستظل كما هي ويكون هناك فقط تعريض لدالة السنك. أيضاً فإن الرسم مع $k/T_0=kf_0$ بدلاً من الرسم مع k سيجعل التدريج الأفقي هو التردد بدلاً من رقم التوافقات ومن الممكن أن يظل عرض دالة السنك كما هو على هذا التدريج الجديد مع اقتراب $T_0$ من الما لانهاية (ونقص $f_0$). مع عمل هذين التغيرين، فإن الشكلين الأخيرين سيكونان كما في شكل (٦.٢٣).

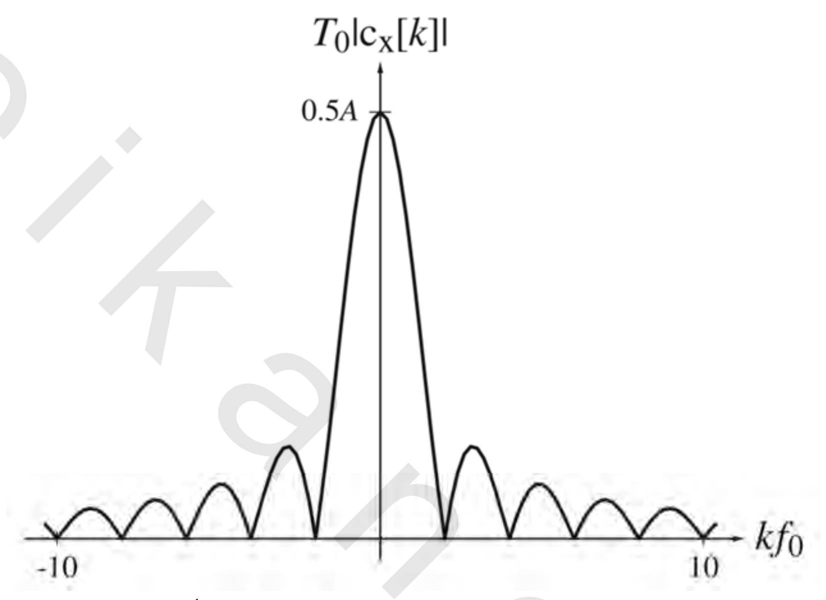



**شكل رقم (٦.٢٢) مقدار دالة التوافقيات لتتابع فورير المستمر لإشارة مستطيلة مع تقليل في دورة التشغيل.**




**شكل رقم (٦.٢٣) مقادير الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر لإشارات موجة مستطيلة مع دورات تشغيل ٥٠% و ١٠%.**

سنسمي هذه الدالة الجديدة بدالة التوافقيات المعدلة. هذه الدالة المعدلة هي $T_0c_x[k]=A\omega\text{sinc}(\omega kf_0)$. مع زيادة $T_0$ بدون حدود (مما يجعل من قطار النبضات نبضة واحدة)، فإن $f_0$ تقترب من الصفر ويصبح المتغير $kf_0$ متغيراً مستمراً (وسنطلق عليه f). الدالة التوافقية المعدلة لتتابع فورير المستمر تقترب من الدالة الموضحة في شكل (٦.٢٤). هذه الدالة التوافقية المعدلة (مع بعض التغيرات الرمزية) تصبح تحويل فورير المستمر زمنياً continuous time Fourier transform, CTFT لهذه النبضة الوحيدة.




**شكل رقم (٦.٢٤) الشكل النهائي لدالة توافق تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT لإشارة موجة مستطيلة.**

الفارق الترددي بين مقادير توافقات تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS يكون هو نفسه مثل التردد الأساسي للـ CTFS وهو $f_0=1/T_0$. لكي نؤكد علاقة هذا التردد مع الفارق الترددي (والذي ستساويه في النهاية مع تقارب الدورة الأساسية من المالانهاية) دعنا نفترض أن هذا الفارق هو $\Delta f$، بمعنى سنفترض $\Delta f=f_0=1/T_0$. وبالتالي، فإن التمثيل المركب لتحويل فورير المستمر CTFS للدالة x(t) يمكن كتابته كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi k\Delta f t}$$

بالتعويض بالصورة التكاملية لـ $c_x[k]$،

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(\tau)e^{j2\pi k\Delta f\tau}\, d\tau \right] e^{j2\pi k\Delta f t}$$

(متغير التكامل هو $\tau$ لتمييزه من $t$ في الدالة $e^{j2\pi k\Delta ft}$، وهو خارج التكامل). حيث إن نقطة البداية $t_0$ للتكامل تكون اختيارية، سنفترض أنها $t_0=-T_0/2$ وبالتالي يمكن كتابة :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi k\Delta f\tau}\, d\tau \right] e^{j2\pi k\Delta ft} \Delta f$$

حيث تم استبدال $\Delta f$ مع $1/T_0$. في النهاية فإن $T_0$ تقترب من الما لانهاية، وتقترب $\Delta f$ من الرمز التفاضلي $df$، وتصبح $k\Delta f$ متغيراً مستمراً $f$، وتقترب حدود التكامل من سالب ما لانهاية حتى موجب ما لانهاية ويصبح التجميع تكاملاً كما يلي :

$$x(t) = \lim_{T_0\to\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi k\Delta f\tau}\, d\tau \right] e^{j2\pi k\Delta ft} \Delta f \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \right] e^{j2\pi ft} df$$ المعادلة رقم (٦.١١)

الكمية التي بين القوسين في الطرف الأيمن من المعادلة (٦.١١) هي تحويل فورير المستمر CTFT للدالة $x(t)$ ويمكن كتابته كما يلي :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$$ المعادلة رقم (٦.١٢)

وينتج من ذلك :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df$$ المعادلة رقم (٦.١٣)

ولقد اعتمدنا هنا العرف السائد وهو أن تحويل فورير لأي إشارة يرمز له الإشارة نفسه ولكن بالحرف الكبير بدلاً من الحرف الصغير المستخدم لتمثيل الإشارة نفسها. لاحظ أن تحويل فورير يكون دالة في التردد الدوري $f$ وأن الاعتماد الزمني للإشارة قد تم تكامله بحيث أصبح تحويل فورير ليس دالة في الزمن. الدالة $x$ وتحويل فورير المستمر لها $X$ يكونان "زوج تحويل فورير" الذي يرمز له عادة بالرمز $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f)$. أيضاً من الرموز المتعارف عليها $X(f)=\mathcal{F}(x(t))$ و $x(t)=\mathcal{F}^{-1}(X(f))$ حيث $\mathcal{F}(.)$ تقرأ تحويل فورير، و $\mathcal{F}^{-1}(.)$ تقرأ تحويل فورير العكسي.

شكل آخر معروف لتحويل فورير يتحدد بوضع المتغير $f=\omega/2\pi$ حيث $\omega$ هي التردد الزاوي.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega/2\pi) e^{j\omega t}\, d\omega \quad \text{و} \quad X(\omega/2\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$ المعادلة رقم (٦.١٤)

وهذه هي النتيجة التي نحصل عليها بالتعويض عن المتغير f بـ ω/2π و عن df بـ dω/2π. من الشائع جدا في المنشورات الهندسية أن نرى هذه الصورة :

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$ و $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{jwt}\,d\omega$ المعادلة رقم (٦.١٥)

في هذه الصورة الثانية، فإن المعنى الحسابي المحدد للدالة "X" قد تغير وهذ قد يصبح مصدرا للالتباس إذا كان الفرق بين الصورتين ضرورياً.لكي نحصر هذا الالتباس، فإنه من الشائع أن نرى هذه الصورة للمتغير ω كالتالي :

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$ و $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$ المعادلة رقم (٦.١٧)

وللمرة الثانية تغير معنى الدالة X. السبب في تضمين المتغير j في هذه الدالة هو لجعل تحويل فورير يتقابل مباشرة مع تحويل لابلاس في الفصل ٨.

افترض أننا استخدمنا المعادلة التالية :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

لتكوين زوج فورير التالي :

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftarrow} X(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$

إذا استخدمنا المتغير X(jω) فإن :

$$X(f) \xrightarrow{f-j\omega} X(j\omega) = \frac{1}{j2\pi(j\omega) + \alpha} = \frac{1}{-2\pi\omega + \alpha}$$

ولكن من الشائع جداً في مطبوعات تحويل فورير أن نقول أنه إذا كان شكل التردد الدوري لتحليل فورير على الصورة :

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$

فإن صورة التردد الزاوي تكون :

$$X(j\omega) = \frac{1}{j2\pi(\omega/2\pi) + \alpha} = \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

في الانتقال من X(f) إلى X(jω) فإن ما فعلناه حقيقة هو الانتقال من X(f) إلى x(t) باستخدام العلاقة : $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df$ وبعد ذلك تم استخدام العلاقة $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}$ للحصول على X(jω). بمعنى آخر $X(f)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}x(t)\rightarrow X(j\omega)$. وهذا يؤدي إلى عمل هذا الانتقال $X(f)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}X(j\omega)$ عن طريق التعويض بـ f=ω/2π بدلاً من الانتقال $X(f)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}X(j\omega)$ عن طريق التعويض بـ f=jω. ونحن سنتبع هذا التفسير المعروف في هذا الكتاب.

في أي تحليل من المهم أن نختار التحليل ونستخدمه بعد ذلك باستمرار. في هذا الكتاب سنستخدم الصورتين التاليتين لأنهما الأكثر شيوعاً في الوسط الهندسي :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\, df \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{jwt}\, d\omega \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

هنا يتم تطبيق تحويل فورير على الإشارات المستمرة زمنياً كما تم الإشارة إليه سالفاً. ولذلك فإنه يعرف عادة بمحول فورير المستمر زمنياً continuous time Fourier transform, CTFT. يستخدم CTFT في تحليل أنظمة الاتصالات، والمرشحات، وبصريات فورير.

صورة ω وصورة f لتحويل فورير المستمر زمنياً يتم استخدامهما بكثرة في التطبيقات الهندسية. إن استخدام أي واحدة من الصورتين في أي واحد من الكتب، أو أي واحد من المنشورات يعتمد على العديد من العوامل بما في ذلك طريقة الترميز في أي مجال من المجالات. حيث إن كلاً من الصورتين يشيع استخدامهما، فإننا في هذا الكتاب سنستخدم أيهما حيثما يبدو الوضع مريحاً في أي واحد من التحليلات. إذا احتجنا عند أي لحظة التغيير من صورة لأخرى، فإن ذلك يتم بسهولة عن طريق استبدال f بـ ω/2π أو ω بـ 2πf. (بالإضافة إلى التعريفات المقدمة هنا، فإنه يوجد هناك العديد من الصور البديلة لتحويل فورير التي يمكن إيجادها في كتب الهندسة والرياضيات والطبيعة).

جدول ٦.٣ يعرض أزواجاً لتحليل فورير المستمر زمنياً في صورة ω التي تم استنتاجها مباشرة من التعريفات المقدمة مسبقا. لقد تم استخدام صورة ω هنا؛ لأنها في هذه الدوال تكون أكثر إدماجاً.

**جدول رقم ٦.٣ بعض أزواج تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT**

| | |
|---|---|
| ١ | $\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$ |
| ٢ | $e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega+\alpha), \alpha > 0$ |
| ٣ | $-e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega+\alpha), \alpha < 0$ |
| ٤ | $te^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega+\alpha)^2, \alpha > 0$ |
| ٥ | $-te^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega+\alpha)^2, \alpha < 0$ |
| ٦ | $t^n e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(j\omega+\alpha)^{n+1}}, \alpha > 0$ |
| ٧ | $-t^n e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(j\omega+\alpha)^{n+1}}, \alpha < 0$ |
| ٨ | $e^{-\alpha t}\, sin(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_0^2}, \alpha > 0$ |
| ٩ | $-e^{-\alpha t}\, sin(\omega_0 t)u(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_0^2}, \alpha < 0$ |
| ١٠ | $e^{-\alpha t}\, cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_0^2}, \alpha > 0$ |
| ١١ | $-e^{-\alpha t}\, cos(\omega_0 t)u(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_0^2}, \alpha < 0$ |
| ١٢ | $e^{-\alpha\lvert t\rvert} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}, \alpha > 0$ |

**تحويل فورير العام**

هناك بعض الإشارات العملية المهمة التي ليس لها تحويل فورير بالمعنى المحدد. نتيجة لأهمية هذه الإشارات، فلقد تم تعميم صورة تحويل فورير ليشمل هذه الإشارات. كمثال على تحويل فورير المعمم، دعنا نحسب تحويل فورير المستمر زمنياً للدالة x(t) البسيطة التالية : x(t)=A حيث A ثابت. باستخدام تعريف تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT التالي :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

سنحصل على :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-j2\pi ft}\,dt = X(f) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}\,dt$$

وهذا التكامل لن يتقارب، وبالتالي فإن تحويل فورير لن يكون موجوداً. ولكن يمكننا أن نتجنب هذه المشكلة عن طريق تعميم تحويل فورير بالخطوات التالية : أولاً نحسب CTFT للدالة $x_\sigma(t)=Ae^{-\sigma|t|}$، حيث $\sigma>0$ وهي دالة تقترب من القيمة الثابتة A مع اقتراب σ من الصفر. بعد ذلك سنجعل σ تقترب من الصفر بعد إجراء التحويل. معنى ذلك أن المعامل $e^{-\sigma|t|}$ يسمى معامل التقارب، أو convergence factor الذي يسمح لنا بإجراء التكامل كما في شكل (٦.٢٥).

سيكون التحويل كالتالي :

$$X_\sigma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\sigma|t|}e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{0} Ae^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}\,dt$$

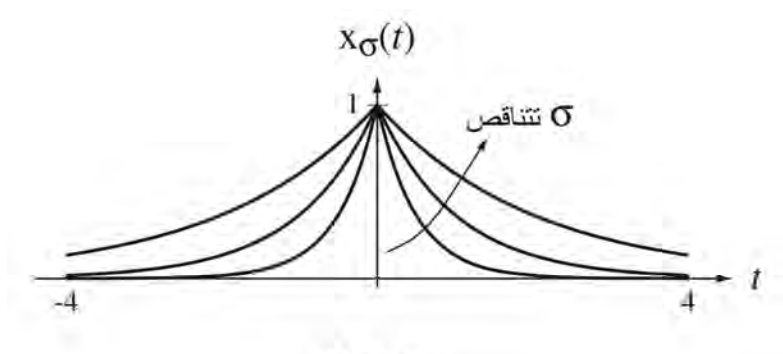
$$X_\sigma(f) = A\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\sigma-j2\pi f)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-\sigma-j2\pi f)t}\,dt\right] = A\frac{2\sigma}{\sigma^2+(2\pi f)^2}$$

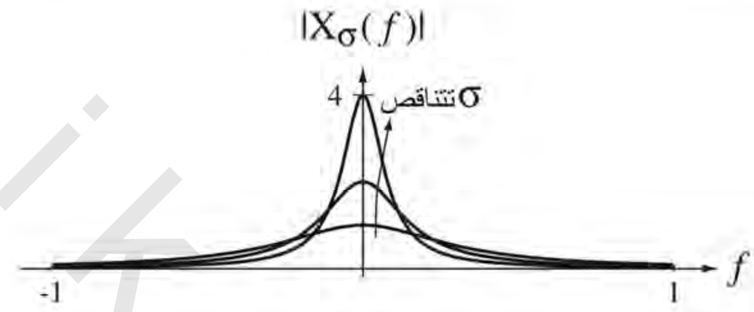
الآن بأخذ النهاية مع اقتراب σ من الصفر لـ $X_\sigma(f)$. لقيم f التي لا تساوي الصفر نحصل على :

$$\lim_{\sigma\to 0} A\frac{2\sigma}{\sigma^2+(2\pi f)^2} = 0$$

بعد ذلك احسب المساحة تحت الدالة $X_\sigma(f)$ مع اقتراب σ من الصفر :

$$\text{المساحة} = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sigma^2+(2\pi f)^2}\,df$$




**شكل (٦.٢٥) تأثير معامل التقارب e-σ|t|.**

باستخدام التكامل التالي :

$$\int \frac{dx}{a^2 + (bx)^2} = \frac{1}{ab} tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

نحصل على :

$$\text{المساحة} = A \left[\frac{2\sigma}{2\pi\sigma} tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{\sigma}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = A$$

أي أن المساحة تحت هذه الدالة هي A ولا تعتمد على قيمة σ. ولذلك مع تقارب σ من الصفر فإن تحويل فورير للثابت A يكون دالة تساوي صفراً عندما f لا تساوي الصفر والمساحة تحت منحنى هذه الدالة تساوي A. وهذا يصف تماماً صدمة شدتها A تحدث عند f=0. ولذلك يمكننا كتابة زوج تحويل فورير المعمم كما يلي :

$$A \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\delta(f)$$

تعميم تحويل فورير CTFT يمتد إلى دوال أخرى مفيدة، بما في ذلك الدوال الدورية. بالطريقة نفسها يمكن كتابة زوج تحويل فورير المستمر للدالة التالية :

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

والدالة التالية :

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j/2)[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

بالتعويض عن f=ω/2π واستخدام خاصية التحجيم للصدمة، يمكن إيجاد الصور المكافئة للتردد الزاوي كما يلي :

$$A \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi A\delta(\omega)$$

$$\cos(\omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

المشكلة التي تسببت في ظهور الحاجة إلى الصورة المعممة من تحويل فورير هي أن هذه الدوال، الثوابت والدوال الجيبية، ليست قابلة للتكامل المطلق، على الرغم من أنها محددة. يمكن أيضاً تطبيق تحويل فورير المعمم على إشارات أخرى ليست قابلة للتكامل المطلق ولكنها محددة، مثل وحدة الخطوة ودالة الإشارة.

طريقة أخرى لإيجاد تحويل فورير المستمر زمنياً لقيمة ثابتة هي أن نقترب من المشكلة من جانب آخر عن طريق إيجاد تحويل فورير المستمر زمنياً العكسي لدالة صدمة $X(f)=A\delta(f)$ باستخدام نظرية أخذ العينات أو العينة للصدمة.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{+j2\pi ft}\,df=A\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)e^{+j2\pi ft}\,df=Ae^{0}=A$$

وهذا بالطبع سرَّع كثيراً في إيجاد التحويل الأمامي للقيمة الثابتة من الطريقة السابقة. ولكن المشكلة في هذه الطريقة هي أننا إذا حاولنا إيجاد التحويل الأمامي لدالة فإنه يجب أولاً أن نخمن أو نتوقع التحويل، وبعد ذلك نقوم بالتحقق من صحته عن طريق حساب التحويل العكسي.

**مثال ٦.٥**

**تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT لدالة الإشارة ودالة وحدة الخطوة**

احسب CTFT للدالة $x(t)=sgn(t)$ وبعد ذلك استخدم هذه النتيجة لحساب CTFT للدالة $x(t)=u(t)$.

بتطبيق الصورة التكاملية مباشرة نحصل على :

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}sgn(t)e^{-j2\pi ft}\,dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-j2\pi ft}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-j2\pi ft}\,dt$$

وهذه التكاملات لن تتقارب. يمكننا استخدام معامل تقارب لإيجاد تحويل فورير المعمم. افترض $x_\sigma(t)=sgn(t)e^{-\sigma|t|}$ حيث $\sigma>0$، وبالتالي يمكن كتابة ما يلي :

$$X_\sigma(f)=\int_{-\infty}^{\infty}sgn(t)e^{-\sigma|t|}e^{-j2\pi ft}\,dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{(\sigma-j2\pi f)t}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+j2\pi f)t}\,dt$$

$$X_\sigma(f)=-\frac{e^{(\sigma-j2\pi f)t}}{\sigma-j2\pi f}\bigg|_{0}^{\infty}-\frac{e^{-(\sigma+j2\pi f)t}}{\sigma+j2\pi f}\bigg|_{0}^{\infty}=-\frac{1}{\sigma-j2\pi f}+\frac{1}{\sigma+j2\pi f}$$

وبالتالي :

$$X(f)=\lim_{\sigma\to 0}X_\sigma(f)=\frac{1}{j\pi f}$$

أو باستخدام التردد الزاوي :

$$X(j\omega)=2/j\omega$$

لحساب CTFT للدالة $x(t)=u(t)$، نلاحظ أن :

$$u(t)=(1/2)[sgn(t)+1]$$

وبالتالي يمكن كتابة CTFT كما يلي :

$$U(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)[sign(t)+1]e^{-j2\pi ft}\,dt=(1/2)\left[\int_{-\infty}^{\infty}sgn(t)e^{-j2\pi ft}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi ft}\,dt\right]$$

$U(f)=(1/2)[1/j\pi f +\delta(f)]=1/j2\pi f + (1/2)\delta(f)$

ويمكن كتابة هذه المعادلة في صورة التردد الزاوي كما يلي :

$U(j\omega)=1/j\omega + \pi\delta(\omega)$

**مثال ٦.٦**

**إثبات أن تحويل فورير العكسي للدالة $U(f)=1/j2\pi f + (1/2)\delta(f)$ يكون هو دالة وحدة الخطوة**

إذا طبقنا تكامل تحويل فورير العكسي على الدالة $U(f)=1/j2\pi f + (1/2)\delta(f)$ نحصل على :

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{j2\pi f}+\left(\frac{1}{2}\right)\delta(f)\right]e^{j2\pi ft}\,df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f}df+\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)\,e^{j2\pi ft}df$$

$$u(t)=\frac{1}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{j2\pi f}df+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin(2\pi ft)}{2\pi f}df=\frac{1}{2}+2\int_{0}^{\infty}\frac{sin(2\pi ft)}{2\pi f}df$$

الحالة ١ $t=0$

$$u(t)=\frac{1}{2}+2\int_{0}^{\infty}(0)\,d\omega=1/2$$

الحالة ٢ $t>0$

سنفترض $\lambda=2\pi ft$ وبالتالي فإن $d\lambda=2\pi tdf$

$$u(t)=\frac{1}{2}+2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda/t}\frac{d\lambda}{2\pi t}=\frac{1}{2}+1/\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

الحالة ٣ $t<0$

$$u(t)=\frac{1}{2}+2\int_{0}^{-\infty}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda/t}\frac{d\lambda}{2\pi t}=\frac{1}{2}+1/\pi\int_{0}^{-\infty}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

التكاملات في الحالة ٢ والحالة ٣ هي تكاملات sine محددة كالتالي :

$$Si(z)=\int_{0}^{z}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}d\lambda$$

ومن الجداول الرياضية القياسية نجد أن :

$$\lim_{z\to\infty}Si(z)=\frac{\pi}{2}\;,\qquad Si(0)=0,\quad Si(-z)=-Si(z)$$

انظر Abramowitz و Stegun صفحة ٢٣١. وبالتالي نحصل على :

$$2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f}df=\begin{cases}\frac{1}{2}, & t>0\\ 0, & t=0\\ -\frac{1}{2} & t<0\end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

هذا التحويل العكسي يبين أنه، للتوافق التام مع نظرية تحويل فورير، فإن القيمة u(0) يجب تحديدها بالقيمة ½ كما كان الحال في الفصل ٢. تحديد دالة وحدة الخطوة بهذه الطريقة يتوافق رياضيا ويمكن أحيانا أن يكون له أهمية هندسية (انظر الفصل ١٥ ، تصميم المرشحات الرقمية باستخدام طريقة الصدمة الثابتة ).

**مثال ٦.٧**

**تحويل فورير المستمر للدالة المستطيلة**

احسب تحويل فورير المستمر CTFT لدالة وحدة المستطيل.

تحويل فورير لهذه الدالة يمكن كتابته كما يلي :

$$\mathcal{F}\Big(rect\big(t\big)\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} [\cos\big(2\pi ft\big) + jsin\big(2\pi ft\big)]\,dt$$

$$\mathcal{F}\Big(rect\big(t\big)\Big) = 2\int_{0}^{1/2} cos\big(2\pi ft\big)\,dt = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = sinc(f)$$

نحن الآن لدينا الزوج التالي من تحويل فورير المستمر $rect(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc(f)$. (في صورة التردد الزاوي يصبح هذا الزوج كما يلي $rect(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc(\omega/2\pi)$. في هذه الحالة كانت صورة التردد f أبسط وأكثر تماثلا عن الصورة ω). بالرجوع إلى نتيجة المثال ٦.١ يمكننا كتابة :

$$Arect(t/\omega) * \delta_{To}(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{F}_s}{\leftrightarrow}} \left(\frac{A\omega}{T_0}\right) sinc(\frac{\omega k}{T_0})$$

تحويل فورير المستمر CTFT للدالة المستطيله يساوي دالة سنك sinc ، والدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS لدالة مستطيلة متكررة يكون عينات لدالة سنك. إنها معيننة حيث إن k تأخذ قيما صحيحة فقط. هذه العلاقة بين التكرار الدوري في النطاق الزمني والعيننة في النطاق الترددي (أرقام التوافقات) سيكون مهما في توضيح عملية العيننة في الفصل ١٠.

نستطيع الآن أن نمدد جدول تحويل فورير ليشتمل على العديد من الدوال الأخرى التي تحدث عادة في تحليل فورير. في جدول ٦.٤ استخدمنا صورة التردد الدوري لل CTFT ؛ لأنه الأبسط والأكثر تماثلاً لهذه الدوال.

**جدول رقم ٦.٤ أزواج أخرى من تحويل فورير**

| | |
|---|---|
| ١ | $\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$ |
| ٢ | $1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta(t)$ |
| ٣ | $sg(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/j\pi f$ |
| ٤ | $u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)\delta(f) + 1/j2\pi f$ |
| ٥ | $rect(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc(f)$ |
| ٦ | $sinc(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect(f)$ |
| ٧ | $tri(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc^2(f)$ |
| ٨ | $sinc^2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} tri(f)$ |
| ٩ | $\delta_{T_0}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} f_0\delta_{f_0}(f), f0 = 1/T_0$ |
| ١٠ | $T_0\delta_{T_0}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta_{f_0}(f), T_0 = 1/f_0$ |
| ١١ | $cos(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ |
| ١٢ | $sin(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j/2)[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$ |

## خواص تحويل فورير

جدول ٦.٥ وجدول ٦.٦ يوضحان بعض الخواص لتحويل فورير المستمر زمنياً CTFT المستنتجة مباشرة من التعريفين السابقين.

**جدول رقم ٦.٥ خواص تحويل فورير، صورة التردد الدوري f**

| | |
|---|---|
| الخطية | $\alpha\, g(t) + \beta\, h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha G(f) + \beta H(f)$ |
| الإزاحة الزمنية | $g(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi t_0}$ |
| الإزاحة الترددية | $e^{j2\pi f_0 t}\, g(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(f - f_0)$ |
| التحجيم الزمني | $g(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/\lvert a\rvert)G(f/a)$ |
| التحجيم الترددي | $(1/\lvert a\rvert)g(t/a) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(af)$ |
| التفاضل الزمني | $\frac{d}{dt}g(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j2\pi f\, G\,(f)$ |
| التكامل الزمني | $\int_{-\infty}^{t} g(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)G(0)\delta(f)$ |
| التفاضل الترددي | $tg(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} -\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}G(f)$ |
| الضرب | $g(t) * h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(f)H(f)$ |
| ازدواجية الالتفاف | $g(t)h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(f) * H(f)$ |
| نظرية بارسيفال | $\int_{-\infty}^{\infty}\lvert g(t)\rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\lvert G(f)\rvert^2 df$ |
| المساحة الكلية | $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \;\; or \;\; X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df$ |

**جدول ٦.٦ خواص تحويل فورير، صورة التردد الزاوي ω**

| | |
|---|---|
| $\alpha\, g(t) + \beta\, h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega)$ | الخطية |
| $g(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ | الإزاحة الزمنية |
| $e^{j\omega t_0}\, g(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(j(\omega-\omega_0))$ | الإزاحة الترددية |
| $g(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/\lvert a\rvert)G(j\omega/a)$ | التحجيم الزمني |
| $(1/\lvert a\rvert)g(t/a) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(aj\omega)$ | التحجيم الترددي |
| $\frac{d}{dt}g(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\omega\, G(j\omega)$ | التفاضل الزمني |
| $\int_{-\infty}^{t} g(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{G(j\omega)}{j\omega}\pi G(0)\delta(j\omega)$ | التكامل الزمني |
| $tg(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}G(j\omega)$ | التفاضل الترددي |
| $g(t) * h(t) \overset{f}{\leftrightarrow} G(j\omega)H(j\omega)$ | الضرب |
| $g(t)h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}G(j\omega) * H(j\omega)$ | ازدواجية الالتفاف |
| $\int_{-\infty}^{\infty}\lvert g(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert G(j\omega)\rvert^2 d\omega$ | نظرية بارسيفال |
| $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \;\; or \;\; X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$ | المساحة الكلية |

أي إشارة دورية يمكن التعبير عنها كتتابع فورير مستمر على الصورة :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi kt/T}$$

باستخدام خاصية الإزاحة الترددية، يمكننا إيجاد تحويل فورير المستمر CTFT كما يلي :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]\delta(f-\frac{k}{T})$$

وعلى ذلك فإن تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT لأي إشارة دورية يتكون كليا من مجموعة عينات. شدة هذه الصدمات عند التردد k/T هي نفسها قيم الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً عند الرقم التوافقي k.

**مثال ٦.٨**

**الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS لأي إشارة دورية باستخدام تحويل فورير المستمر CTFT**

استخدم العلاقة :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]\delta(f-\frac{k}{T})$$

لحساب الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS للدالة $rect(2t)*\delta_1(t)$.

هذه الدالة التفاف اثنين من الدوال. لذلك فمن خاصية ازدواجية الضرب والالتفاف، فإن CTFT سيكون حاصل ضرب تحويل فورير لكل من الدالتين :

$$X(f) = \left(\frac{1}{2}\right) sinc\left(\frac{f}{2}\right) \delta_1(f) = (\frac{1}{2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} sinc(\frac{k}{2}) \delta(f-k)$$

ولذلك ستكون الدالة التوافقية لتتابع فورير هي :

$$C_x[k]=(1/2)sinc(k/2)$$

إعتمادا على أن $T=T_o=1$.

**مثال ٦.٩**

**تحويل فورير المستمر لدالة جيبية معدلة**

احسب تحويل فورير CTFT للدالة $x(t)=24\cos(100\pi t)\sin(10000\pi t)$.

هذه الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين. لذلك باستخدام ازدواجية الضرب والالتفاف، فإن CTFT سيكون التفاف تحويل فورير لكل دالة على حدة. باستخدام هذه العلاقة :

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

وأيضاً :

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j/2)[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$$

نحصل على :

$$24\cos(100\pi t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 12[\delta(f-50)+\delta(f+50)]$$

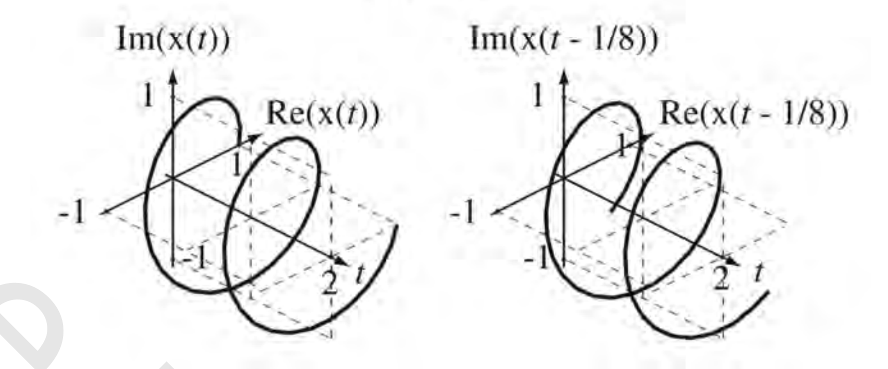
وأيضاً :

$$\sin(10000\pi t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j/2)[\delta(f+5000)-\delta(f-5000)]$$

وبالتالي فإن تحويل فورير الكلي سيكون :

$$24\cos(100\pi t)\sin(10000\pi t) \leftrightarrow 12[\delta(f-50)+\delta(f+50)] * (j/2)[\delta(f+5000)-\delta(f-5000)]$$

خاصية الإزاحة الزمنية تقول إن الإزاحة في المجال الزمني تقابل إزاحة طورية في المجال الترددي. كمثال على معقولية خاصية الإزاحة الزمنية، افترض أن الإشارة الزمنية هي دالة الجيب المركبة $x(t)=e^{j2\pi t}$ بالتالي فإن $x(t-t_0) = e^{j2\pi(t-t_0)} = e^{j2\pi t}e^{-j2\pi t_0}$ كما في شكل (٦.٢٦).




**شكل رقم (٦.٢٦) الدالة الأسية $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ ونسخة مؤخرة منها $x\left(t-\frac{1}{8}\right) = e^{j2\pi f_0\left(t-\frac{1}{8}\right)}$.**

إزاحة هذه الإشارة زمنياً تقابل ضربها في الثابت المركب $e^{-j2\pi t_0}$. معادلة تحويل فورير العكسي التالية :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{+j2\pi ft}\,df$$

تقول أن أي إشارة يمكن إيجاد تحويل فورير لها يمكن التعبير عنها كمجموع خطي من الجيوب المركبة على مدى مستمر من الترددات f ، وإذا تمت إزاحة x(t) بمقدار $t_0$ ، فإن كل واحد من هذه الجيوب المركبة يتم ضربه في الثابت المركب $e^{-j2\pi t_0}$. ماذا يحدث لأي عدد مركب عند ضربه في أس مركب على الصورة $e^{jx}$ حيث x كمية حقيقية ؟ مقدار الكمية $e^{jx}$ يساوي واحداً لأي قيمة حقيقية للمتغير x. لذلك فإن الضرب في $e^{jx}$ سيغير من الزاوية وليس المقدار للعدد المركب. تغيير الزاوية أو الطور يعني تغيير زاوية هذا العدد في المستوى المركب، وهذا يعنى دوران بسيط للمتجه الممثل لهذا العدد. لذلك فإن ضرب أي دالة أسية مركبة في الزمن على الصورة $e^{j2\pi t}$ في أي ثابت مركب $e^{-j2\pi t_0}$ يتسبب في دوران الأس المركب $e^{j2\pi t}$ بالنسبة لمحور الزمن كمحور دوران. بالنظر لشكل (٦.٢٦) يتضح أنه نتيجة الشكل الحلزوني الوحيد، فإن دوران الدالة الأسية المركبة في الزمن والإزاحة خلال المحور الزمني يكون لهما نفس التأثير.

خاصية الإزاحة الترددية يمكن إثباتها عن طريق البدأ بنسخة مزاحة ترددياً لـ X(f) ، على الصورة $X(f-f_0)$ واستخدام تكامل تحويل فورير العكسي. ستكون النتيجة كالتالي :

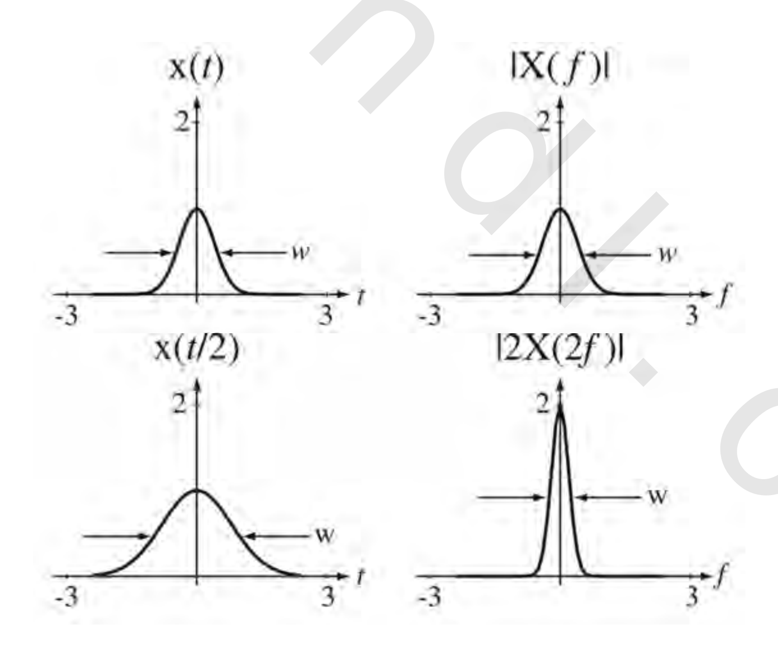
$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f-f_0)$$

لاحظ التشابه بين خاصيتي الإزاحة الزمنية والإزاحة الترددية. كل منهما ينتج عنه الضرب في جيب مركب في النطاق الآخر، بينما تكون إشارة الأس في الجيب المركب مختلفة. إن ذلك يحدث نتيجة الإشارات في تحويل فورير الأمامي والعكسي.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{+j2\pi ft}\,df$$

إن خاصية الإزاحة الترددية تعتبر أساسية لفهم تأثيرات التعديل في أنظمة الاتصالات.

أحد تأثيرات خاصية التحجيم الزمني والتحجيم الترددي هي أن الضغط في نطاق معين يقابله تمدد في النطاق الآخر. إحد الطرق الجيدة لتوضيح ذلك تكون من خلال الدالة $x(t) = e^{-\pi t^2}$ التي يكون تحويل فورير لها هو شكل الدالة $e^{-\pi t^2} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-\pi f^2}$. يمكننا تخصيص معامل عرض مميز ω لهذه الدوال وهو المسافة بين نقاط الانقلاب (الزمن أو التردد بين نقاط المقادير العظمى). هذه النقاط تحدث على الـ $e^{-\pi t^2}$ عند $t = \pm 1/\sqrt{2\pi}$، ولذلك فإن $w = \sqrt{2/\pi}$. إذا قمنا الآن بعمل تحجيم زمني من خلال التحويل t→t/2، مثلاً، فإن زوج تحويل فورير السابق يصبح $e^{-\pi(t/2)^2} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2e^{-\pi(2f)^2}$ كما في شكل(٦.٢٧) ومعامل العرض للدالة الزمنية يصبح $2\sqrt{2/\pi}$ بينما يكون معامل العرض للدالة الترددية هو $\sqrt{2\pi}/2$.




**شكل رقم (٦.٢٧) التمدد الزمني ويقابله الضغط الترددي.**

إن وضع t→t/2 يسبب تمدد زمني والتأثير المقابل في النطاق الترددي يكون ضغطاً ترددياً (يحدث عن طريق تحجيم تدريج معامل المقدار). مع تمديد إشارة النطاق الزمني، فإنها تنزلق من قيمتها العظمى التي تساوي واحداً عند t=0 أبطأ وأبطأ مع ابتعاد الزمن من الصفر في أي واحد من الاتجاهين، وفي النهاية مع اقتراب معامل التمدد الزمني من الما لانهاية، فإنها لا تتغير على الإطلاق وتقترب من القيمة الثابتة 1 (w→∞). مع تمدد إشارة النطاق الزمني بمعامل معين، فإن تحويل فورير لها ينضغط ومقدارها يتم ضربه في المعامل نفسه. في النهاية مع اقتراب معامل التمدد في النطاق الزمني من المالانهاية، فإن تحويل فورير CTFT يقترب من أن يكون صدمة :

$$\lim_{a\to\infty} e^{-\pi(t/a)^2} = 1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \lim_{a\to\infty}(1/|a|)e^{-\pi(af)^2} = \delta(f) \quad \text{المعادلة رقم (٦.١٧)}$$

انظر شكل (٦.٢٨) مع w→0




**شكل رقم (٦.٢٨) القيمة الثابتة والصدمة كحدود نهائية للتحجيم الزمني والترددي للدالة $x(t) = e^{-\pi t^2}$ وتحويل فورير لها.**

العلاقة بين الضغط في نطاق معين والتمدد في النطاق الآخر هي الأساس لفكرة تسمى أساسيات عدم التأكد uncertainty principle لتحليل فورير. مع اقتراب a من الما لانهاية في المعادلة (٦.١٧)، فإن طاقة الإشارة للدالة في النطاق الزمني تصبح أقل تمركزاً وطاقة الإشارة المقابلة في النطاق الترددي تصبح أكثر تمركزاً. في النهاية، فإن طاقة الإشارة في النطاق الترددي تكون لا نهائية التمركز عند تردد وحيد f=0، بينما يكون عرض الدالة الزمنية لانهائي وبالتالي طاقة إشارتها تكون غير متمركزة نهائياً في النطاق الزمني. إذا ضغطنا الدالة الزمنية، بحيث تصبح صدمة عند الزمن t=0 وتحدث طاقة إشارتها عند نقطة واحدة بينما يصبح تحويل فورير لها منتشراً بانتظام على المدى -∞<f<∞ وتكون طاقة إشارتها الترددية غير متمركزة بالمرة. كلما عرفنا موضع طاقة أفضل وأفضل في نطاق معين، فإننا نفقد المعرفة بموضع طاقة هذه الإشارة في النطاق المقابل. اسم غير التأكد أو الشك يأتي أساساً من ميكانيكا الكم بالاسم نفسه.

إذا كانت x(t) لها قيم حقيقية، فإن x(t)=x*(t). تحويل فورير CTFT للدالة x(t) هو X(f) فإن تحويل فورير للدالة x*(t) سيكون :

$$\mathcal{F}\left(x^*(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft}\, dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{+j2\pi ft}dt\right]^* = X^*(-f)$$

ولذلك، إذا كان $x(t)=x^*(t)$ فإن $X(f)=X^*(-f)$. بمعنى آخر، إذا كانت الإشارة في النطاق الزمني ذات قيم حقيقية، فإن تحويل فورير لها يكون له خاصية أن السلوك في النطاق الترددي السالب يكون المرافق المركب للسلوك في النطاق الترددي الموجب.

افترض الإشارة $x(t)$ ذات القيم الحقيقية. مربع مقدار $X(f)$ يساوي $|X(f)|^2=X(f)X^*(f)$، وباستخدام حقيقة أن $X(f)=X^*(-f)$ يمكننا أن نبين أن مربع المقدار لـ $X(-f)$ سيكون :

$$|X(-f)|^2=X(-f)X^*(-f)=X(f)X^*(f)=|X(f)|^2$$

مما يثبت أن مقدار تحويل فورير لأي إشارة ذات قيم حقيقية يكون دالة زوجية في التردد. باستخدام $X(f)=X^*(-f)$، يمكننا أن نبين أيضاً أن زاوية تحويل فورير المستمر لأي دالة ذات قيمة حقيقية يمكن دائماً التعبير عنها كدالة فردية في التردد. (حيث إن الزاوية لأي دالة مركبة تكون عديدة القيم، فإنه توجد العديد من الطرق المتساوية الدقة للتعبير عن الزاوية. لذلك لا يمكننا القول بأن الزاوية تكون دالة فردية، فقط نستطيع القول بأن الزاوية يمكن التعبير عنها كدالة فردية ). في العادة، وفي تحليل الإشارات والأنظمة العملية، فإن تحويل فورير المستمر CTFT لأي إشارة ذات قيم حقيقية يتم عرضه فقط في الترددات الموجبة، وحيث إن $X(f)=X^*(-f)$، فإنه إذا كنا نعرف سلوك الدالة للترددات الموجبة، فإنه يمكننا أن نعرف أيضاً سلوكها في الترددات السالبة.

افترض أن لدينا الإشارة $x(t)$ كدخل أو إثارة لنظام LTI له استجابة صدمة $h(t)$ وكانت استجابة النظام هي $y(t)$. بالتالي فإن $y(t)=x(t)*h(t)$. باستخدام خاصية ازدواج الضرب والالتفاف، يمكننا أن نكتب $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$. أو بمعنى آخر، أنه عند ضرب تحويل فورير للإثارة $X(j\omega)$ وهو دالة في التردد في $H(j\omega)$ التي تمثل تحويل فورير لاستجابة الصدمة $h(t)$ فإن النتيجة تكون $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$ وهي تحويل فورير لاستجابة النظام $y(t)$. $X(j\omega)$ تصف تغير الإشارة $x(t)$ مع التردد الزاوي، و $Y(j\omega)$ هي الشيء نفسه للدالة $y(t)$. وعلى ذلك فإن الضرب في $H(j\omega)$ يغير الوصف الترددي للإثارة إلى وصف ترددي للاستجابة. لذلك فإن $H(j\omega)$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام frequency response. (إنها نفس الاستجابة الترددية التي تم استنتاجها في الفصل ٥). عند وضع نظامين LTI على التوالي فإن استجابة الصدمة للنظام الكلي تساوي التفاف استجابة الصدمة لكل من النظامين المنفردين. وباستخدام خاصية ازدواج الضرب والالتفاف، فإن الاستجابة الترددية للنظام الكلي ستساوي حاصل ضرب الاستجابة الترددية لكل من النظامين منفرداً كما في شكل (٦.٢٩).

X(jω) → [H₁(jω)] → X(jω)H₁(jω) → [H₂(jω)] → Y(jω)=X(jω)H₁(jω)H₂(jω)

X(jω) → [H₁(jω)H₂(jω)] → Y(jω)

**شكل (٦.٢٩) الاستجابة الترددية لنظامين LTI موصلين على التوالي.**

**مثال ٦.١٠**

**تحويل فورير المستمر زمنياً باستخدام خاصية التفاضل**

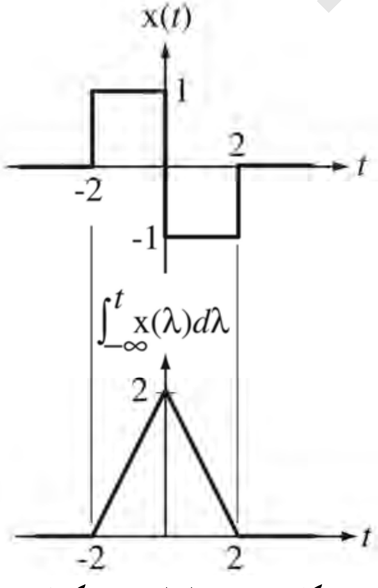
احسب تحويل فورير CTFT للدالة $x(t)=rect((t+1)/2)-rect((t-1)/2)$ باستخدام خاصية التفاضل لتحويل فورير ومدخلات جدول تحويلات فورير للدالة المثلثة الموضحة في شكل (٦.٣٠).

الدالة $x(t)$ هي تفاضل الدالة المثلثة المتمركزة عند الصفر، ولها نصف عرض للقاعدة يساوي 2 ومقدار يساوي 2.

$$x(t) = \frac{d}{dt}(2tri(t/2))$$

في جدول أزواج تحويلات فورير سنجد الزوج التالي $tri(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc^2(f)$ . باستخدام خواص التحجيم والخطية يمكننا كتابة ما يلي : $2tri(t/2) \leftrightarrow 4sinc^2(2f)$. ثم باستخدام خاصية التفاضل $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j8\pi f sinc^2(2f)$. إذا استخدمنا جدول تحويلات فورير للدالة المستطيلة $rect(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc(f)$ وخاصيتي التحجيم الزمني والإزاحة الزمنية نحصل على $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j4sinc(2f)\sin(2\pi f)$ وباستخدام تعريف الدالة sinc يمكن أن نبين أنه يكافيء :

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j8\pi f sinc^2(2f) = j8\pi f sinc(2f)\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} = j4sinc(2f)\sin(2\pi f)$$




**شكل (٦.٣٠) الدالة x(t) وتكاملها.**

تقول نظرية بارسيفال إنه يمكننا أن نحسب طاقة الإشارة إما في النطاق الزمني أو النطاق الترددي كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$ المعادلة رقم (٦.١٨)

(مارك أنتونيو بارسيفال هو عالم رياضيات عالم لفورير في أواخر القرن الثامن عشر وبدايات القرن التاسع عشر ولد في ٢٧ أبريل عام ١٧٥٥ وتوفي في ١٦ أغسطس عام ١٨٣٦). الكمية التي يتم تكاملها في الجانب الأيمن من المعادلة (٦.١٨) وهي $|X(f)|^2$ تسمى كثافة قدرة الطيف energy spectral density. يأتي هذا الاسم من حقيقة أن التكامل على كل الترددات (كل الطيف الترددي) هو كل طاقة الإشارة. لذلك حتى يكون هناك توافق في المعنى العام للتكامل، فإن $|X(f)|^2$ يجب أن تكون طاقة إشارة على وحدة التردد الدوري، أي كثافة طاقة الإشارة. مثلا، افترض أن x(t) تمثل التيار بالأمبير A. وبالتالي من تعريف طاقة الإشارة، فإن وحدات طاقة هذه الإشارة ستكون s•$A^2$. تحويل فورير للدالة x(t) هو X(f) ووحداتها هي A.s أو A/Hz. عند تربيع هذه الكمية نحصل على الوحدات :

$$\frac{A^2}{Hz^2} = \frac{A^2 \bullet s}{Hz}$$

التي تؤكد أن الكمية $|X(f)|^2$ وحداتها هي طاقة إشارة لكل وحدة تردد دوري.

**مثال ٦.١١**

**المساحة الكلية تحت منحنى دالة باستخدام تحويل فورير**

احسب المساحة الكلية تحت منحنى الدالة x(t)=10sinc((t+4)/7).

في الأصل فإننا سنحاول مباشرة تكامل هذه الدالة على كل الأزمنة t.

$$\text{المساحة} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 10\text{sinc}((t+4)/7)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 10\, \frac{\sin(\frac{\pi(t+4)}{7})}{\pi(t+4)/7}\, dt$$

وهذا التكامل هو التكامل الجيبي الذي ذكرناه أولاً في مثال ٦.٦ والمعرف كما يلي :

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt$$

يمكن إيجاد هذا التكامل في كتب الجداول الرياضية. على الرغم من ذلك فإن إجراء هذا التكامل ليس ضروريا لحل هذه المشكلة. لذلك يمكننا استخدام :

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

لذلك، فإننا نحسب أولاً تحويل فورير للدالة CTFT x(t)، وهو $X(f)=70\text{rect}(7f)e^{j8\pi f}$، وعلى ذلك فإن المساحة ستكون X(0)=70.

**مثال ٦.١٢**

**تحويل فورير لبعض الدوال الجيبية المحجمة والمزاحة زمنياً**

إذا كانت $x(t)=10\sin(t)$ ، احسب (أ) تحويل فورير للدالة $x(t)$ ، (ب) تحويل فورير للدالة $x(2(t-1))$ ، و (ت) تحويل فورير للدالة $x(2t-1)$.

(أ) في هذاالمثال التردد الدوري لدالة الجيب يساوي $1/2\pi$ ، والتردد الزاوي يساوي 1. لذلك فإن الأرقام ستكون أبسط إذا استخدمنا صورة التردد الزاوي لتحويل فورير. باستخدام خاصية الخطية والنظر في تحويل الصورة العامة للدالة الجيبية :

$$\sin(\omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$
$$\sin(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$
$$10\sin(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

(ب) من الجزء (أ)، لدينا $10\sin(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$. باستخدام خاصية التحجيم الزمني نحصل على :

$$10\sin(2t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j5\pi[\delta(\omega/2+1)-\delta(\omega/2-1)]$$

بعد ذلك باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية نحصل على :

$$10\sin(2(t-1)) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j5\pi[\delta(\omega/2+1)-\delta(\omega/2-1)]e^{-j\omega}$$

بعد ذلك باستخدام خاصية التحجيم لدالة الصدمة :

$$10\sin(2(t-1)) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-1)]e^{-j\omega}$$

أو :

$$10\sin(2(t-1)) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)e^{j2} - \delta(\omega-1)e^{j2}]$$

(ج) من الجزء (أ)، لدينا $10\sin(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$.

بتطبيق خاصية الإزاحة الزمنية أولاً :

$$10\sin(t-1) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]e^{-j\omega}$$

بعد ذلك بتطبيق خاصية التحجيم الزمني نحصل على :

$$10\sin(2t-1) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j5\pi[\delta(\omega/2+1)-\delta(\omega/2-1)]e^{-j\omega/2}$$

بعد ذلك نسنخدم خاصية تحجيم الصدمة :

$$10\sin(2t-1) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]e^{-j\omega/2}$$

أو :

$$10\sin(2t-1) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)e^{j} - \delta(\omega-2)e^{-j}]$$

**مثال ٦.١٣**

**تحويل فورير لدالة المستطيل المحجمة والمزاحة زمنياً**

احسب تحويل فورير للدالة x(t)=25rect((t-4)/10).

يمكننا حساب تحويل فورير لدالة وحدة المستطيل في جدول تحويلات فورير $rect(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} sinc(f)$. سنطبق أولاً خاصية الخطية وبالتالي: $25rect(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 25sinc(f)$. بعد ذلك نطبق خاصية التحجيم كالتالي: $25rect(t/10) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 250sinc(10f)$. بعد ذلك نطبق خاصية الإزاحة الزمنية كالتالي:

$$25rect\left(\frac{t-4}{10}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 250sinc(10f)e^{-j8\pi f}$$

**مثال ٦.١٤**

**تحويل فورير للالتفاف بعض الإشارات**

احسب تحويل فورير للالتفاف الدالة 10sin(t) مع الدالة 2δ(t+4).

الطريقة ١: سنجري الالتفاف أولاً ثم نجري تحويل فورير على النتيجة:

$$10\sin(t)*2\delta(t+4)=20\sin(t+4)$$

بتطبيق خاصية الإزاحة الزمنية لتحويل فورير نحصل على:

$$20\sin(t+4) \leftrightarrow j20\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]e^{j4\omega}$$

أو:

$$20\sin(t+4) \leftrightarrow j10[\delta(f+1/2\pi)-\delta(f-1/2\pi)]e^{j8\pi f}$$

الطريقة ٢: نجري تحويل فورير أولا لتجنب عملية الالتفاف.

$$10\sin(t)*2\delta(t+4) \leftrightarrow \mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(2\delta(t+4)) = 2\mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(\delta(t))e^{j4\omega}$$

$$10\sin(t)*2\delta(t+4) \leftrightarrow j20\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]e^{j4\omega}$$

أو:

$$10\sin(t)*2\delta(t+4) \leftrightarrow \mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(2\delta(t+4)) = 2\mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(\delta(t))e^{j8\pi f}$$

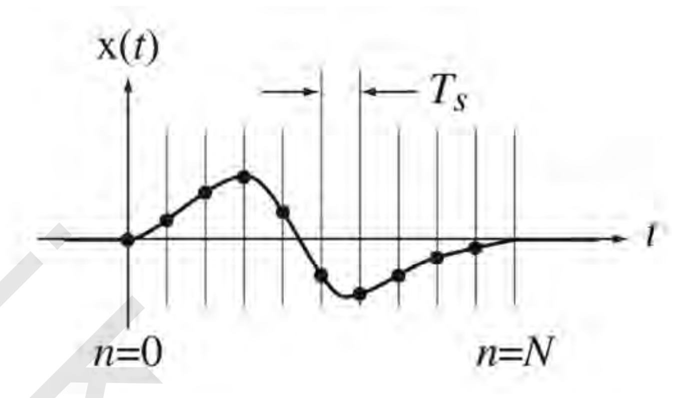
$$10\sin(t)*2\delta(t+4) \leftrightarrow j10\pi[\delta(f+1/2\pi)-\delta(f-1/2\pi)]e^{j8\pi f}$$

**الحساب العددي لتحويل فورير**

في الحالات التي لا يمكن وصف الإشارة المطلوب إجراء تحويل فورير لها عن طريق دالة تحليلية، أو إذا كان تكامل تحويل فورير لا يمكن إجراؤه، فإننا يمكن أن نجد طريقة تقريبية لحساب تحويل فورير عددياً باستخدام تحويل فورير المتقطع discrete Fourier transform, DFT، والذي تم استخدامه لتقريب الدالة التوافقية لتتابع فورير فيما سبق. إذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة سببية وتمثل إشارة طاقة، فإنه يمكننا أن نبين أنه يمكن تقريب تحويل فورير لها (صورة التردد الدوري f) عند ترددات متقطعة كما يلي: (انظر الملحق خ).

$$X\left(\frac{kf_s}{N}\right) \cong T_s \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi kn/N} \cong T_s xDFT\left(x(nT_s)\right), \quad |k| \ll N$$ المعادلة رقم (٦.١٩)

حيث $T_s=1/f_s$ يتم اختيارها بحيث إن الإشارة x لا تتغير كثيراً في هذه الفترة الزمنية و N يتم اختيارها بحيث يكون المدى الزمني 0 حتى $NT_s$ يغطي كل منطقة الطاقة للإشارة x كما في شكل (٦.٣١).




**شكل رقم (٦.٣١) إشارة سببية تمت عينتها باستخدام Ts ثانية بين العينات على المدى الزمني NTs.**

ولذلك فإذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة سببية وإشارة طاقة وقمنا بأخذ عيناتها على مدى زمني يغطي كل منطقة الطاقة بها وإذا كانت العينات قريبة من بعضها بعضاً بما فيه الكفاية ؛ بحيث إن الإشارة لن تتغير كثيرا بين هذه العينات ، فإن التقريب في المعادلة (٦.١٩) يصبح أكثر دقة عندما |k|<<N.

**مثال ٦.١٩**

**استخدام DFT لتقريب تحويل فورير المستمر CTFT**

باستخدام DFT احسب CTFT التقريبي للإشارة :

$$x(t) = \begin{Bmatrix} t(1-t), & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{Bmatrix} = t(1-t)rect(t-1/2)$$

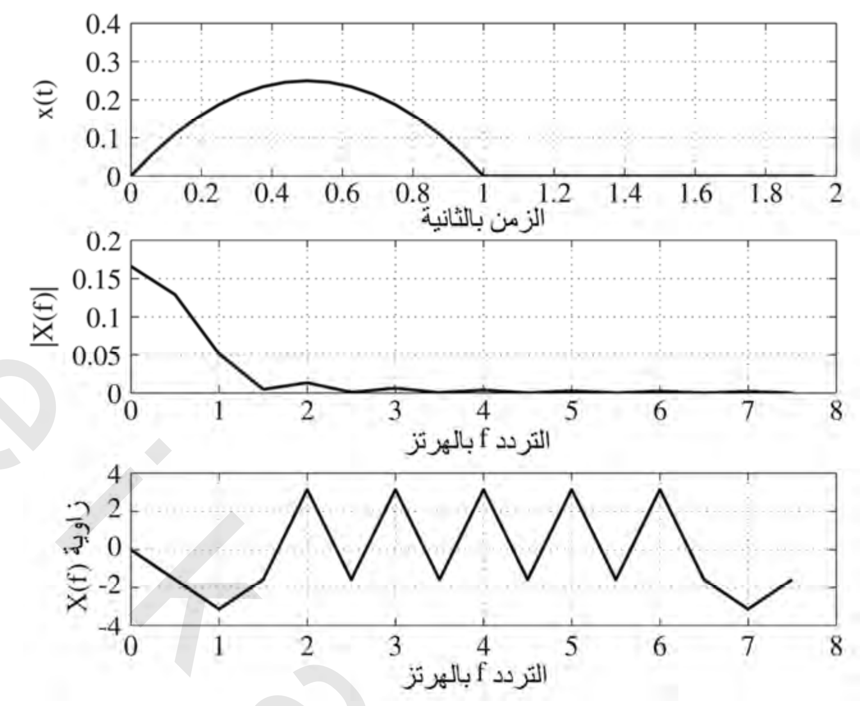
عددياً عن طريق العينة بمقدار 32 عينة على مدى الفترة الزمنية 0≤t<2.

```
% برنامج لتوضيح تقريب لتحويل فورير للدالة
% t(1-t)*rect(t-1/2)
% عن طريق عينتها ٣٢ مرة في الفترة الزمنية من صفر حتى ٢ ثانية وباستخدام تحويل فورير المتقطع
N = 32 ; % عدد العينات ٣٢
Ts = 2/N ; % أخذ العينات لمدة ٢ ثانية وحدد فترة العينة
fs = 1/Ts ; % حدد معدل أخذ العينات
df = fs/N ; % وضع التحديدية في النطاق الترددي
```

```
n = [0:N-1]' ; % متجه من ٣٢ مؤشر
t = Ts*n ; % متجه الأزمنة
x = t.*(1-t).*rect((t-1/2)); % متجه من ٣٢ قيمة من قيمة الدالة
X = Ts*fft(x) ; % متجه من ٣٢ قيمة من قيم التحويل المقرب
k = [0:N/2-1]' ; % متجه من ١٦ مؤشر ترددي
% رسم النتيجة
subplot(3,1,1) ;
p = plot(t,x,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('Time, t (s)') ; ylabel('x(t)') ;
subplot(3,1,2) ;
p = plot(k*df,abs(X(1:N/2)),'k') ; set(p,'LineWidth',2) ; grid on;
xlabel('Frequency, f (Hz)') ; ylabel('|X(f)|') ;
subplot(3,1,3) ;
p = plot(k*df,angle(X(1:N/2)),'k') ; set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('Frequency, f (Hz)') ; ylabel('Phase of X(f)') ;
```

بتنفيذ هذا البرنامج نحصل على النتائج الموضحة في شكل (٦.٣٢).

لاحظ أنه تم أخذ 32 عينة من الإشارة في النطاق الزمني، وتحويل فورير المتقطع DFT أعطى 32 رقماً أو نتيجة، ولقد استخدمنا أو 16 رقماً منها في هذه الرسومات. الفترة الدورية للـ DFT و 32 نقطة المسترجعة تمثل دورة زمنية واحدة. ولذلك فإن الـ 16 نقطة الثانية تكون هي نفسها ال 16 نقطة الثانية التي تحدث في الدورة السابقة ويمكن استخدامها لرسم DFT للترددات السالبة. أمر ماتلاب fftshift موجود لهذا الغرض. البرنامج التالي يعتبر مثالاً على استخدام الأمر fftshift ورسم تحويل فورير المستمر CTFT على ترددات سالبة وموجبة متساوية.



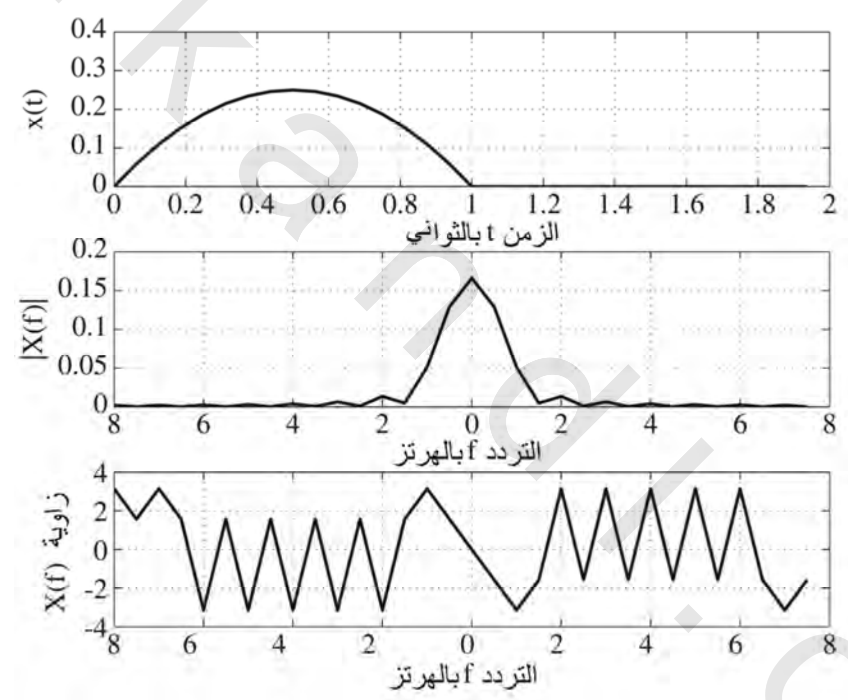

**شكل رقم (٦.٣٢) إشارة وتحويل فورير المستمر التقريبي لها باستخدام ال DFT.**

```
% برنامج لتوضيح تحويل فورير المستمر للدالة
% t(1-t)*rect(t-1/2)
% عن طريق أخذ ٣٢ عينة في الفترة الزمنية من صفر حتى ٢ ثانية
% باستخدم تحويل فورير المتقطع. الرسم في النطاق الترددي يغطي ترددات متساوية سالبة وموجبة
N = 32 ; % أخذ ٣٢ عينة
Ts = 2/N ; % أخذ العينات لمدة ٢ ثانية وتحديد فترة العينة
fs = 1/Ts ; % تحديد معدل العينة
df = fs/N ; % وضع التحديدية في النطاق الترددي
n = [0:N-1]' ; % متجه لـ ٣٢ مؤشراً زمنياً
t = Ts*n ; % متجه الأزمنة
x = t.*(1-t).*rect((t-1/2)) ; % متجه ٣٢ قيمة من الدالة
X = fftshift(Ts*fft(x)) ; % متجه من ٣٢ قيمة من تحويل فورير المقطع
k = [-N/2:N/2-1]' ; % متجه من ٣٢ مؤشراً ترددياً
% رسم النتائج
```

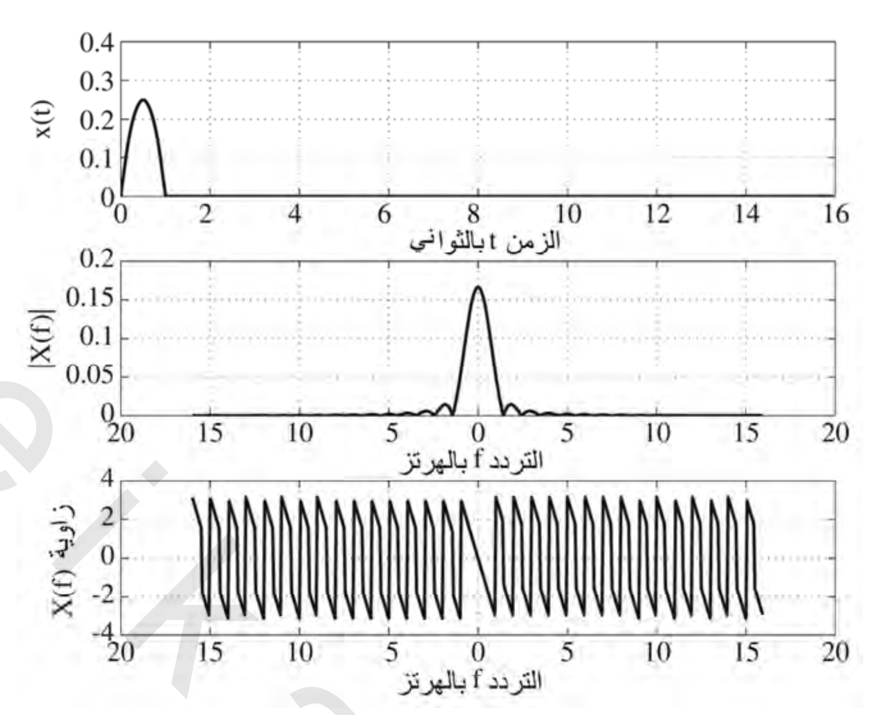
```
subplot(3,1,1) ;
p = plot(t,x,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('Time, t (s)') ; ylabel('x(t)') ;
subplot(3,1,2) ;
p = plot(k*df,abs(X),'k') ; set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('Frequency, f (Hz)') ; ylabel('|X(f)|') ;
subplot(3,1,3) ;
p = plot(k*dF,angle(X),'k') ; set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('Frequency, f (Hz)') ; ylabel('Phase of X(f)') ;
```

شكل(٦.٣٣) وشكل (٦.٣٤) يوضحان نتائج هذا البرنامج باستخدام 32 و 512 نقطة.

هذه النتيجة تعتبر تقريباً لتحويل فورير المستمر CTFT ؛ لأنه يستخدم 32 نقطة. إذا استخدمنا 512 نقطة على الفترة الزمنية التي تبلغ 16 ثانية فإننا نحصل على تقريب بتحديدية عالية في النطاق الترددي، وعلى مدى ترددي أوسع.




**شكل رقم (٦.٣٣) تقريب لتحويل فورير المستمر CTFT باستخدام تحويل فورير المتقطع DFT مرسوم على ترددات سالبة وموجبة تساوية.**




**شكل رقم (٦.٣٤) تقريب لتحويل فورير المستمر CTFT باستخدام DFT بتحديدية عالية.**

**مثال ٦.١٦**

**تحليل الأنظمة باستخدام تحويل فورير المستمر CTFT**

نظام موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية : y'(t)+1000y(t)=1000x(t) تمت إثارته بالإشارة x(t)=4rect(200t).

احسب وارسم الاستجابة y(t).

إذا قمنا بعمل تحويل فورير للمعادلة التفاضلية نحصل على :

$$j2\pi fY(f)+1000Y(f)=1000X(f)$$

التي يمكن إعادة ترتيبها كما يلي :

$$Y(f)=\frac{1000X(f)}{j2\pi f+1000}$$

تحويل فورير للإثارة هو X(f)=0.02sinc(f/200). ولذلك فإن تحويل فورير للاستجابة ستكون :

$$Y(f)=\frac{20sinc(f/200)}{j2\pi f+1000}$$

أو باستخدام تعريف دالة السنك والتعريف الأسي للدالة الجيبية :

$$Y(f)=20\frac{\sin(\pi f/200)}{(\frac{\pi f}{200})(j2\pi f+1000)}=4000\frac{e^{j2\pi f/400}-e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f(j2\pi f+1000)}$$

لإيجاد تحويل فورير العكسي ، سنبدأ بزوج تحويل فورير التالي : $e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f+\alpha},\ \alpha > 0$

$$e^{-1000t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f + 1000}$$

بعد ذلك نستخدم خاصية التكامل :

$$\int_{-\infty}^{t} g(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f} + \left(\frac{1}{2}\right) G(0)\delta(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-1000\lambda}u(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f}\frac{1}{j2\pi f + 1000} + \frac{1}{2000}\delta(f)$$

بعد ذلك طبق خاصية الإزاحة الزمنية :

$$g(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi t t_0}$$

$$\int_{0}^{t+1/400} e^{-1000\lambda}d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f}\frac{e^{j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000} + \frac{e^{j2\pi f/400}}{2000}\delta(f)$$

$$\int_{0}^{t-1/400} e^{-1000\lambda}d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f}\frac{e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000} + \frac{e^{-j2\pi f/400}}{2000}\delta(f)$$

بطرح النتيجة الثانية من النتيجة الأولى والضرب في 4000 :

$$4000\int_{-\infty}^{t+\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda)d\lambda - 4000\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{4000}{j2\pi f}\frac{e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000}$$

$$4000\left[\int_{-\infty}^{t+\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda)d\lambda - \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda)d\lambda\right] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{4000}{j2\pi f}\frac{e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000}$$

يمكن تبسيط التكاملين السابقين كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{t+\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda)d\lambda = \begin{cases} \left(\frac{1}{1000}\right)\left(1 - e^{-1000\left(t+\frac{1}{400}\right)}\right), & t \geq -1/400 \\ 0, & t < -1/400 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1000}\left(1 - e^{-1000\left(t+\frac{1}{400}\right)}\right) u(t + \frac{1}{400})$$

$$\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda} u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \left(\frac{1}{1000}\right)\left(1 - e^{-1000\left(t-\frac{1}{400}\right)}\right), & t \geq 1/400 \\ 0, & t < 1/400 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{1000}\left(1 - e^{-1000\left(t-\frac{1}{400}\right)}\right) u(t - \frac{1}{400})$$

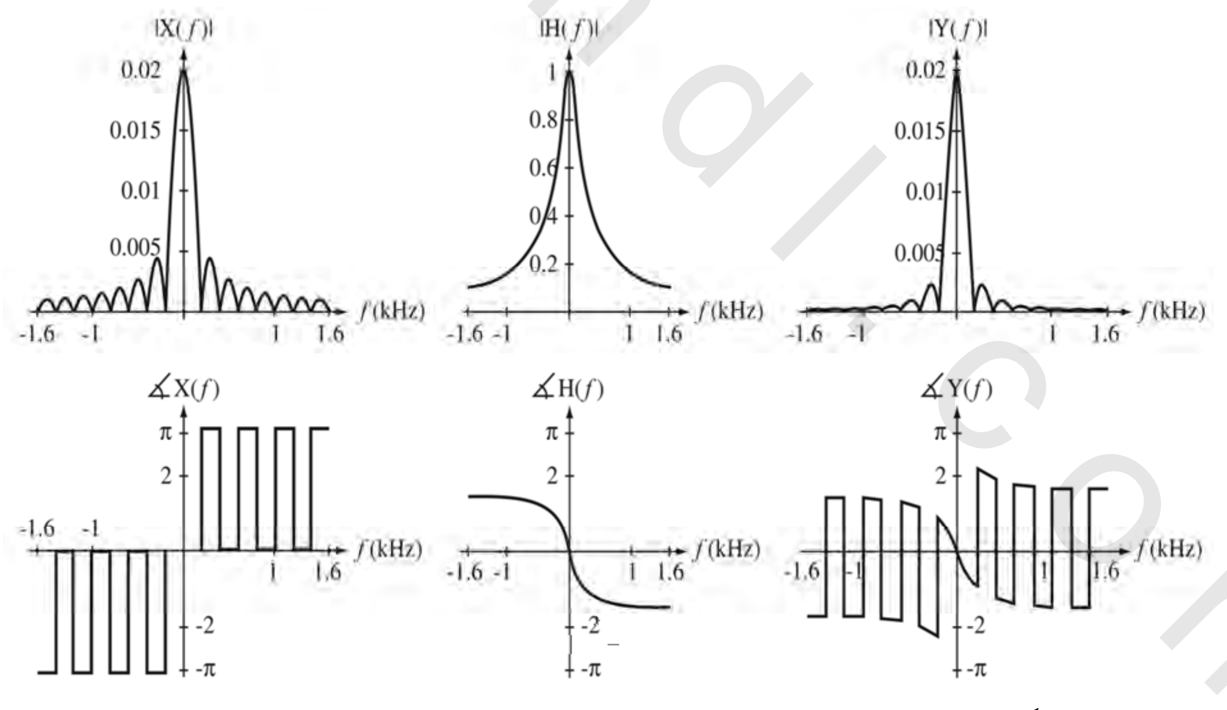
وعلى ذلك :

$$4\left[\left(1 - e^{-1000\left(t+\frac{1}{400}\right)}\right) u\left(t + \frac{1}{400}\right) - \left(1 - e^{-1000\left(t-\frac{1}{400}\right)}\right) u(t - \frac{1}{400})\right] \leftrightarrow \frac{4000}{j2\pi f} \frac{e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000}$$

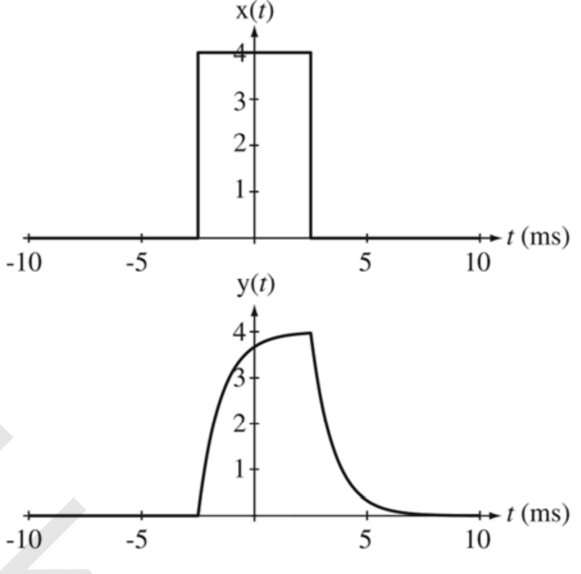
وعلى ذلك فالاستجابة ستكون :

$$y(t) = 4\left[\left(1 - e^{-1000\left(t+\frac{1}{400}\right)}\right) u\left(t + \frac{1}{400}\right) - \left(1 - e^{-1000\left(t-\frac{1}{400}\right)}\right) u(t - \frac{1}{400})\right]$$

انظر شكل (٦.٣٥) وشكل (٦.٣٦).




**شكل رقم (٦.٣٥) مقدار وزاوية، تحويل فورير المستمر CTFT، والإثارة، والاستجابة، والاستجابة الترددية للنظام.**



شكل رقم (٦.٣٦) إثارة نبضة مستطيلة واستجابة النظام لها.

**مثال ٦.١٧**

**تحليل النظام باستخدام تحويل فورير المستمر CTFT**

نظام موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية : $y'(t)+1000y(t)=1000x(t)$ تمت إثارته بالإشارة $x(t)=4rect(200t)*\delta_{0.01}(t)$. احسب وارسم الاستجابة $y(t)$.

من مثال ٦.١٦ حصلنا على :

$$Y(f) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1000X(j\omega)}{j\omega+1000}$$

تحويل فورير (صورة التردد الدوري) للإثارة هو $X(f)=0.02sinc(f/200)\delta_{100}(f)$ وبالتالي فإن $X(j\omega)=0.02sinc(\omega/400\pi)\delta_{100}(\omega/2\pi)$. باستخدام خاصية التحجيم للصدمة الدورية :

$$X(j\omega)=0.02sinc(\omega/400\pi)x2\pi\delta_{200\pi}(\omega)=0.04\pi sinc(\omega/400\pi)\delta_{200\pi}(\omega)$$

وعلى ذلك فإن تحويل فورير المستمر للاستجابة سيكون :

$$Y(j\omega) = \frac{4000\pi sinc(\frac{\omega}{400\pi})\delta_{200\pi}(\omega)}{j\omega + 1000}$$

أو باستخدام تعريف الصدمة الدورية :

$$Y(j\omega) = 4000\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sinc\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)\delta(\omega - 200\pi k)}{j\omega + 1000}$$

والآن باستخدام خاصيةالتكافؤ لدالة الصدمة فإن :

$$Y(j\omega) = 4000\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sinc(k/2)\delta(\omega - 200\pi k)}{j\omega + 1000}$$

بإجراء تحويل فورير العكسي نحصل على :

$$y(t) = 2000 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sinc(k/2)}{j200\pi k + 1000} e^{j200\pi kt}$$

إذا قمنا بفصل الجزء k=0 وازدواج كل k و k- نحصل على :

$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sinc(k/2)}{j200\pi k+1000} e^{j200\pi kt} + \frac{sinc(-k/2)}{-j200\pi k+1000} e^{-j200\pi kt}$$

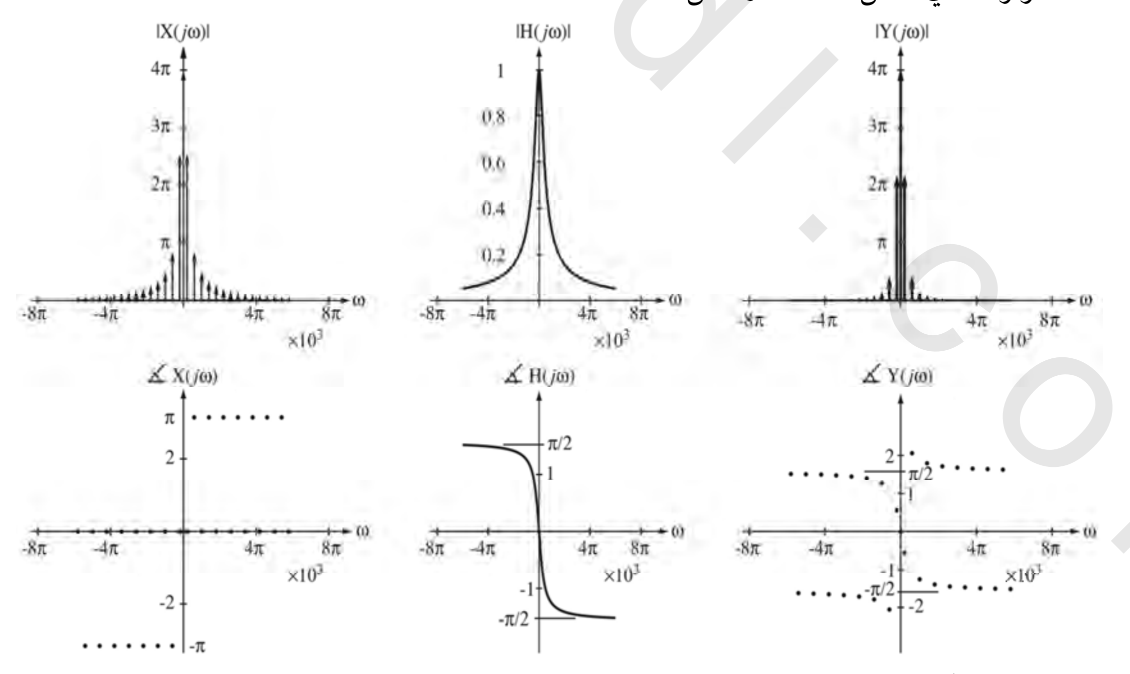
باستخدام حقيقة أن دالة الـ sinc تكون دالة زوجية وبربط الحدود على مقام متحد :

$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} sinc(k/2) \frac{(-j200\pi k + 1000)e^{j200\pi kt} + (j200\pi k + 1000)e^{-j200\pi kt}}{(200\pi k)^2 + (1000)^2}$$

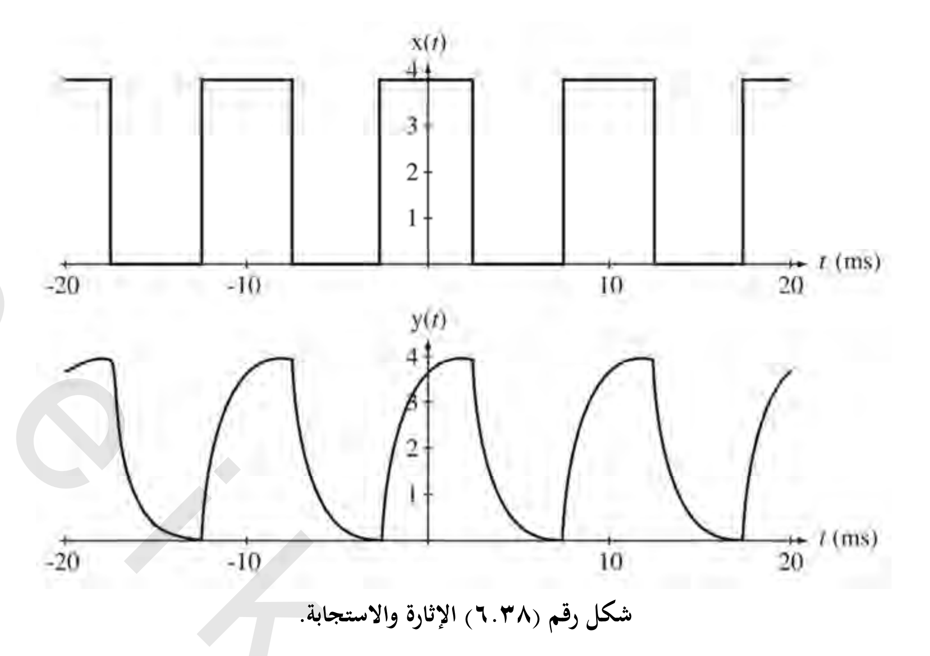
$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} sinc(k/2) \frac{2000\cos(200\pi kt) + 400\pi k sin(200\pi kt)}{(200\pi k)^2 + (1000)^2}$$

$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} sinc(k/2) \frac{5\cos(200\pi kt) + \pi k sin(200\pi kt)}{25 + (\pi k)^2}$$

واضح أن الاستجابة هي ثابت زائد مجموع خطي من الجيب وجيب التمام الحقيقي عند مضاعفات حقيقية من الـ 100 هرتز كما في شكل (٦.٣٧) وشكل (٦.٣٨).




**شكل رقم (٦.٣٧) مقدار وزاوية، تحويل فورير المستمر، والإثارة، والاستجابة، والاستجابة الترددية للنظام.**




**شكل رقم (٦.٣٨) الإثارة والاستجابة.**

## (٦.٤) ملخص النقاط المهمة

١- تتابع فورير هو طريقة للتعبير عن أي إشارة اختيارية مع الأهمية الهندسية كتجميع خطي من الدوال الجيبية ذات القيمة الحقيقية، أو المركبة.

٢- مجموعة الدوال الجيبية المركبة المستخدمة عن طريق الصورة المركبة لتتابع فورير تكون مجموعة من الدوال المتعامدة التي يمكن دمجها في ترابط خطي لتكوين أي دالة دورية اختيارية ذات فائدة هندسية.

٣- العلاقة التي تعطي الدالة التوافقية لتتابع فورير يمكن استنتاجها باستخدام أساسيات التعامد.

٤- يمكن استخدام تتابع فورير لإيجاد استجابة أي نظام LTI لأي إثارة دورية.

٥- يمكن مد تتابع فورير لكي يسمح بالتعبير عن الدوال غير الدورية وهذا الامتداد يسمى تحويل فورير.

٦- بمساعدة جدول أزواج تحويلات فورير وخواصها، فإن التحويل والتحويل العكسي لكل الإشارات ذات الأهمية الهندسية الدورية أو غير الدورية يمكن إيجادها.

٧- الاستجابة الترددية لأي نظام مستقر هي تحويل فورير لاستجابته الصدمية.

٨- يمكن استخدام تحويل فورير لإيجاد استجابة أي نظام LTI لإشارات الطاقة وأيضاً للإشارات الدورية.

**تمارين مع إجاباتها**

(في كل تمرين تكون الإجابات مدونة بترتيب عشوائي).

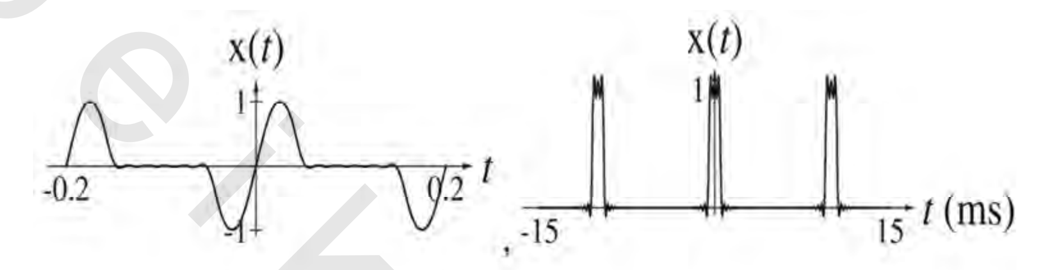
**تتابع فورير**

١- باستخدام ماتلاب ارسم مجموع الدوال الجيبية المركبة على الفترة الزمنية الموضحة :

(أ) $x(t) = \frac{1}{10}\sum_{k=-30}^{30} sinc\left(\frac{k}{10}\right) e^{j200\pi kt}, \ -15 < t < 15ms$

(ب) $x(t) = \frac{j}{4}\sum_{k=-9}^{9}\left[sink\left(\frac{k+2}{2}\right) - sinc\left(\frac{k-2}{2}\right)\right] e^{j10\pi kt}, -200 < t < 200ms$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت.-١).

**التعامد**

٢- وضح باستخدام التكامل التحليلي بأن تكامل الدالة التالية يكون صفر في الفترة الزمنية -1/2<t<1/2

g(t)=Asin(2πt)Bsin(4πt)

**الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً**

٣- لكل إشارة من الإشارات التالية، احسب تتابع فورير المستمر CTFS اعتماداً على الدورة الأساسية، وارسم مقدار وزاوية الدالة التوافقية مع الرقم التوافقي k، وبعد ذلك حوِّلْ الإجابات إلى الصورة المثلثية للدالة التوافقية :

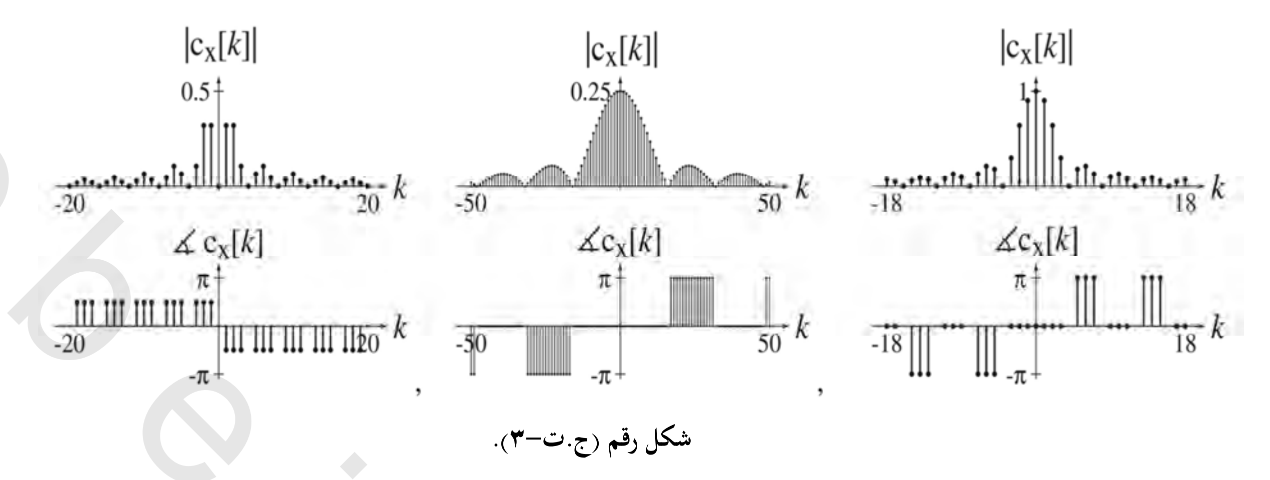
(أ) $x(t)=4rect(4t)*\delta_1(t)$

(ب) $x(t)=4rect(4t)*\delta_4(t)$

(ت) دالة دورية موصوفة على الدورة الأساسية بالمعادلة التالية :

$$x(t) = \begin{cases} sgn(t), & |t| < 1 \\ 0, & 1 < |t| < 2 \end{cases}$$

**الإجابة :**




شكل رقم (ج.ت-٣).

٤- دالة دورية x(t) دورتها ٤ ثوانٍ موصوفة على مدار دورة أساسية واحدة بالعلاقة x(t)=3-t, 0<t<4. ارسم هذه الإشارة واحسب الدالة التوافقية لتتابع فورير لها. بعد ذلك إرسم على التدريج نفسه تقريبات الإشارة $x_N(t)$ المعطاة بالعلاقة التالية :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_x[k] e^{j2\pi kt/T_0}$$

لقيم N=1, 2, 3. (في كل حالة يجب أن يغطي تدريج الشكل دورتين أساسيتين على الأقل من الإشارة الأصلية)

**الإجابة :**

$$c_x[k] = \frac{1}{4}\frac{2e^{-j2\pi k}(-2 - j\pi k) - j6\pi k + 4}{(\pi k)^2}$$

شكل رقم (ج.ت-٤).

٥- باستخدام جدول تتابع فورير المستمر للتحويلات وخواص تتابع فورير، احسب الدالة التوافقية لتتابع فورير لكل من الإشارات الدورية التالية باستخدام زمن التمثيل T الموضح :

(أ) $x(t)=10\sin(20\pi t), \quad T=1/10$

(ب) $x(t)=2\cos(100\pi(t-0.005)), \quad T=1/50$

(ت) $x(t)=-4\cos(500\pi t), \quad T=1/50$

(ث) $x(t)=\frac{d}{dt}(e^{-j10\pi t}), \quad T=1/5$

(ج) $x(t)=\text{rect}(t)*4\delta_4(t) \quad T=4$

(ح) $x(t)=\text{rect}(t)*4\delta_1(t) \quad T=1$

(خ) $x(t)=\text{tri}(t)*\delta_1(t) \quad T=1$

**الإجابة** :

$j(\delta[k+1]-\delta[k-1])$ ، $j5(\delta[k+1]-\delta[k-1])$ ، $\delta[k]$ ، $\delta[k]$ ، $-2(\delta[k-5]+\delta[k+5])$ ، $-j10\pi\delta[k+1]$ ، $\text{sinc}(k/4)$.

٦- الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر للدالة $x(t)$ اعتماداً على دورة أساسية واحدة هي :

$$c_x[k]=\frac{1-\cos(\pi k)}{(\pi k)^2}$$

(أ) هل هذه الإشارة زوجية أم فردية أم أنها لا زوجية ولا فردية ؟

(ب) ما هي القيمة المتوسطة لهذه الإشارة ؟

**الإجابة** : زوجية، ½.

٧- احسب الدالة التوافقية لدالة جيبية على الصورة العامة التالية $A\sin(2\pi f_0 t)$. بعد ذلك، استخدم نظرية بارسيفال احسب طاقة هذه الإشارة وتحقق من أنها هي نفسها مثل طاقة الإشارة المحسوبة من الدالة نفسها مباشرة.

**الإجابة** : $A^2/2$

٨- افترض زوج التحويل التالي : $c_x[k]=\begin{cases} j4k, & |k|<4 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ إذا كانت $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}c_x[k]$ و $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$ ، $y(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}c_y[k]$

(أ) ما هي القيمة المتوسطة للإشارة $x(t)$ ؟

(ب) ما هي القيمة العددية لـ $c_y[1]$ ؟

(ج) هل هذه $x(t)$ زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية ؟

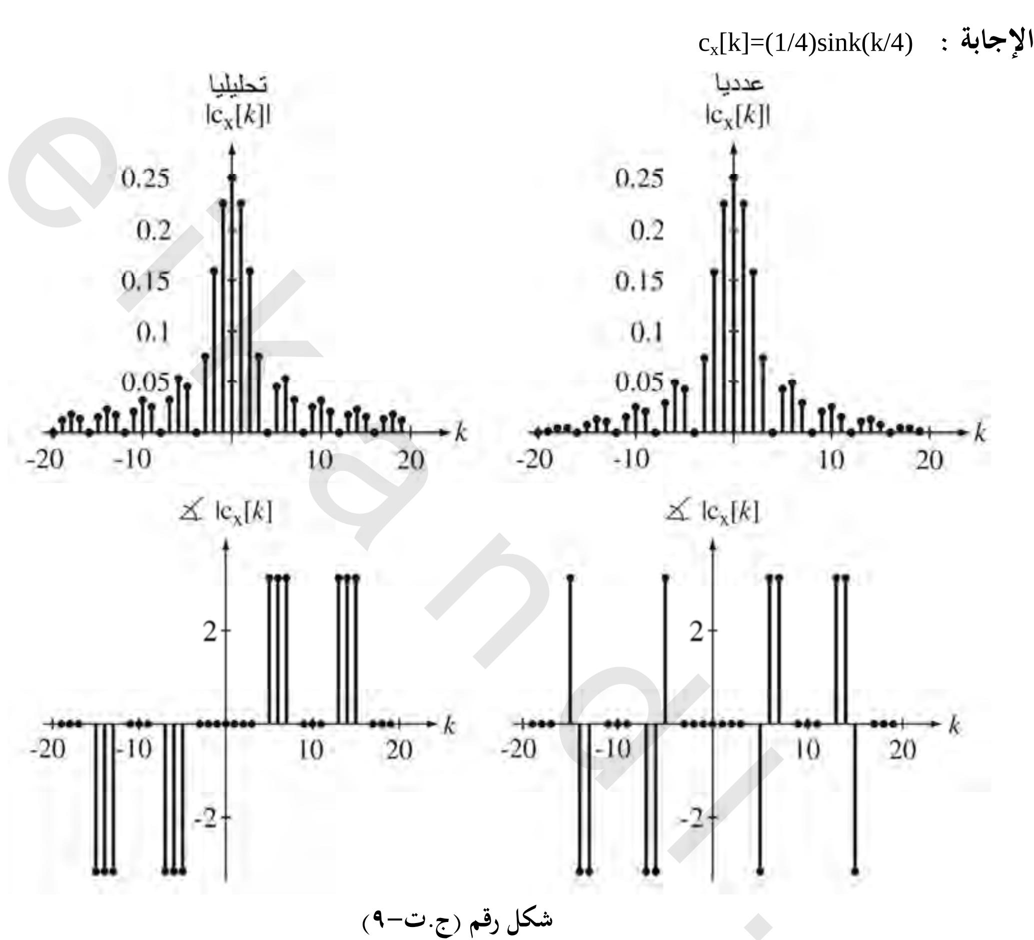
**الإجابة** : 0، $16/\pi$، فردية

٩- احسب وارسم مقدار وزاوية الدالة التوافقية لتتابع فورير CTFS للدالة $x(t)=rect(20t)*\delta_{1/5}(t)$ مستخدماً زمن تمثيل $T=1/5$ باستخدام :

(أ) جداول تتابع فورير المستمر CTFTS

(ب) زمن بين العينات $Ts=1/2000$ عودياً

**الإجابة** : $c_x[k]=(1/4)sink(k/4)$




**شكل رقم (ج.ت-٩)**

١٠- مكّمم يقبل إشارة دخل مستمرة زمنياً ويعطي إشارة خرج مستمرة زمنياً لها عدد محدد من القيم المتساوية التباعد. إذا كانت $x_{in}(t)$ هي إشارة الدخل، و $x_{out}(t)$ هي إشارة الخرج و q هي الفرق بين مستويين متجاورين من الخرج، قيمة $x_{out}(t)$ عند اي لحظة زمنية يمكن حسابها عن طريق تكوين النسبة $x_{in}(t)/q$، مقرباً إياها لأقرب رقم صحيح، وبعد ذلك يتم ضرب النتيجة في q. افترض أن مدى مستويات الإشارة الداخلة للمكمم تتراوح بين 10- حتى 10+ وافترض أن عدد مستويات التكميم تساوي ١٦. احسب التشويه التوافقي العددي الكلي (انظر مثال ٦.٤) لإشارة خرج هذا المكمم إذا كانت إشارة الدخل هي $x_{in}(t)=10\sin(2000\pi t)$.

**الإجابة :** 0.2342%.

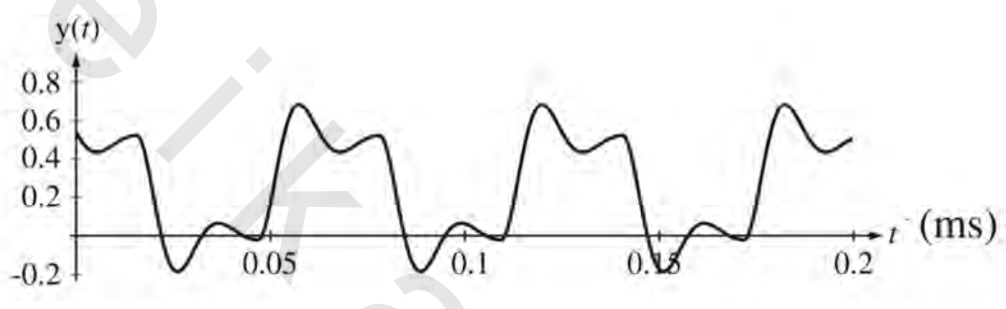
**استجابة الأنظمة للإثارة الدورية**

١١- نظام مستمر زمنياً موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 200y'(t) + 10^5 y(t) = 10^5 x(t)$$

إذا كانت الإثارة هي $x(t)=rect(32t)*\delta_{1/16}(t)$ ، ارسم الاستجابة y(t).

**الإجابة :**




**شكل (ج.ت-١١).**

**تحويلات فورير الأمامية والعكسية**

١٢- افترض إشارة يمكن تعريفها كما يلي :

$$x(t)= 2\cos(4\pi t) + 5\cos(15\pi t)$$

احسب تحويل فورير المستمر CTFT للإشارة x(t-1/40)، والإشارة x(t+1/20) وحدد الإزاحة الزاوية لكل دالة جيبية في كل حالة. ارسم زاوية الطور لتحويل فورير المستمر CTFT وارسم خطاً مستقيماً خلال الأربع نقاط الطورية التي تنتج في كل حالة. ما هي العلاقة بين ميل هذا الخط والتأخير الزمني ؟

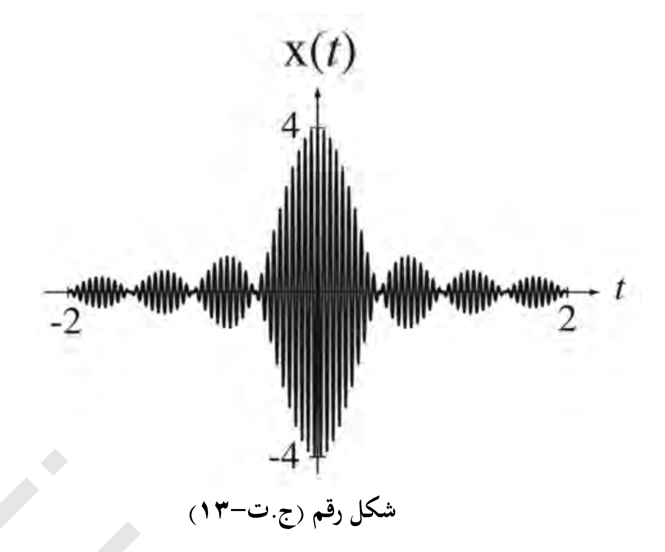
**الإجابة :**

ميل هذا الخط هو $-2\pi f$ مضروباً في زمن التأخير

١٣- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، احسب وارسم مع الزمن تحويل فورير المستمر العكسي للدالة :

$$X(f) = rect\left(\frac{f-20}{2}\right) + rect\left(\frac{f+20}{2}\right)$$

**الإجابة :**



**شكل رقم (ج.ت-١٣)**

١٤- احسب تحويل فورير المستمر CTFT للدالة $x(t)=sinc(t)$. بعد ذلك غير التدريج الزمني $t\leftrightarrow 2t$ في الإشارة $x(t)$ واحسب تحويل فورير للإشارة المحجمة زمنياً.

**الإجابة :** $rect(f)$ ، $(1/2)rect(f/2)$

١٥- باستخدام الازدواجية بين الضرب والالتفاف لتحويل فورير المستمر، احسب معادلة $y(t)$ التي لا تستخدم عملية الالتفاف * وارسم $y(t)$.

(أ) $y(t)=rect(t)*cos(\pi t)$

(ب) $y(t)=rect(t)*cos(2\pi t)$

(ت) $y(t)=sinc(t)*sinc(t/2)$

(ث) $y(t)=sinc(t)*sinc^2(t/2)$

(ج) $y(t)=e^{-t}u(t)*sin(2\pi t)$

**الإجابة :** $\frac{\cos(2\pi t+2.984)}{\sqrt{1+(2\pi)^2}}$ ، $2/\pi \cos(\pi t)$ ، $0$ ، $sinc(t/2)$ ، $sinc^2(t/2)$

١٦- باستخدام تحويل فورير المستمر للدالة المستطيلة وخاصية التفاضل لـ CTFT، احسب تحويل فورير للدالة :

$$x(t)=\delta(t-1)-\delta(t+1)$$

تحقق من إجابتك مع تحويل فورير المحسوب باستخدام الجداول وخاصية الإزاحة الزمنية.

الإجابة : $-j2sin(2\pi f)$

١٧- احسب القيم العددية التالية :

(أ) $x(t)=20rect(4t)$ $\quad X(f)|_{f=2}$

(ب) $x(t)=2\text{sinc}(t/8)*\text{sinc}(t/4)$ — $x(4)$

(ج) $x(t)=2\text{tri}(t/4)*\delta(t-2)$ — $x(1)$ و $x(-1)$

(د) $x(t)=-5\text{rect}(t/2)*(\delta(t+1)+\delta(t))$ — $x(1/2)$ و $x(-1/2)$ و $x(-5/2)$

(ه) $x(t)=3\text{rect}(t-1)$ — $X(f)|_{f=1/4}$

(و) $x(t)=4\text{sinc}^2(3t)$ — $X(j\omega)|_{\omega=4\pi}$

(ز) $x(t)=\text{rect}(t)*\text{rect}(2t)$ — $X(f)|_{f=1/2}$

(ح) $X(f)=10[\delta(f-1/2)+\delta(f+1/2)]$ — $x(1)$

(ط) $X(j\omega)=-2\text{sinc}(\omega/2\pi)*3\text{sinc}(\omega/\pi)$ — $x(0)$

**الإجابة** : 5- و ½ و 3/2 و 4/9 و 0 و 3- و 3.1831 و 10- و 20- و j2.7– و 0.287 و 5.093

١٨- احسب تحويل فورير الأمامي أو العكسي لكل مما يأتي. يجب ألا تحتوي الإجابة النهائية على عملية الالتفاف *.

(أ) $\mathcal{F}(15\text{rect}((t+2)/7))$

(ب) $\mathcal{F}^{-1}(2\text{tri}(f/2)e^{-j6\pi f})$

(ج) $\mathcal{F}(\sin(20\pi t)\cos(200\pi t))$

**الإجابة** : $(j/2)[\delta(f-90)+\delta(f+110)-\delta(f-110)-\delta(f+90)]$ و $105\text{sinc}(7f)e^{j4\pi f}$ و $4\text{sinc}^2(2(t-3))$.

١٩- استخدم نظرية بارسيفال واحسب طاقة الإشارة للإشارات التالية :

(أ) $x(t)=4\text{sinc}(t/5)$

(ب) $x(t)=2\text{sinc}^2(3t)$

**الإجابة** : 80 و 8/9

٢٠- احسب القيم العددية للثوابت التالية :

(أ) $6\text{rect}(2t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\text{sinc}(bf)$ أوجد A و b

(ب) $10\text{tri}((t-1)/8) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\text{sinc}^2(bf)e^{-jB\pi f}$ أوجد A و B و b

(ج) $A\cos(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 10[\delta(f-4)+\delta(f+4)]$ أوجد A و $f_0$

(د) $(A/b)\delta_{1/b}(t)e^{jB\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/5)\delta_{1/10}(f-1/5)$ أوجد A و B و b

الإجابة : 1/10 و 1/5 و 80 و 20 و 3 و 2 و 8 و 2/5 و 4 و 1/2

٢١- ما هي المساحة الكلية تحت الدالة $g(t)=100\text{sinc}((t-8)/30)$ ؟

**الإجابة** : 3000

٢٢- باستخدام خاصية التكامل احسب تحويل فورير المستمر CTFT لكل من الدوال التالية مع تحويل فورير المحسوب باستخدام الخواص الأخرى.

(أ)
$$g(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 2-|t|, & 1<|t|<2\\ 0, & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

(ب) g(t)=8rect(t/3)

**الإجابة :** 24sinc(3f) و 3sinc(3f)sinc(f)

٢٣- ارسم مقدار وزاوية تحويلات فورير المستمر للإشارات التالية في صورة التردد الدوري f.

(أ) x(t)=δ(t-2)

(ب) x(t)=u(t)-u(t-1)

(ج) x(t)=5rect((t+2)/4)

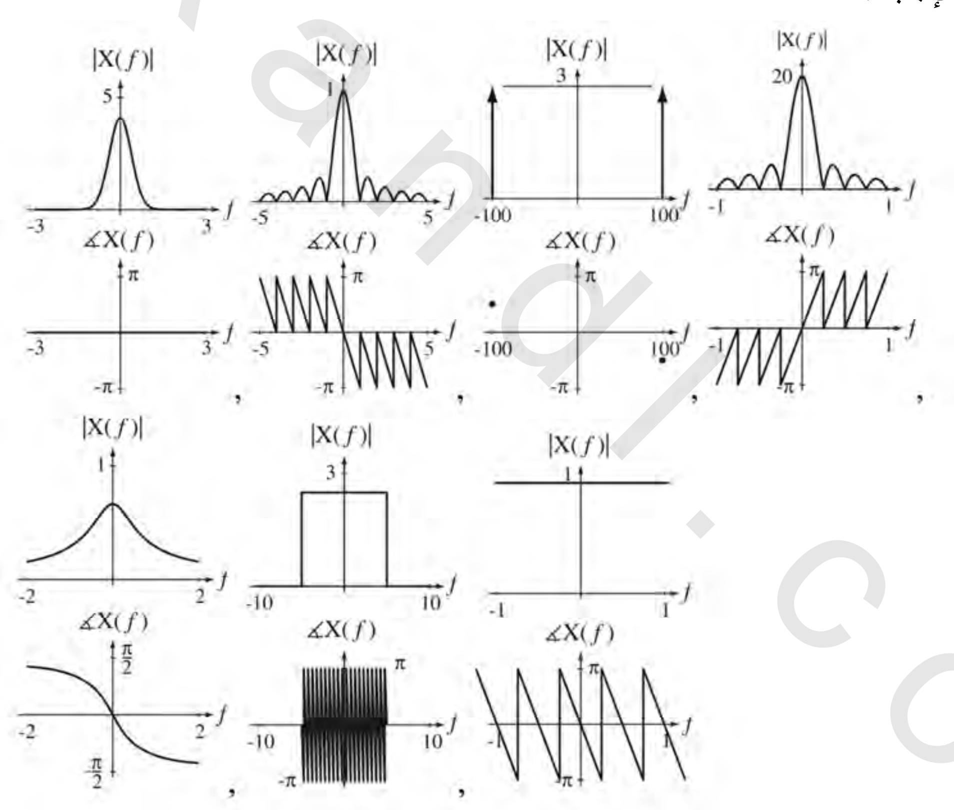
(د) x(t)=25sinc(10(t-2))

(ه) x(t)=6sin(200πt)

(و) $x(t)=2e^{-3t}u(3t)$

(ز) $x(t) = 4e^{-3t^2}$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–٢٣).

٢٤- ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر CTFT لكل من الإشارات التالية في صورة التردد الزاوي ω.

(أ) $x(t)=\delta_2(t)$

(ب) x(t)=sgn(2t)

(ج) x(t)=10tri((t-4)/20)

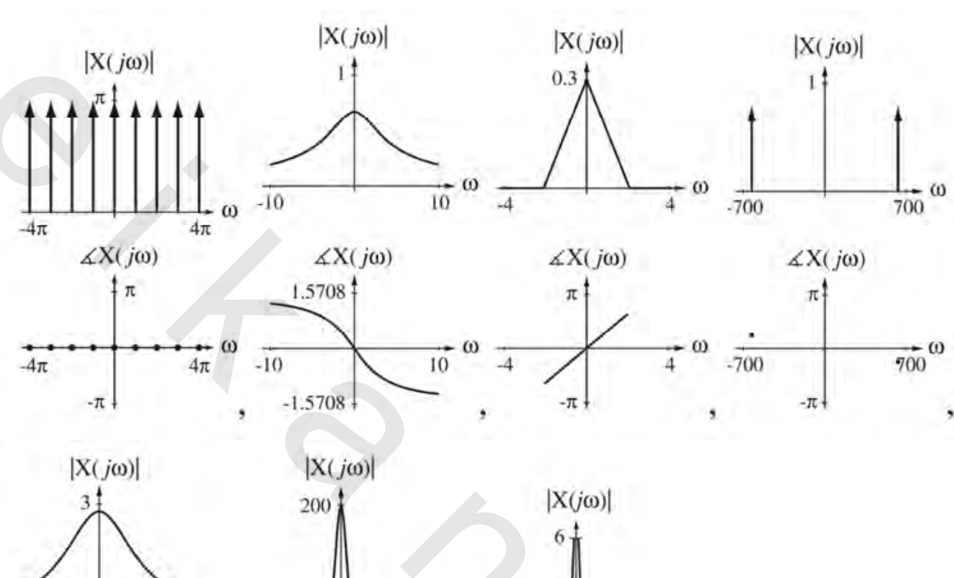
(د) $x(t)=(1/10)\text{sinc}^2((t+1)/3)$

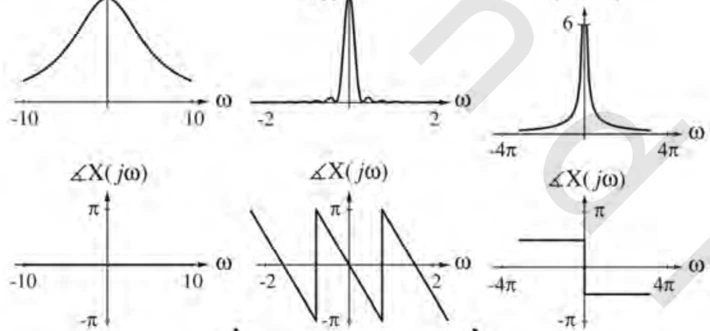
(ه) $x(t) = \frac{\cos(200\pi t - \frac{\pi}{4})}{4}$

(و) $x(t)=2e^{-3t}u(t)$

(ز) $x(t)=7e^{-5|t|}$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت-٢٤).

٢٥- ارسم تحويلات فورير العكسية لكل من الدوال التالية :

(أ) X(f)-15rect(f/4)

(ب) $X(f) = \frac{sinc(-10f)}{30}$

(ج) $X(f) = \frac{18}{9+f^2}$

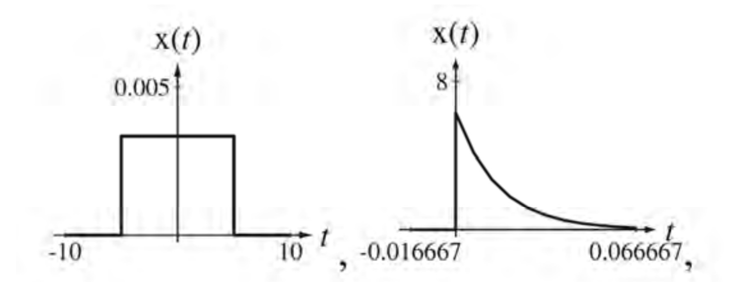
(د) $X(f) = \frac{1}{10+jf}$

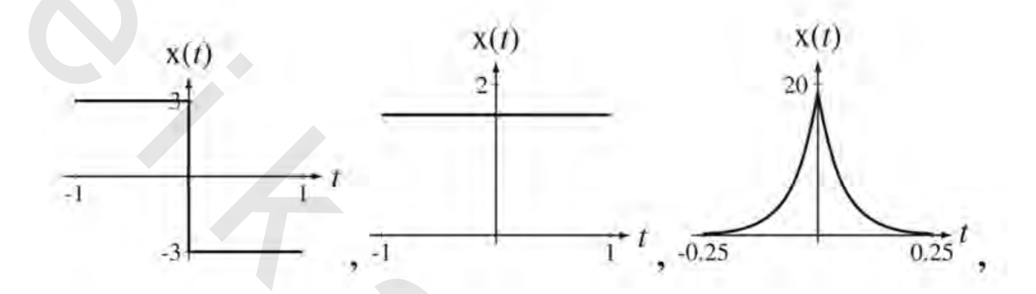
(ه) $X(f) = \frac{\delta(f-3)+\delta(f+3)}{6}$

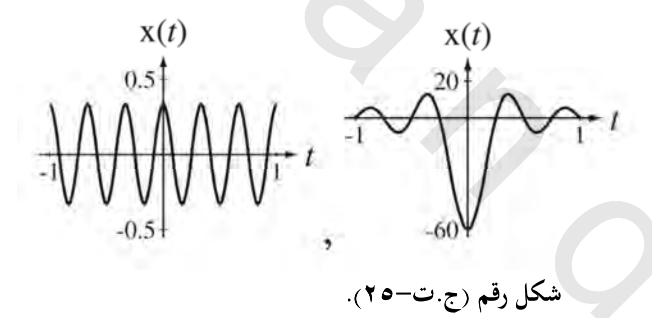
(و) $X(f) = 8\delta(5f)$

(ز) $X(f) = -\frac{3}{j\pi f}$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت-٢٥).

٢٦- ارسم تحويلات فورير العكسية لكل من الدوال التالية :

(أ) $X(j\omega) = e^{-4\omega^2}$

(ب) $X(j\omega)=7\text{sinc}^2(\omega/\pi)$

(ج) $X(j\omega)=j\pi[\delta(\omega+10\pi)-\delta(\omega-10\pi)]$

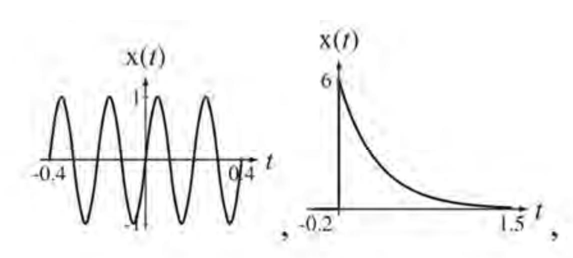
(د) $X(j\omega)=(\pi/20)\delta_{\pi/20}(\omega)$

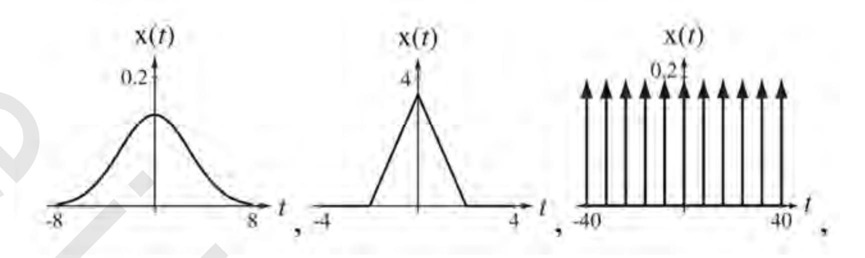
(ه) $X(j\omega)=5\pi/j\omega + 10\pi\delta(\omega)$

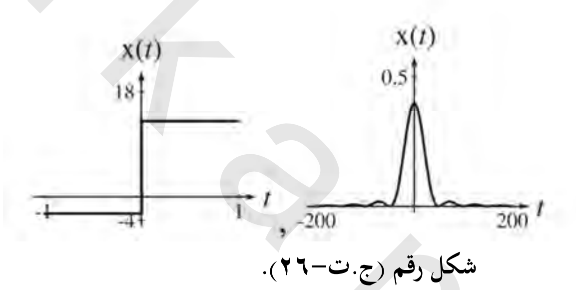
(و) $X(j\omega) = \frac{6}{3+j\omega}$

(ز) $X(j\omega)=20\text{tri}(8\omega)$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–٢٦).

٢٧- احسب تحويل فورير المستمر CTFT للإشارات التالية في صورة التردد الدوري f أو التردد الزاوي ω أيهما يكون مريحا :

(أ) $x(t)=3\cos(10t)+4\sin(10t)$

(ب) $x(t)=2\delta_2(t)-2\delta_2(t-1)$

(ج) $x(t)= 4\text{sinc}(4t)-2\text{sinc}(4(t-1/4))-2\text{sinc}(4(t+1/4))$

(د) $x(t)=[2e^{(-1+j2\pi)t} + 2e^{(-1-j2\pi)t}]u(t)$

(ه) $x(t)=4e^{-|t|/16}$

**الإجابة** : $(5\pi e^{-j0.927})\delta(\omega-10) + (5\pi e^{-j0.927})\delta(\omega-10)$ و $4\,\frac{j2\pi f+1}{(j2\pi f+1)^2+(2\pi)^2}$ و

$\text{Rect}(\omega/8\pi)-\text{rect}(\omega/8\pi)\cos(\omega/4)$ و $\frac{128}{1+256w^2}$ و $j4\pi e^{-j\omega/2}\,\delta_\pi(\omega)\sin(\omega/2)$

٢٨- ارسم مقدار وزاوية هذه الدوال. ارسم أيضاً تحويل فورير العكسي لهذه الدوال :

(أ) $X(j\omega) = \frac{10}{3+j\omega} - \frac{4}{5+j\omega}$

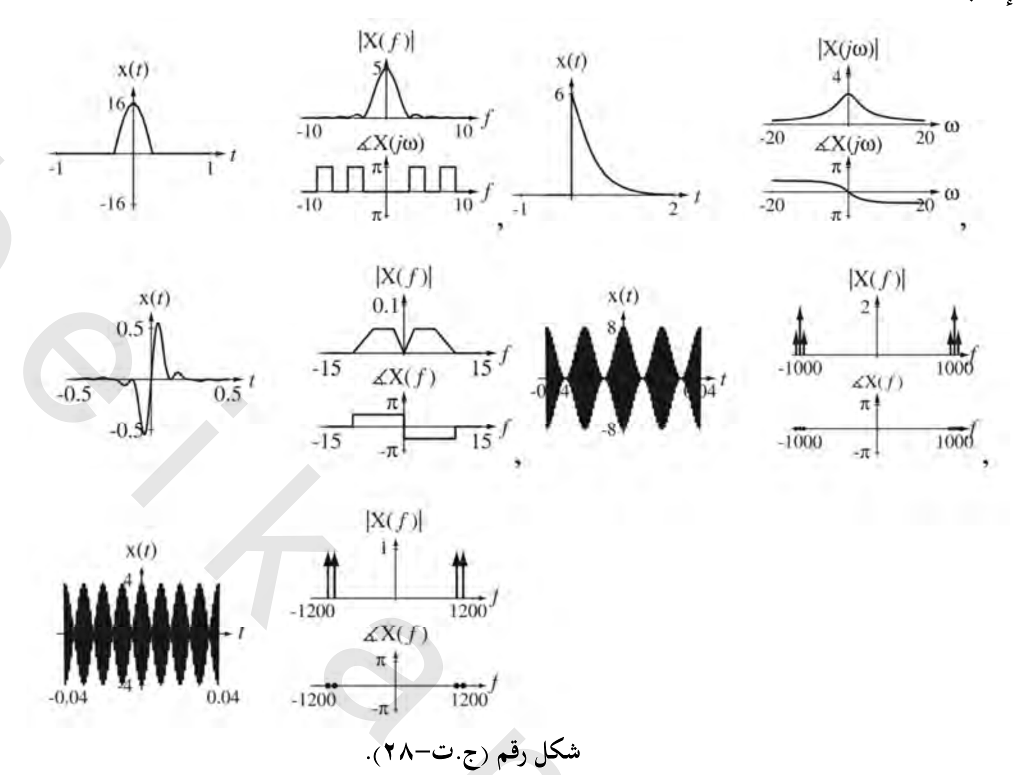
(ب) $X(f) = 4\left[sinc\left(\frac{f-1}{2}\right) + sinc\left(\frac{f+1}{2}\right)\right]$

(ج) $X(f) = \frac{j}{10}\left[tri\left(\frac{f+2}{8}\right) - tri\left(\frac{f-2}{8}\right)\right]$

(د) $X(f) = \delta(f+1050) + \delta(f+950) + \delta(f-950) + \delta(f-1050)$

(ه) $X(f) = \begin{bmatrix} \delta(f+1050) + 2\delta(f+1000) + \delta(f+950) \\ +\delta(f-950) + 2\delta(f-1000) + \delta(f-1050) \end{bmatrix}$

**الإجابة :**




**شكل رقم (ج.ت-٢٨).**

٢٩- ارسم الإشارات التالية مع الزمن. ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر لها في صورة التردد الدوري f أوالتردد الزاوي ω أيهما يكون أكثر راحة.

(أ) $x(t)=rect(2t)*\delta_1(t)-rect(2t)*\delta_1(t-1/2)$

(ب) $x(t)=-1+2rect(2t)*\delta_1(t)$

(ج) $x(t)=e^{-t/4}u(t)*sin(2\pi t)$

(د) $x(t) = e^{-\pi t^2} * [rect(2t) * \delta_1(t)]$

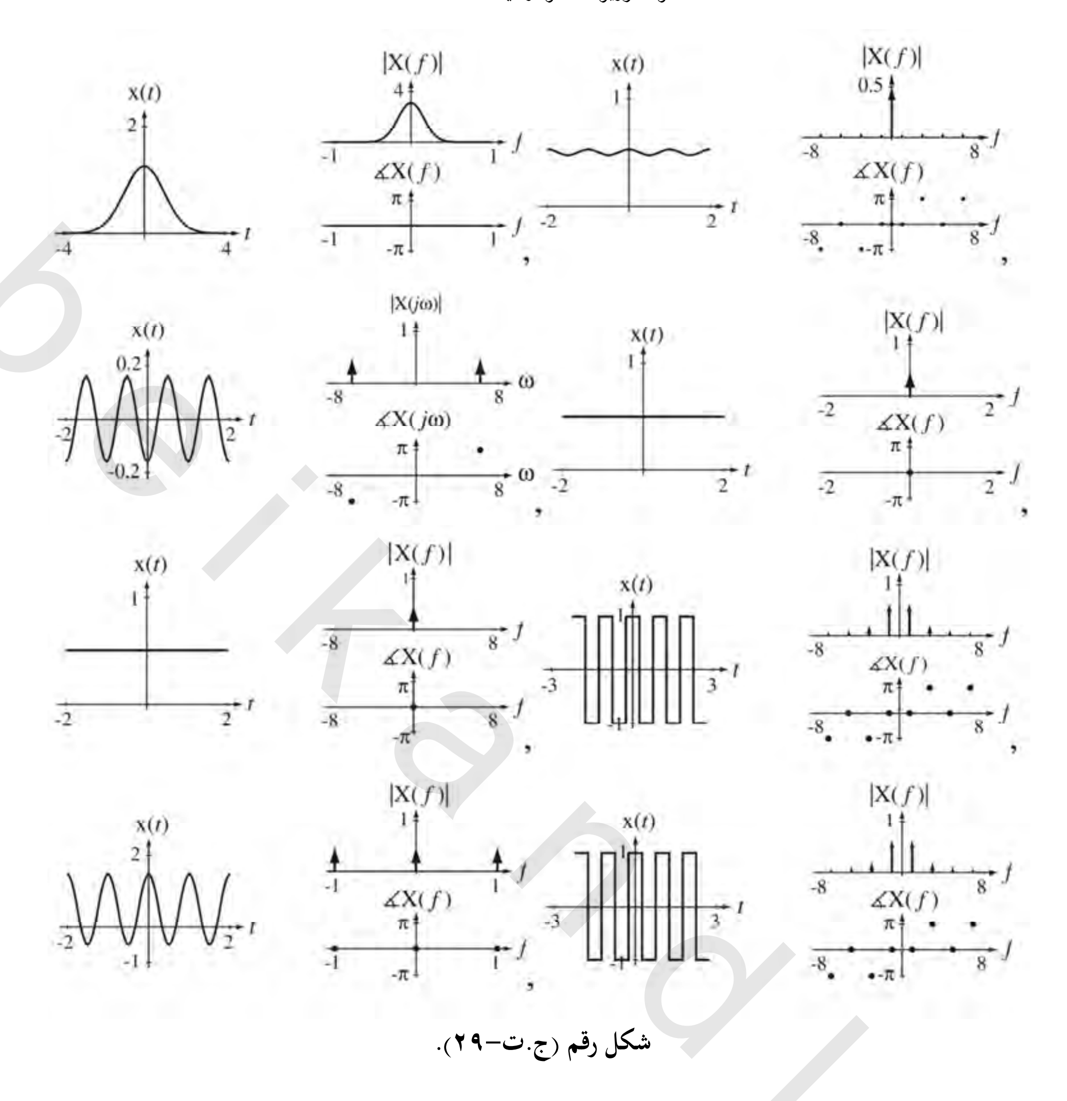
(ه) $x(t) = rect * [tri(2t) * \delta_1(t)]$

(و) $x(t)=sinc(2.01t)*\delta_1(t)$

(ز) $x(t)=sinc(1.99t)*\delta_1(t)$

(ح) $x(t) = e^{-t^2} * e^{-t^2}$

**الإجابة :**



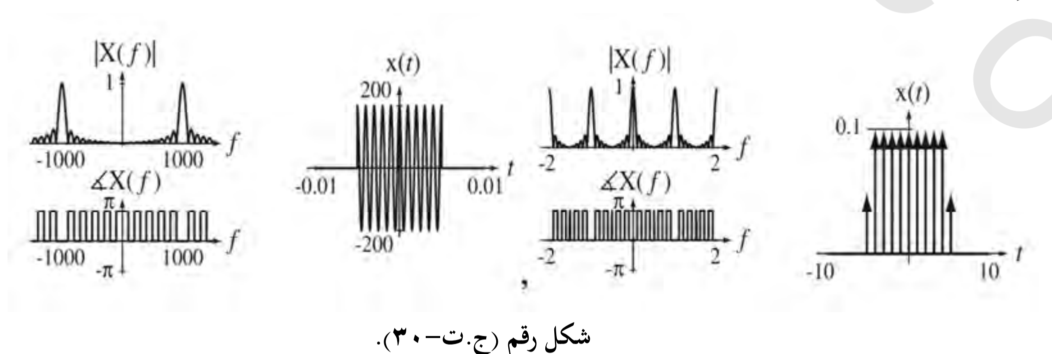
شكل رقم (ج.ت–٢٩).

٣٠- ارسم مقدار وزاوية كل دالة من الدوال التالية. ارسم تحويل فورير العكسي أيضاً لهذه الدوال :

(أ) $X(f) = sinc\left(\frac{f}{100}\right) * [\delta(f-1000) + \delta(f+1000)]$

(ب) $X(f)=sinc(10f)*\delta_1(f)$

**الإجابة :**



شكل رقم (ج.ت–٣٠).

٣١- ارسم الإشارات التالية مع الزمن. ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر CTFT لهذه الإشارات إما في صورة التردد الدوري f أو في صورة التردد الزاوي ω، أيهما يكون مريحا لك. في بعض الأحوال يكون من المريح رسم المخطط الزمني أولا. في بعض الأحوال الأخرى يكون من المريح عمل المخطط الزمني بعد حساب تحويل فورير المستمر عن طريق إيجاد تحويل فورير العكسي.

(أ) $x(t) = e^{-\pi t^2}\sin(20\pi t)$

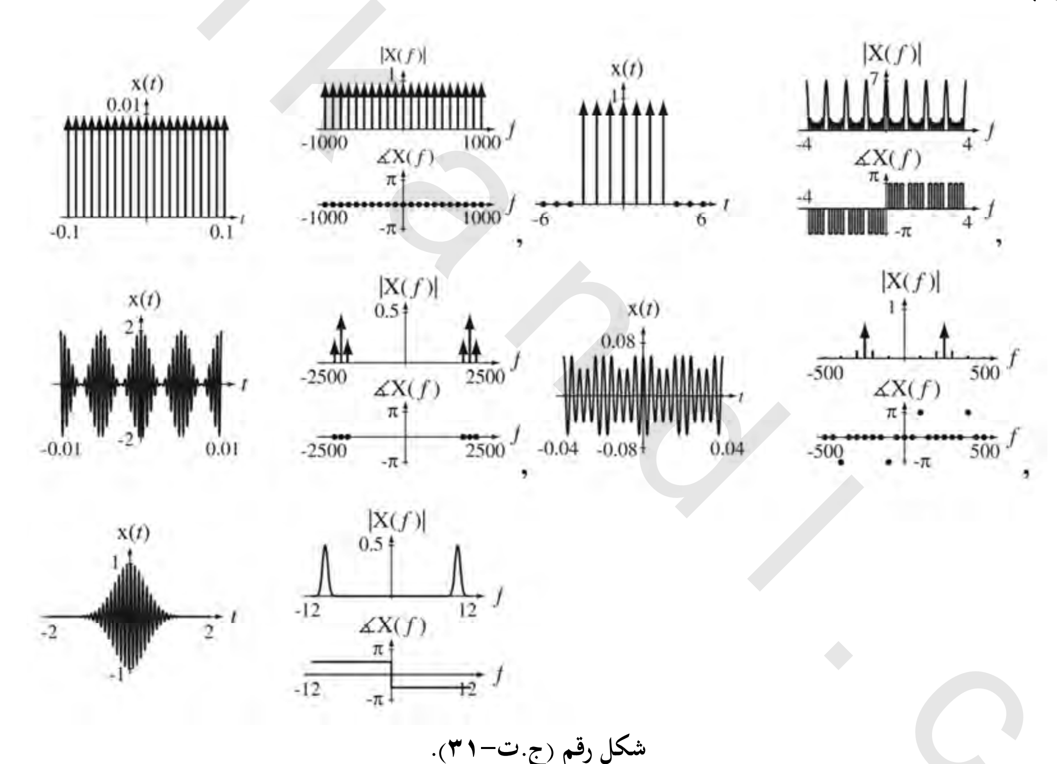
(ب) $x(t)=(1/100)\cos(400\pi t)\delta_{1/100}(t)$

(ج) $x(t)[1+\cos(400\pi t)]\cos(400\pi t)$

(د) $x(t)=[1+\text{rect}(100t)*\delta_{1/50}(t)]\cos(500\pi t)$

(ه) $x(t)=\text{rect}(t/7)\delta_1(t)$

الإجابة :




شكل رقم (ج.ت-٣١).

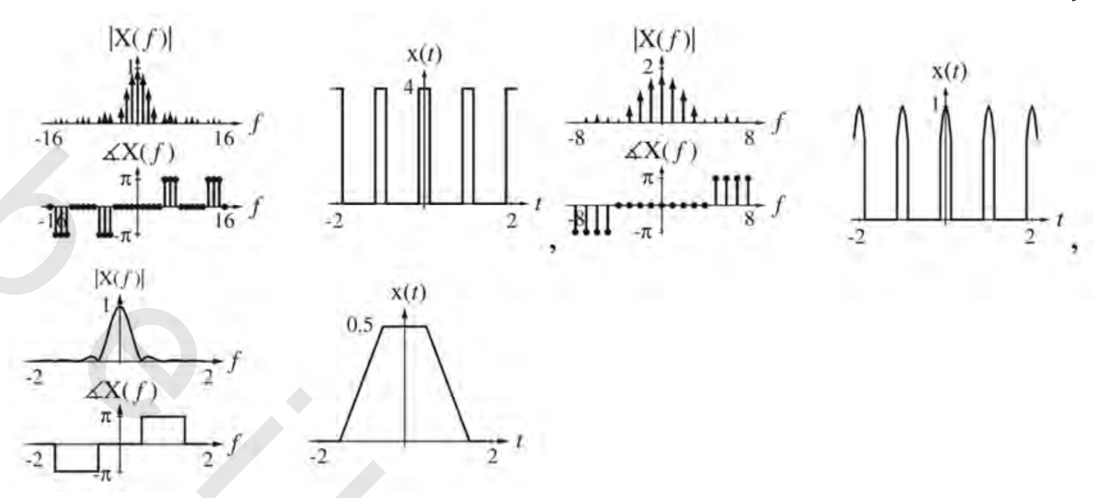
٣٢- ارسم مقدار وزاوية كل من الدوال التالية :

(أ) $X(f)\text{sinc}(f/4)\delta_1(f)$

(ب) $X(f) = \left[sinc\left(\frac{f-1}{4}\right) + sinc\left(\frac{f+1}{4}\right)\right]\delta_1(f)$

(ج) $X(f) = sinc(f)sinc(2f)$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–**٣٢**).

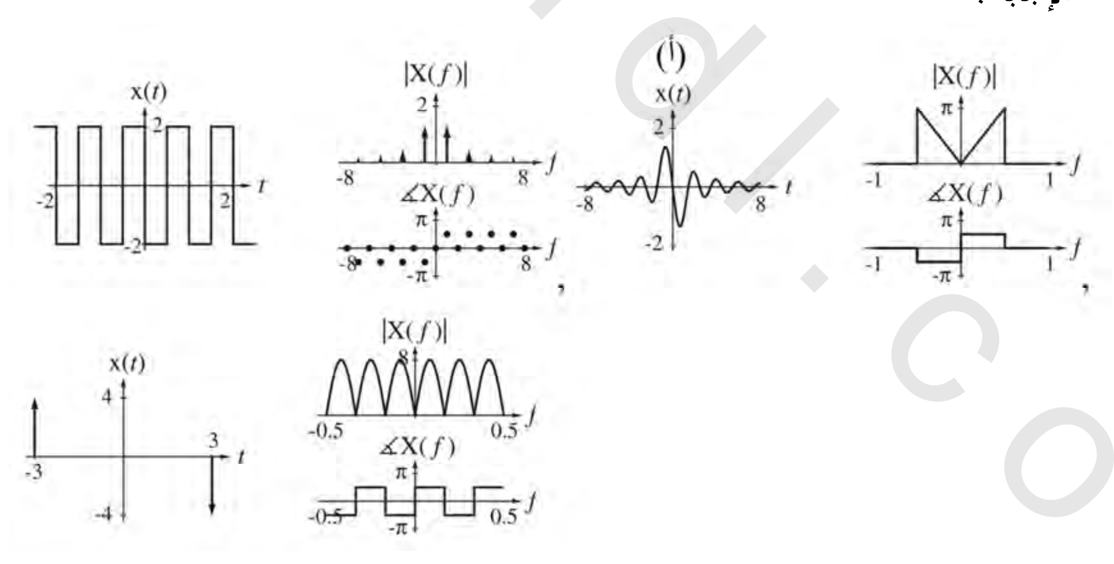
٣٣- ارسم الدوال التالية مع الزمن ومقدارة وزاوية تحويل فورير المستمر لها :

(أ) $x(t) = \frac{d}{dt}[sinc(t)]$

(ب) $x(t) = \frac{d}{dt}[4rect\left(\frac{t}{6}\right)]$

(ج) $x(t) = \frac{d}{dt}(tri(2t) * \delta_1(t))$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–**٣٣**).

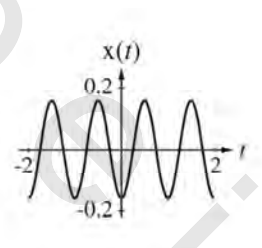
٣٤- ارسم الدوال التالية مع الزمن ومقدارة وزاوية تحويل فورير المستمر لها :

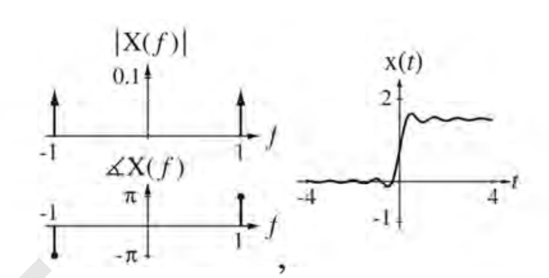
(أ) $x(t) = \int_{-\infty}^{t} \sin(2\pi\lambda)\, d\lambda$

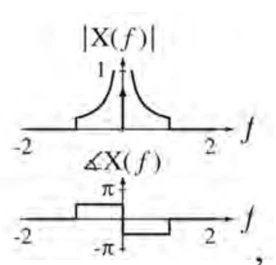
(ب) $x(t) = \int_{-\infty}^{t} rect(\lambda)\, d\lambda$

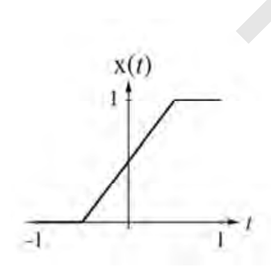
(ج) $x(t) = \int_{-\infty}^{t} 3sinc(2\lambda)\, d\lambda$

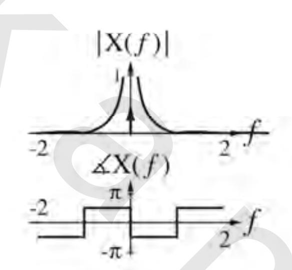
**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–٣٤).

### العلاقة بين تتابع فورير CTFS وتحويل فورير CTFT

٣٥- الانتقال من تتابع فورير CTFS وتحويل فورير CTFT موضحة بالإشارة التالية :

$x(t)=rect(t/\omega)*\delta_{T_0}(t)$

أو :

$$x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-nT_0}{\omega}\right)$$

الدالة التوافقية لتتابع فورير CTFT لهذه الإشارة يُعطَي بالعلاقة التالية :

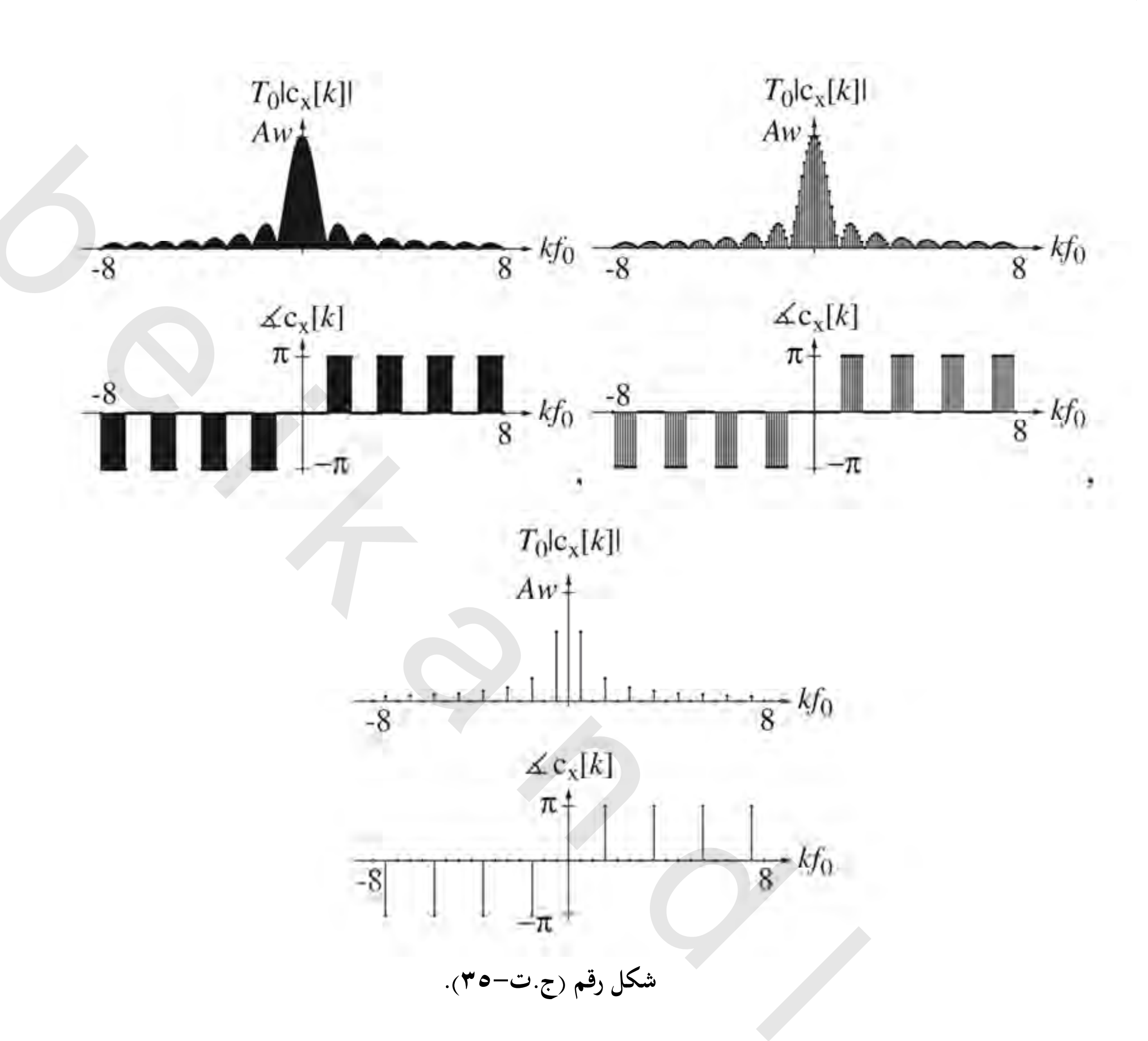
$c_x[k]=(A\omega/T_0)sinc(k\omega/T_0)$

ارسم الدالة التوافقية المعدلة لتتابع فورير :

$T_0c_x[k]=A\omega\ sinc(\omega(kf_0))$

لقيم $\omega=1$ و $f_0=0.5, 0.1, 0.02$ مع $kf_0$ في المدى $-8<kf_0<8$.

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت-٣٥).

٣٦- احسب الدالة التوافقية لتتابع فورير وتحويل فورير المستمر لهذه الدوال الدورية التالية وقارن بين الإجابات :

(أ) $x(t)=rect(t)*\delta_2(t)$

(ب) $x(t)=tri(10t)*\delta_{1/4}(t)$

**الإجابة :**

$(1/2)sinc(f)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{2})$ و $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{5}{4}\frac{\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)-1}{(\pi k)^2}\delta(f-rk)$

و $(1/2)sinc(k/2)$ و $\frac{5}{4}\frac{\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)-1}{(\pi k)^2}$

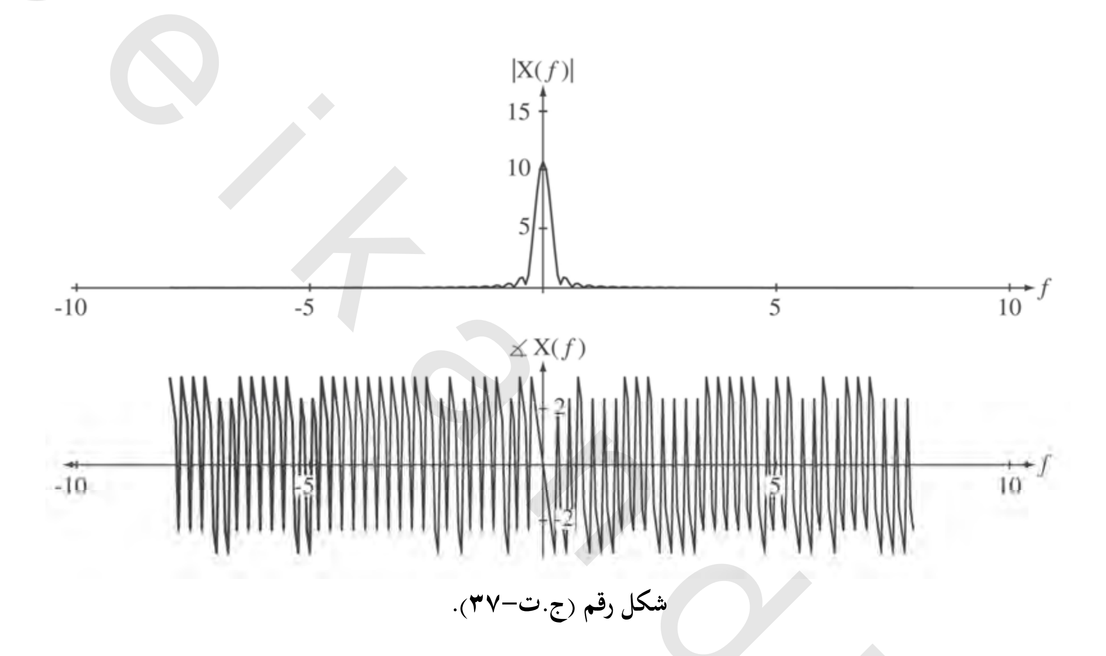
**تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT العددي**

٣٧- احسب وارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر التقريبي للدالة التالية :

$$x(t)=[4-(t-2)^2]\text{rect}((t-2)/4)$$

باستخدام تحويل فورير المتقطع DFT لتقريب تحويل فورير المستمر. افترض الزمن بين العينات x(t) يساوي 1/16 والعينات مأخوذة على المدى الزمني $0\le t<16$.

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–٣٧).

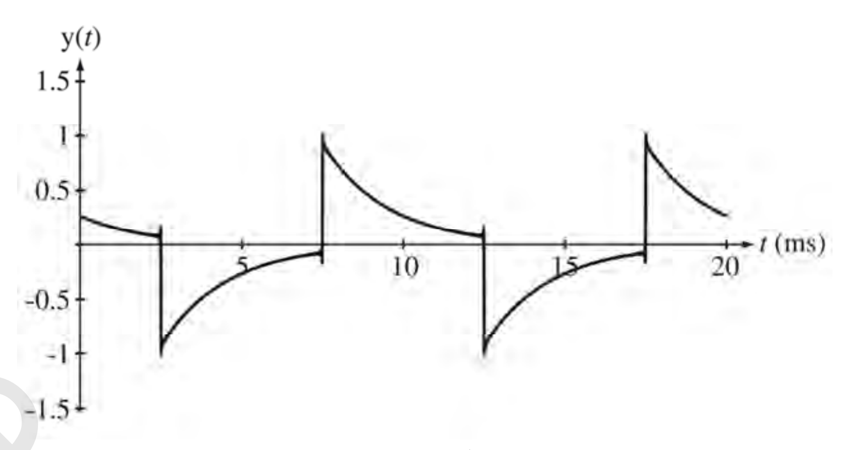
**استجابة الأنظمة**

٣٨- نظام موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t)+500y(t)=500x'(t)$$

إذا كانت الإثارة هي $x(t)=\text{rect}(200t)*\delta_{10ms}(t)$ ، فارسم الاستجابة y(t) :

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت–٣٨).

**تمارين بدون إجابات**

٣٩- إشارة دورية x(t) بدورة أساسية تساوي ٢ ثانية يمكن وصفها على مدى الدورة الأساسية بالمعادلة التالية :

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t), & |t| < 1/2 \\ 0, & \frac{1}{2} < |t| < 1 \end{cases}$$

ارسم الإشارة واحسب تتابع فورير CTFS لها. بعد ذلك ارسم على التدريج نفسه تقريبات للإشارة $x_N(t)$ الموضحة بالمعادلة التالية :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_x[k]\, e^{j2\pi kt/T_0}$$

لقيم N=1, 2, 3. (في كل حالة يجب أن يغطي التدريج الزمني للرسم دورتين أساسيتين على الأقل من الإشارة الأساسية )

٤٠- باستخدام ماتلاب ارسم الإشارات التالية على المدى الزمني $-3<t<3$.

(أ) $x_0(t)=1$

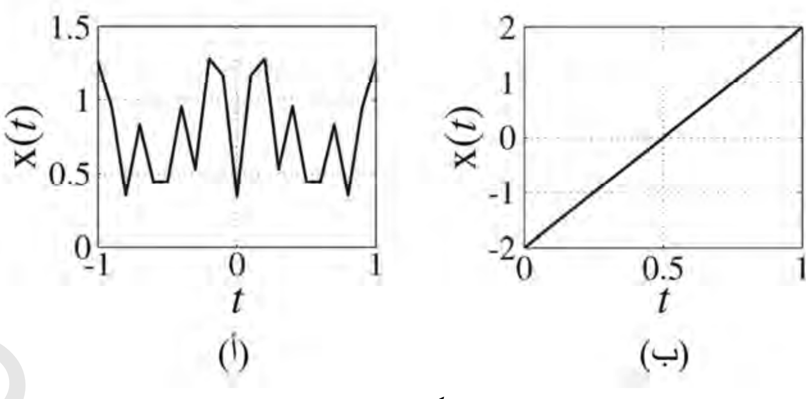
(ب) $x_1(t)=x_0(t) + 2\cos(2\pi t)$

(ج) $x_2(t)=x_1(t) + 2\cos(4\pi t)$

(د) $x_{20}(t)=x_{19}(t) + 2\cos(40\pi t)$

لكل جزء (أ) حتى (ث)، احسب عددياً مساحة الإشارة على المدى الزمني $-1/2<t<1/2$.

٤١- الإشارة الموجودة في شكل (ت- ٤١) مرسومة على مدى دورة أساسية واحدة تماماً. أي واحدة من الإشارات يكون لها الدوال التوافقية $c_x[k]$ التي يكون لها قيما حقيقية خالصة لكل قيمة لـ k ؟ وأيها يكون له قيم تخيلية خالصة لكل قيمة لـ k ؟




**شكل رقم (ت–٤١).**

٤٢- في بعض أنواع أنظمة الاتصالات، يتم إرسال البيانات الثنائية باستخدام طريقة تسمى التبديل بالإزاحة الطورية الثنائية binary phase shift keying, BPSK والذي يتم فيه تمثيل الواحد بدفعة من موجة جيبية ويمثل الصفر بدفعة تكون معكوسة أو سالبة الموجة التي تمثل الواحد. افترض التردد الجيبي يساوي 1 ميجاهرتز وافترض أن عرض الدفعة يساوي 10 دورات من الموجة الجيبية. احسب وارسم الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS لإشارة دورية ثنائية تتكون من ترددات من الوحايد والأصفار، اعتماداً على الدورة الأساسية لهذه الإشارة؟

**التعامد**

٤٣- في التكامل المحدود التالي :

$$\int_{0}^{qT_1} \cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)\, dt$$

حيث $f_1 \neq 0$ و $f_2 = mf_1$ و m رقم صحيح و $T_1 = 1/f_1$ و q أيضاً عبارة عن رقم صحيح. أوجد كل أزواج m و q على كل المدى $-\infty < m$ و $q < \infty$ والتي تكون القيم الصحيحة لها لا تساوي الصفر.

٤٤- نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0$$

وتمت إثارة النظام بالإشارة $x(t) = \mathrm{rect}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t)$.

(أ) افترض $a_2=1$ و $a_1=20$ و $a_0=250, 100$ و $b_2=1$ و $b_1=0$ و $b_0=250000$. افترض أيضاً أن $T_0 = 3\frac{2\pi}{\sqrt{b_0}}$ وأن $\omega = T_0/2$. ارسم الاستجابة y(t) على المدى الزمني $0 \le t < 2T_0$. ما هو التردد الدوري المقابل لذلك ؟ هل يمكنك رؤية تأثير أقل مقدار للاستجابة في y(t)؟

(ب) غير To إلى $\frac{2\pi}{\sqrt{b_0}}$ وأعد الجزء(أ).

**تحويل فورير الأمامي والعكسي**

٤٥- لقد تمت إثارة أحد الأنظمة بالإشارة التالية : $x(t)=4rect(t/2)$ وكانت الاستجابة لها هي :
$y(t)=10[1-e^{-(t+1)})u(t+1) – (1- e^{-(t-1)})u(t-1)]$
ما هي استجابة الصدمة لهذا النظام ؟

٤٦- ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر CTFT للدوال التالية :

(أ) $g(t)=5\delta(4t)$
(ب) $g(t)=4[\delta_4(t+1)- \delta_4(t-3)]$
(ج) $g(t)=u(2t)+u(t-1)$
(د) $g(t)=sgn(t)-sgn(-t)$
(ه) $g(t) = rect\left(\frac{t+1}{2}\right) + rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$
(و) $g(t)=rect(t/4)$
(ز) $g(t)=5tri(t/5)-2tri(t/2)$
(ح) $g(t)=(3/2)rect(t/8)*rect(t/2)$

٤٧- ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر CTFT للدوال التالية :

(أ) $rect(4t)$
(ب) $rect(4t)*4\delta(t)$
(ج) $rect(4t)*4\delta(t-2)$
(د) $rect(4t)*4\delta(2t)$
(ه) $rect(4t)*\delta_1(t)$
(و) $rect(4t)*\delta_1(t-1)$
(ز) $(1/2)rect(4t)*\delta_{1/2}(t)$
(ح) $(1/2)rect(t)*\delta_{1/2}(t)$

٤٨- دالة دورية دورتها الأساسية تساوي 4 ثوانٍ :

(أ) ما هو أقل تردد موجب يمكن أن يكون تحويل فورير المستمر لها لا يساوي الصفر.

(ب) ما هو أقل تردد موجب تالٍ يمكن أن يكون تحويل فورير المستمر له لا يساوي الصفر.

٤٩- إشارة تحويل فورير المستمر لها هو $X(f) = \frac{j2\pi f}{3+jf/10}$ :

(أ) ما هي المساحة الكلية تحت الإشارة $x(t)$ ؟

(ب) افترض أن $y(t)$ هي تكامل $x(t)$ ، وأن $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$ ، ماهي المساحة الكلية تحت $y(t)$ ؟

(ج) ما هي القيمة العددية لـ $|X(f)|$ عندما $f\to+\infty$ ؟

٥٠- أجب عن الأسئلة التالية :

(أ) إشارة $x_1(t)$ لها تحويل فورير مستمر $X_1(f)$. إذا كانت $x_2(t)=x_1(t+4)$ ، فما هي العلاقة بين $|X_1(f)|$ و $|X_2(f)|$ ؟

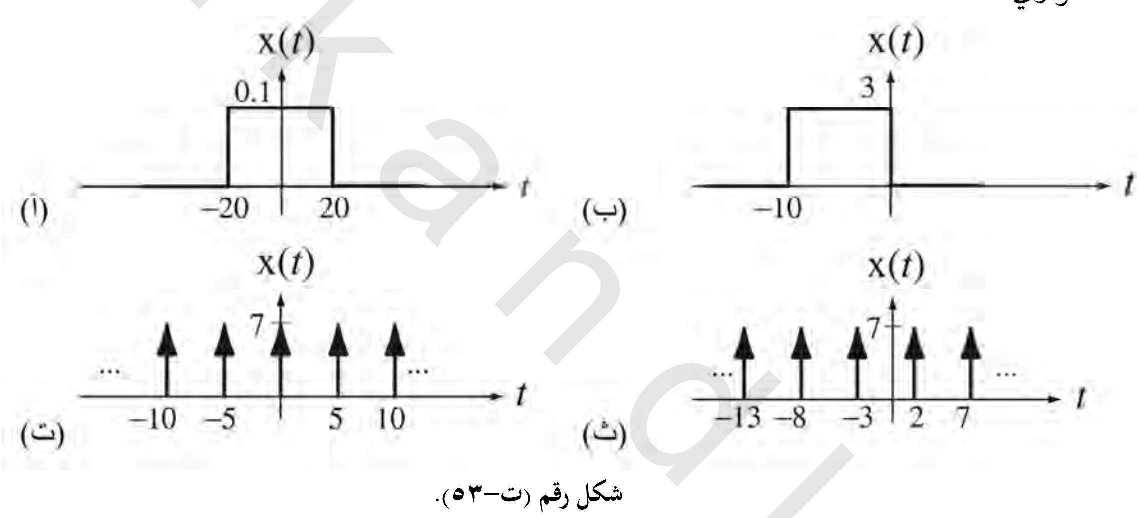
(ب) إشارة $x_1(t)$ لها تحويل فورير مستمر $X_1(f)$. إذا كانت $x_2(t)=x_1(t/5)$، فما هي العلاقة بين القيمة العظمى لـ $|X_1(f)|$ والقيمة العظمى لـ $|X_2(f)|$ ؟

(ج) تحويل فورير لإحدى الدوال يساوي $e^{-j\pi/4}$ عندالتردد $f=20$. فما هي قيمة تحويل فورير نفسه عند التردد $f=-20$ ؟

٥١- إذا كانت $y(t)\leftrightarrow Y(f)$ و $\frac{d}{dt}(y(t)) \leftrightarrow 1-e^{-j\pi f/2}$ فاحسب وارسم $y(t)$.

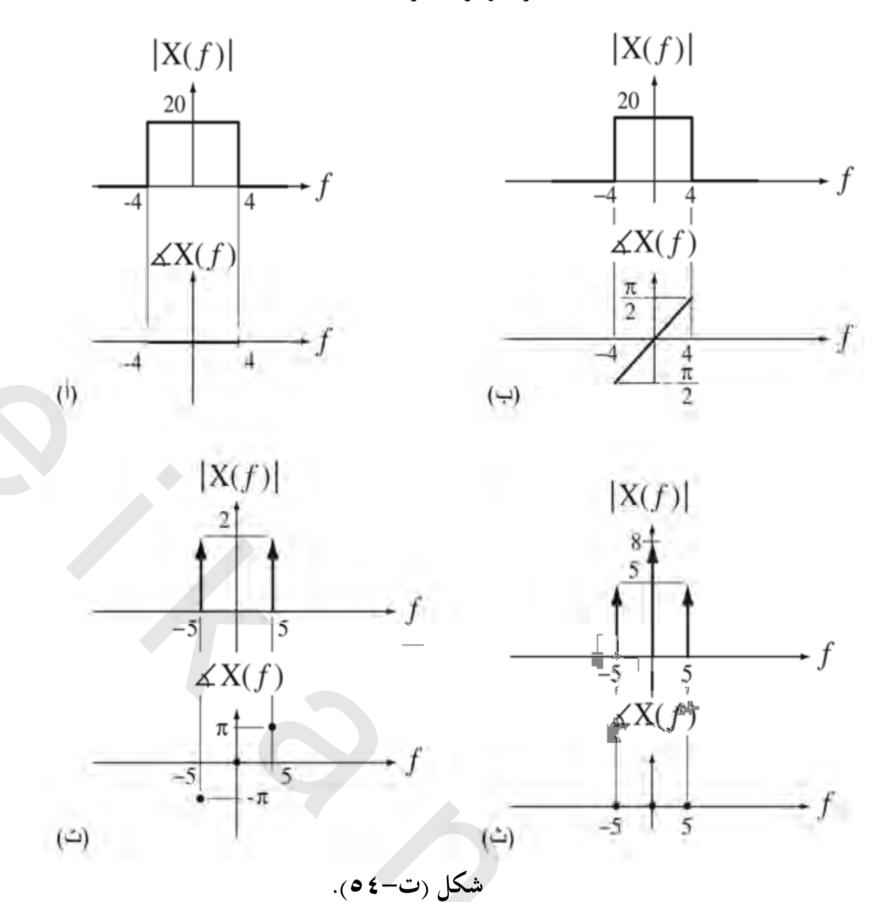
٥٢- افترض أن الإشارة $x(t)$ لها تحويل فورير يساوي $X(f)=\begin{cases}|f|, & |f|<2\\ 0, & |f|\geq 2\end{cases}$ افترض أن $y(t)=x(4(t-2))$. احسب قيم عددية لمقدار وزاوية $Y(3)$ حيث $y(t)\leftrightarrow Y(f)$.

٥٣- ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير لكل من الإشارات الموضحة في شكل (ت- ٥٣) في صورة التردد الزاوي $\omega$.




**شكل رقم (ت-٥٣).**

٥٤- ارسم تحويل فورير العكسي للدوال الموضحة في شكل (ت- ٥٤) :




شكل (ت-٥٤).

٥٥- فيما يلي ترى قائمتين، واحدة في النطاق الزمني، والأخرى في النطاق الترددي. طَابِقْ أو وَصِّلْ كل دالة في النطاق الترددي مع تحويل فورير العكسي لها في قائمة دوال النطاق الزمني. (من الممكن ألا يكون هناك تطابق)؟

(أ)

| دوال النطاق الزمني | | دوال النطاق الترددي | |
|---|---|---|---|
| 1 | $-(1/2)\delta_{1/2}(t)$ | A | $5[\delta(f-200)+\delta(f+200)]$ |
| 2 | $5sinc(2(t+2))$ | B | $(5/2)rect(f/2)e^{-j4\pi f}$ |
| 3 | $3\delta(3t-9)$ | C | $180sinc(20f)e^{-j8\pi f}$ |
| 4 | $-7sinc^2(t/12)$ | D | $-84tri(12f)$ |
| 5 | $5sinc(2(t-2))$ | E | $-96sinc(4f)e^{j2\pi f}$ |
| 6 | $5cos(200\pi t)$ | F | $-4\delta_8(-f)$ |
| 7 | $2tri((t+5)/10)$ | G | $e^{-j6\pi f}$ |
| 8 | $3\delta(3t-3)$ | H | $10sinc^2(5f)e^{j10\pi f}$ |
| 9 | $-24[u(t+1)-u(t-3)]$ | | |
| 10 | $-2\delta_{1/4}(-t)$ | | |
| 11 | $9rect((t-4)/20)$ | | |
| 12 | $2tri((t+10)/5)$ | | |
| 13 | $-24[u(t+3)-u(t-1)]$ | | |
| 14 | $10cos(400\pi t)$ | | |

(ب)

| دوال النطاق الزمني | | دوال النطاق الترددي | |
|---|---|---|---|
| 1 | $3\delta(3t-3)$ | A | $-4\delta_8(-f)$ |
| 2 | $3sinc(8t+7)$ | B | $0.375rect(\omega/16\pi)e^{j7\omega}$ |
| 3 | $-rect((t+3)/6)$ | C | $e^{j3\omega}$ |
| 4 | $12[u(t-3)-u(t+5)]$ | D | $12tri(3f)e^{-j2\pi f}$ |
| 5 | $4sinc^2((t+1)/3)$ | E | $0.375rect(f/8)e^{j7\pi f/4}$ |
| 6 | $10sin(5\pi t)$ | F | $j10\pi[\delta(\omega+10\pi)+\delta(\omega-10\pi)]$ |
| 7 | $-(1/2)\delta_{1/8}(t)$ | G | $-1.25sinc^2(f/4)e^{-j4\pi f}$ |
| 8 | $3sinc\big(8(t+7)\big)$ | H | $3e^{-j3\omega}$ |
| 9 | $3\delta(3t-9)$ | I | $96sinc(4\omega/\pi)e^{-j\omega}$ |
| 10 | $12[u(t+3)-u(t-5)]$ | J | $-6sinc(6f)e^{j6\pi f}$ |
| 11 | $18tri\big(6(t+5)\big)$ | K | $10sinc^2(3\omega/\pi)e^{j5\omega}$ |
| 12 | $-5tri\big(4(t-2)\big)$ | | |
| 13 | $-2\delta_4(-t)$ | | |
| 14 | $5sin(10\pi t)$ | | |

٥٦- طابق الإشارات في القائمة التي على اليسار مع تحويلات فورير التي في القائمة التي على اليمين (قد لا يوجد هناك تطابق)

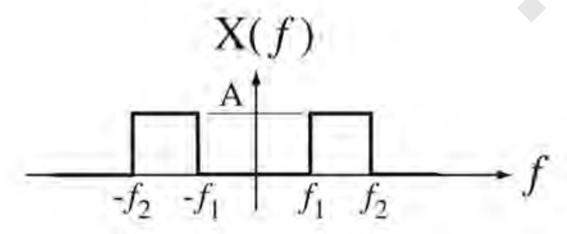
(أ)

| دوال النطاق الزمني | | دوال النطاق الترددي | |
|---|---|---|---|
| A | $5rect(2t-1)$ | 1 | $10sinc(2f)e^{-j4\pi f}$ |
| B | $5rect\big((t/2)-1\big)$ | 2 | $j5\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]e^{+j\omega}$ |
| C | $5rect\big(2(t-1)\big)$ | 3 | $2.5rect(2f)e^{-j2\pi f}$ |
| D | $5rect((t-1)/2)$ | 4 | $2.5sinc(f/2)e^{-j\pi f}$ |
| E | $5sinc(2t-1)$ | 5 | $2.5rect(f/2)e^{-j\pi f}$ |
| F | $5sinc\big((t/2)-1\big)$ | 6 | $2.5rect(f/2)e^{-j2\pi f}$ |
| G | $5sinc\big(2(t-1)\big)$ | 7 | $10rect(2f)e^{-j2\pi f}$ |
| H | $5sinc((t-1)/2)$ | 8 | $10rect(f/2)e^{-j\pi f}$ |
| I | $5sin\big(3t-(\pi/4)\big)$ | 9 | $j5\pi\big[\delta\big(\omega+(1/3)\big)-\delta\big(\omega-(1/3)\big)\big]e^{+j3\pi\omega/4}$ |
| J | $5sin\big(3(t+1)\big)$ | 10 | $10rect(2f)e^{-j4\pi f}$ |
| K | $5sin\big((t/3)-(\pi/4)\big)$ | 11 | $2.5sinc(f/2)e^{-j2\pi f}$ |
| L | $5sin((t+1)/3)$ | 12 | $j2.5\pi[\delta(\omega+3/(2\pi))-\delta(\omega-3/(2\pi))]e^{-j\pi\omega/12}$ |
| | | 13 | $2.5sinc(2f)e^{-j2\pi f}$ |
| | | 14 | $j2.5\pi[\delta(\omega+1/(6\pi))-\delta(\omega-1/(6\pi))]e^{+j\omega}$ |
| | | 15 | $10sinc(f/2)e^{-j4\pi f}$ |
| | | 16 | $2.5sinc(2f)e^{-j\pi f}$ |
| | | 17 | $j5\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]e^{-j\omega}$ |
| | | 18 | $10sinc(f/2)e^{-j2\pi f}$ |
| | | 19 | $j5\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]e^{-j\pi\omega/12}$ |
| | | 20 | $10rect(f/2)e^{-j2\pi f}$ |
| | | 21 | $j5\pi\big[\delta\big(\omega+(1/3)\big)-\delta\big(\omega-(1/3)\big)\big]e^{-j3\pi\omega/4}$ |
| | | 22 | $10sinc(2f)e^{-j2\pi f}$ |
| | | 23 | $2.5rect(2f)e^{-j4\pi f}$ |
| | | 24 | $j5\pi\big[\delta\big(\omega+(1/3)\big)-\delta\big(\omega-(1/3)\big)\big]e^{+j\omega}$ |

(ب)

| دوال النطاق الزمني | | دوال النطاق الترددي | |
|---|---|---|---|
| A | $(5/2)\mathrm{rect}(t/2) * \delta_1(t)$ | 1 | $8\delta_3(f)e^{-j2\pi f/3}$ |
| B | $8\delta\big(3(t+1)\big) - 8\delta\big(3(t-1)\big)$ | 2 | $-j48\sin(6\pi f)$ |
| C | $(8/3)\delta_{1/3}(t-1/3)$ | 3 | $48\cos(2\pi f)$ |
| D | $(8/3)\delta_{1/3}(t-1)$ | 4 | $72\delta_3(f)e^{-j2\pi f/3}$ |
| E | $8\delta(3t-1) + 8\delta(3t+1)$ | 5 | $(5/2)\mathrm{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)$ |
| F | $8\delta((t+1)/3) + 8\delta((t-1)/3)$ | 6 | $(16/3)\cos(2\pi f/3)$ |
| G | $5\mathrm{rect}(t) * \delta_2(t-1)$ | 7 | $8\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k/3}\,\delta(f-k/3)$ |
| H | $24\delta_3(t-3)$ | 8 | $-j(16/3)\sin(2\pi f)$ |
| I | $(5/2)\mathrm{rect}((t-1)/2) * \delta_1(t)$ | 9 | $(8/9)\delta_{1/3}(f)e^{j6\pi f}$ |
| J | $8\delta\big((t/3)-1\big) - 8\delta\big((t/3)+1\big)$ | 10 | $(5/8)\mathrm{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)e^{-j2\pi f}$ |
| K | $24\delta_3(t-1)$ | 11 | $8\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k/3}\,\delta(f-3k)$ |
| L | $5\mathrm{rect}(t) * \delta_2(t)$ | 12 | $5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2k)e^{-j2\pi k}\,\delta(f-k)$ |
| | | 13 | $5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(k)\,\delta(f-k)$ |
| | | 14 | $(8/9)\delta_{1/3}(f)e^{-j6\pi f}$ |
| | | 15 | $j(16/3)\sin(2\pi f)$ |
| | | 16 | $(16/3)\cos(2\pi f)$ |
| | | 17 | $(4/5)\mathrm{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)$ |
| | | 18 | $8\delta_{1/3}(f)e^{-j6\pi f}$ |
| | | 19 | $(16/3)\cos(6\pi f)$ |
| | | 20 | $5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2k)\,\delta(f-k)$ |
| | | 21 | $5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2k)e^{-j4\pi k}\,\delta(f-k)$ |
| | | 22 | $(5/2)\mathrm{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)e^{-j2\pi f}$ |
| | | 23 | $48\cos(6\pi f)$ |
| | | 24 | $8\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j6\pi k}\,\delta(f-3k)$ |

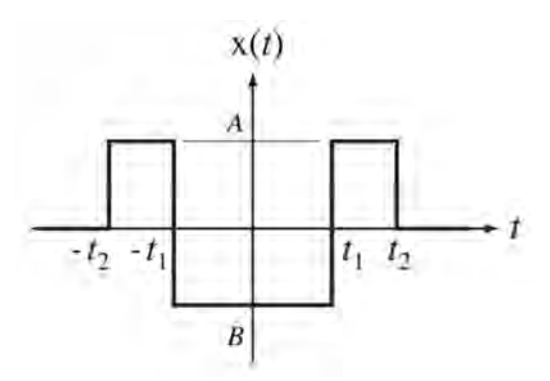
٥٧- احسب تحويل فورير العكسي للدالة الحقيقية في النطاق الترددي الموضحة في شكل (ت- ٥٧) وارسم هذه الدالة. افترض $A=1$ و $f_1=95\text{kHz}$ و $f_2=105\text{kHz}$.




**شكل رقم (ت–٥٧) دالة حقيقية في النطاق الترددي.**

٥٨- احسب تحويل فورير المستمر (أي واحدة من الصورتين f أو ω) للإشارة الموجودة في شكل (ت- ٥٨) وارسم مقدار هذا التحويل وزاويته مع التردد على رسم منفصل. افترض $A=-B=1$ وأن $t_1=1$ و $t_2=2$.

ملحوظة : عبر عن هذه الإشارة كمجموع دالتين واستخدم خاصية الخطية.




**شكل رقم (ت–٥٨) الدالة.**

٥٩- يوجد في العديد من أنظمة الاتصالات جهاز يسمى الخالط mixer يتم استخدامه. في أبسط صوره يكون الخالط ضارباً تماثلياً. بمعنى، أن إشارة الخرج y(t) هي حاصل ضرب إشارتي الدخل. إذا كانت إشارتاً الدخل هما :

$x_2(t)=5\cos(2000\pi t)$ و $x_1(t)=10\text{sinc}(20t)$

ارسم مقدار تحويل فورير المستمر للخرج y(t)، وهو Y(f)، وقارنه مع مقدار تحويل فورير للدالة $x_1(t)$. في عبارات مختصرة ماذا يفعل الخالط ؟

٦٠- إحدى المشاكل الأساسية في أنظمة الأجهزة الحقيقية هي التداخل الكهرومغناطيسي بسبب خطوط القدرة التي ترددها 60 هرتز. يمكن لنظام له استجابة صدمة على الصورة $h(t)=A(u(t)-u(t-t_0))$ أن يتخلص من هذا التداخل ذي التردد 60 هرتز وكل توافقاته. احسب القيمة العددية لـ $t_0$ التي تحقق ذلك.

٦١- ارسم التفاف كل دالتين في كل حالة مما يأتي :

(أ) $\text{rect}(t)*\text{rect}(t)$
(ب) $\text{rect}(t-1/2)*\text{rect}(t+1/2)$
(ج) $\text{tri}(t)*\text{tri}(t-1)$
(د) $3\delta(t)*10\cos(t)$
(ه) $10\delta_1(t)*\text{rect}(t)$
(و) $5\delta_1(t)*\text{tri}(t)$

٦٢- إلكترونياً، واحدة من أول الدوائر التي تمت دراستها كانت دائرة الموحد rectifier. هناك صورتان للموحد وهما موحد نصف الموجة وموحد الموجة الكاملة. موحد نصف الموجة يقطع نصف الموجة الجيبية ويبقى على النصف الآخر. موحد الموجة الكاملة يعكس إشارة أحد نصفي موجة الدخل ويترك النصف الآخر. لنفترض أن جهد الدخل الجيبي هو الجهد المنزلي الذي له 120Vrms و 60 هرتز، وسنفترض أن كُلاً من الموحدين سيغير النصف السالب من الموجة الجيبية بينما سيترك النصف الموجب بدون تغيير. احسب وارسم مقدار تحويل فورير المستمر لإشارة جهد الخرج لكل من الموحدين (في أي من الصورتين f أو ω).

# طرق فورير في الزمن المتقطع

## (٧.١) المقدمة والأهداف

قدمنا في الفصل٦ تتابع فورير المستمر زمنياً كطريقة للتعبير عن الإشارات المستمرة زمنياً وحساب الاستجابة لنظام مستمر زمنياً LTI لأي إثارة دورية. بعد ذلك مددنا تتابع فورير، أو وسعناه ليصبح تحويل فورير المستمر عن طريق فرض أن دورة الإشارة الدورية تقترب من الما لانهاية. سنتخذ مساراً مشابها لذلك في هذا الفصل ولكن مع الأنظمة في الزمن المتقطع. معظم المفاهيم الأساسية ستكون كما هي ولكن سيكون هناك بعض الفروق المهمة.

**أهداف الفصل**

١- تطوير طرق للتعبير عن الإشارات في الزمن المتقطع كمجموع خطي من الدوال الجيبية، الحقيقية أو المركبة.

٢- استكشاف الخواص العامة لهذه الطرق المعبرة عن الإشارات في الزمن المتقطع.

٣- تعميم تتابع فورير في الزمن المتقطع ليشتمل على الإشارات غير الدورية عن طريق تقديم أو تعريف تحويل فورير في الزمن المتقطع.

٤- تقديم أنواع الإشارات التي يمكن أو لا يمكن وصفها عن طريق تحويل فورير في الزمن المتقطع.

٥- استنتاج وإثبات خواص تحويل فورير في الزمن المتقطع.

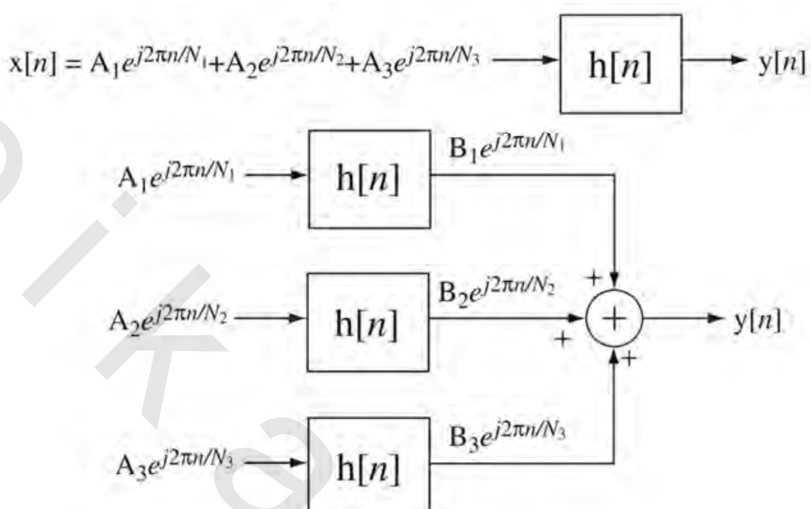
٦- توضيح العلاقات البينية بين طرق فورير المختلفة.

## (٧.٢) تتابع فورير في الزمن المتقطع وتحويل فورير المتقطع

**الخطية والإثارة الأسية المركبة**

كما كان الأمر حقيقياً في الأنظمة المستمرة، فإنه إذا تمت إثارة أي نظام LTI في الزمن المتقطع عن طريق موجة جيبية، فإن استجابة النظام تكون جيبية أيضاً، بنفس التردد ولكن عموماً بمقدار وزاوية طور مختلفين. إذا تمت

إثارة نظام LTI عن طريق مجموعة من الإشارات، فإن الاستجابة الكلية للنظام تكون مجموع الاستجابات لكل إشارة على حدة. تتابع فورير المتقطع زمنياً discrete time Fourier series, DTFS يعبر عن أي إشارة دورية كمجموع خطي من الدوال الجيبية الحقيقية أو المركبة، ولذلك فإنه يمكن تطبيق نظرية التجميع لإيجاد استجابة أي نظام LTI لأي إشارة اختيارية عن طريق تجميع الاستجابات لهذه الدوال الجيبية كما في شكل (٧.١).



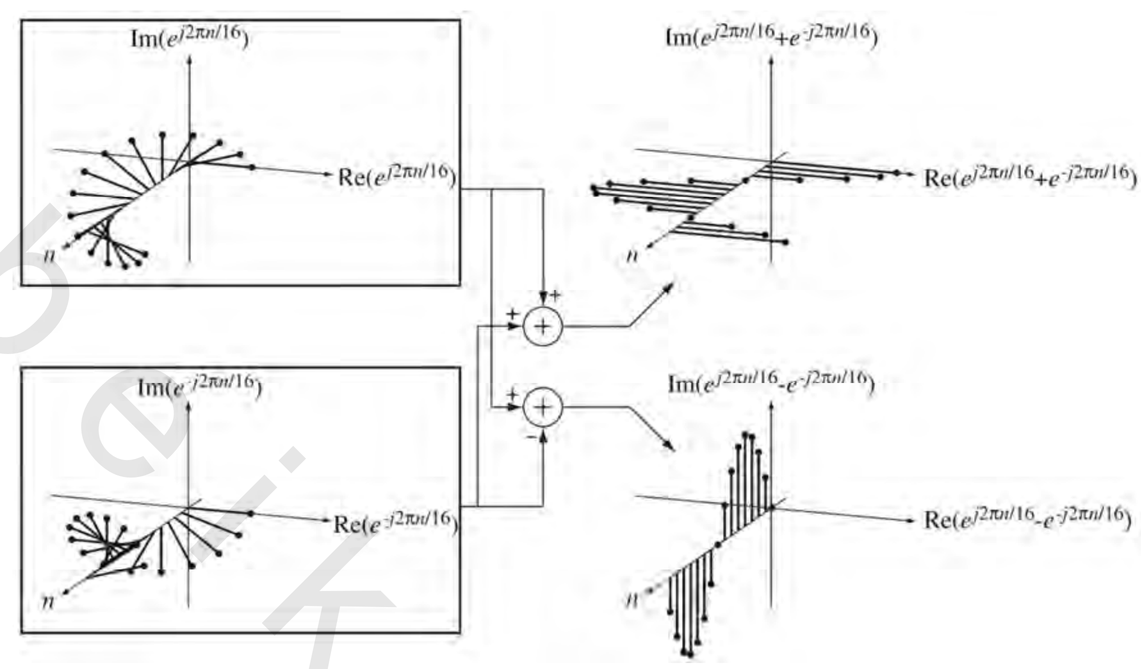

**شكل رقم (٧.١). تكافؤ استجابة نظام LTI لإشارة معينة مع مجموع استجابات النظام نفسه لعدد من الدوال الجيبية التي يمثل مجموعها الإشارة الداخلة للنظام**

يمكن للدوال الجيبية أن تكون حقيقية القيمة أو مركبة. العلاقة بين القيم الحقيقية والمركبة للدوال الجيبية هي كما يلي:

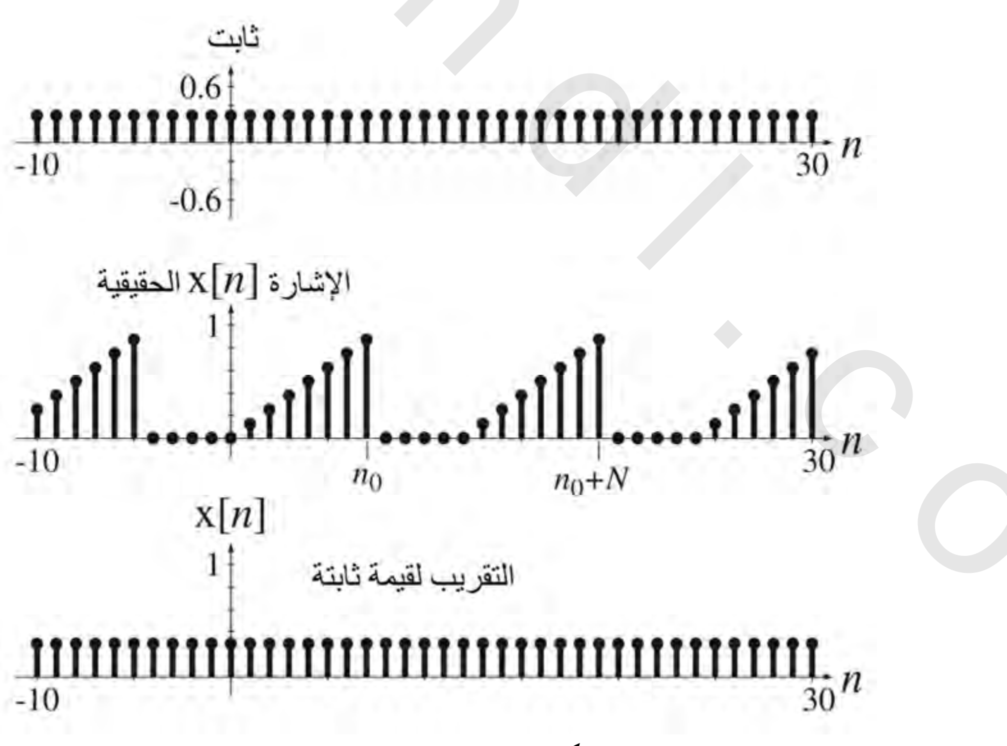
$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2} \quad \text{و} \quad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

وهذه العلاقة موضحة في شكل (٧.٢).

افترض أي إشارة اختيارية دورية x[n] التي من المطلوب التعبير عنها كمجموع خطي من الدوال الجيبية كما هو موضح في الرسم الأوسط في شكل (٧.٣). (لقد استخدمنا هنا دوال جيبية ذات قيمة حقيقية لتبسيط الرؤية).



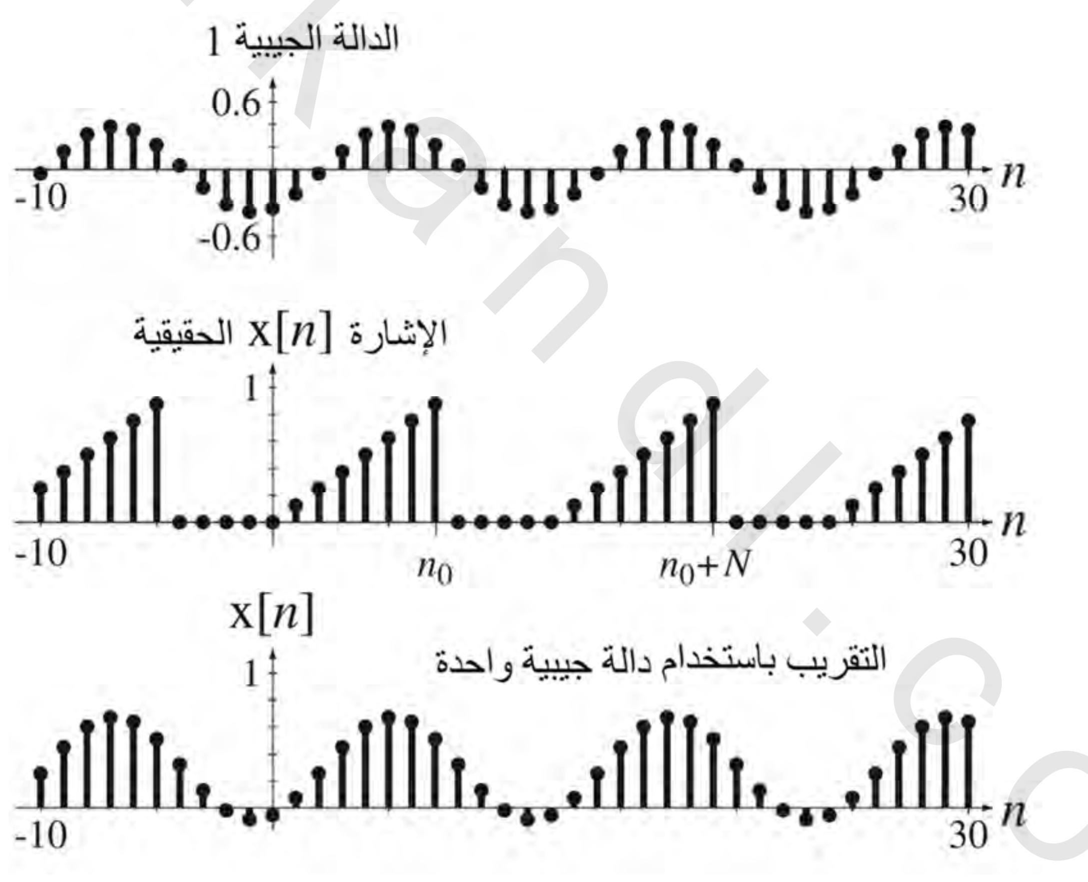

**شكل رقم (٧.٢) جمع وطرح الأس ej2πn/16 والأس e-j2πn/16 لتكوين الدالة 2cos(2πn/16) والدالة 2jsin(2πn/16).**



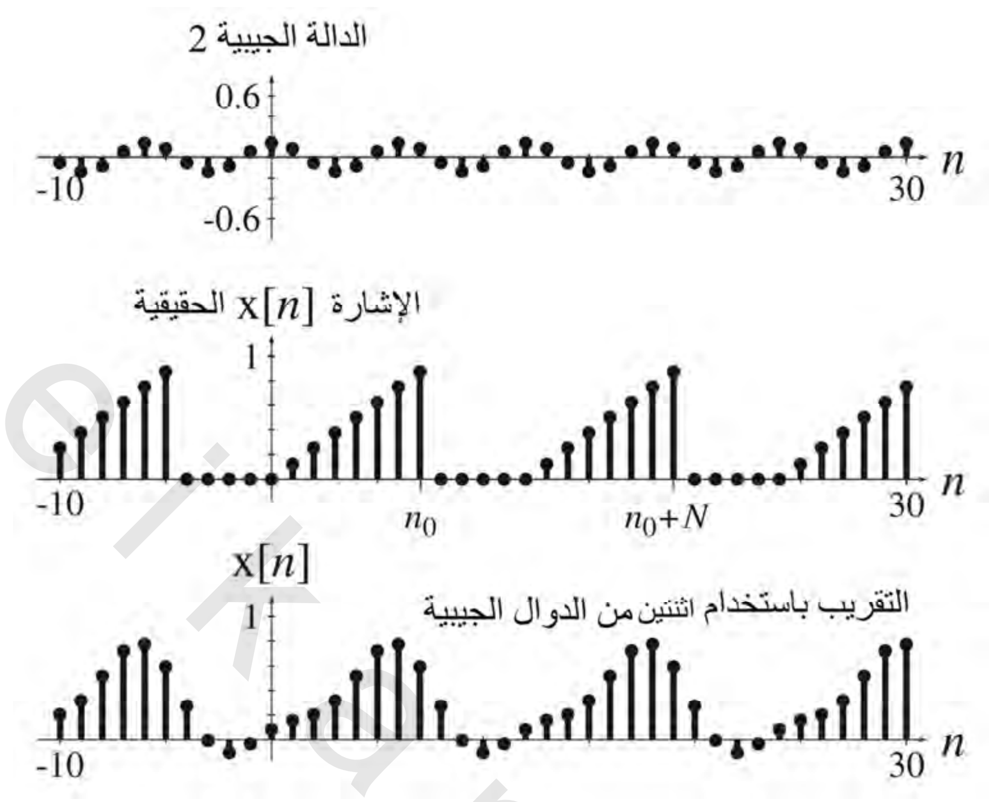

**شكل (٧.٣) إشارة مقربة إلى ثابت .**

في شكل رقم (٧.٣) تم تقريب الإشارة بالثابت 0.2197 ، الذي يمثل القيمة المتوسطة للإشارة. تعتبر القيمة الثابتة حالة خاصة من الدالة الجيبية كالتالي : 0.2197cos(2πkn/N) وذلك بوضع k=0. وهذا هو أفضل تقريب ممكن للإشارة x[n] بقيمة ثابتة لأن متوسط مربع الخطأ بين x[n] والقيمة الثابتة يكون أقل ما يمكن. يمكننا أن نجعل هذا التقريب غير الدقيق أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية للقيمة الثابتة تكون دورتها الأساسية N هي الدورة الأساسية للإشارة x[n] كما في شكل (٧.٤).

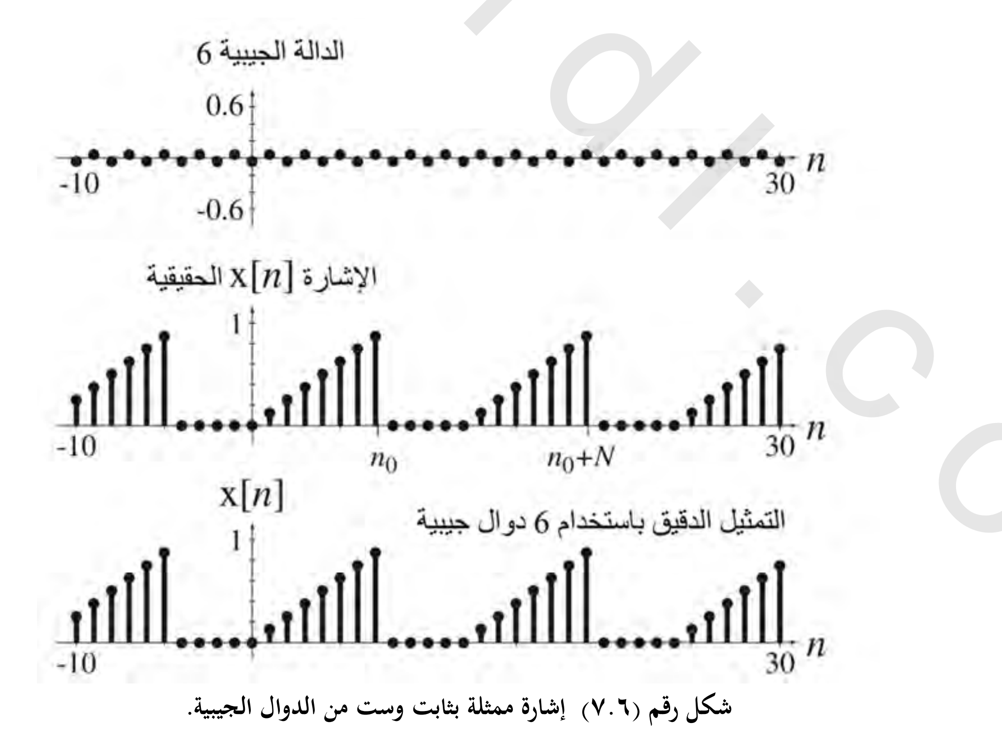
إن ذلك يعتبر أفضل تقريب يمكن عمله باستخدام قيمة ثابتة ودالة جيبية واحدة دورتها الأساسية مثل دورة الإشارة x[n]. يمكن تحسين هذا التقريب أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية أخرى بتردد ضعف التردد الأساسي للإشارة x[n] كما في شكل (٧.٥).




**شكل (٧.٤) إشارة مقربة بثابت ودالة جيبية واحدة.**




**شكل رقم (٧.٥) إشارة مقربة بثابت واثنتين من الدوال الجيبية.**




**شكل رقم (٧.٦) إشارة ممثلة بثابت وست من الدوال الجيبية.**

إذا تم الاستمرار في إضافة دوال جيبية مختارة جيداً بترددات تساوي مضاعفات صحيحة للتردد الأساسي للإشارة x[n]، فإنه يمكننا جعل التقريب أفضل وأفضل. على العكس من الحالة العامة في الزمن المستمر، فإنه باستخدام عدد محدد من الدوال الجيبية يصبح التقريب مساوياً تماماً للإشارة كما في شكل (٧.٦).

إن ذلك يبين فرق أساسي بين التمثيل بتتابع فورير المستمر وتتابع فورير المتقطع. في الزمن المتقطع يمكن عادة الوصول إلى تمثيل تام للدالة الدورية بعدد محدد من الدوال الجيبية.

تماماً مثلما كان الحال في تتابع فورير المستمر CTFS، فإن k تسمى الرقم التوافقي وكل الدوال الجيبية يكون لها ترددات تساوي k من المرات من التردد الأساسي الدوري للإشارة، والذي يكون في حالة تتابع فورير المتقطع DTFS يساوي 1/N. تتابع فورير المتقطع DTFS يعبر عن أي إشارة دورية متقطعة زمنياً دورتها الأساسية $N_0$ كمجموع خطي من الجيوب المركبة على الصورة التالية:

$$x[n] = \sum_{k<n>} c_x[k]e^{j2\pi kn/N}$$

حيث $N=mN_0$، و m أرقام صحيحة، و $c_x[k]$ هي الدالة التوافقية لتتابع فورير المتقطع. الرمز $\sum_{k=<N>}$ يكافئ الرمز $\sum_{k=n_0}^{n_0+N-1}$ حيث $n_0$ ثابت اختياري، بمعنى آخر، مجموع على أي عدد N ذي قيم متتابعة من k. على الرغم من أن القيم الشائعة المستخدمة لـ N تكون هي الدورة الأساسية $N_0$ (بمعنى m=1)، فإن N ليس بالضرورة أن تكون $N_0$ بل N من الممكن أن تكون أي دورة للإشارة.

في الإشارات المتقطعة زمنياً وتحليل الأنظمة يوجد هناك صورة مشابهة للتعبير عن الإشارات الدورية المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل فورير المتقطع discrete Fourier transform, DFT الذي سبق ذكره في الفصل ٦. إنها تعبر أيضاً عن الإشارات الدورية المتقطعة كمجموع خطي من الدوال الجيبية الأسية. تحويل فورير المتقطع العكسي تتم كتابته في العادة كما يلي:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}$$

حيث X[k] هي الدالة التوافقية لتحليل فورير المتقطع للدالة x[n] و $X[k]=Nc_x[k]$. إن الاسم هنا يبدأ بكلمة تحويل بدلا من كلمة تتابع ولكن حيث إنه مجموع خطي من الدوال الجيبية عند ترددات متقطعة، فإنه للتوافق التعبيري قد يكون من الممكن تسميته تتابعاً. إن كلمة تحويل قد تكون نبعت من استخدامها في المعالجة الرقمية للإشارات التي يستخدم فيها لإيجاد التقريب العددي لتحويل فورير المستمر CTFT. يستخدم DFT بكثرة ويشبه كثيراً DTFS بحيث سنركز في هذا الكتاب على DFT مع العلم أن التحويل إلى DTFS يكون بسيطاً جداً.

المعادلة $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}$ هي تحويل فورير العكسي. إنها تعطي الدالة في النطاق الزمني ممثلة كمجموع خطي من الدوال الجيبية المركبة. تحويل فورير المتقطع الأمامي هو :

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

حيث N هي أي دورة للإشارة x[n]. إنها تعطي الدالة التوافقية من الدالة الممثلة في النطاق الزمني.

كما رأينا في الفصل ٦ أن من الخصائص المهمة لتحويل فورير المتقطع : أن X[k] تكون دورية أيضاً ، بمعنى :

X[k]=X[k+N] حيث k أي رقم صحيح

ولذلك يجب أن يكون واضحا الآن لماذا يكون المجموع في تحويل فورير المتقطع على مدى محدد من قيم ال k. الدالة التوافقية X[k] تكون دورية بدورة مقدارها N ، ولذلك فإنها يكون لها عدد N فقط من القيم الفريدة. هذا المجموع يحتاج فقط لـ N من الحدود لتحديد كل القيم الفريدة في X[k]. معادلة تحويل فورير العكسي المتقطع تكتب في العادة على الصورة :

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}$$

ولكن حيث إن X[k] دورية بدورة مقدارها N ، فإنه يمكن كتابتها بصورة أكثر عمومية كما يلي :

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]e^{j2\pi kn/N}$$

**التعامدية والدالة التوافقية**

يمكننا إيجاد تحويل فورير المتقطع الأمامي DFT ، وهو X[k] ، للدالة x[n] باستخدام عملية مشابهة للعملية المستخدمة مع تتابع فورير المستمر CTFS. لتبسيط الرموز في المعادلات المستخدمة مستقبلاً سنضع :

$$W_N=e^{j2\pi/N} \qquad \text{(٧.١) المعادلة رقم}$$

حيث أن نقطة البداية في المجموع $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]e^{j2\pi kn/N}$ تكون اختيارية ، فإننا سنفترضها k=0. بعد ذلك سنكتب $e^{j2\pi kn/N}$ لكل قيم n بحيث $n_0\le n<n_0+N$ ، وباستخدام المعادلة (٧.١) يمكننا كتابة المعادلة المصفوفية كما يلي :

$$\begin{bmatrix} x[n_0] \\ x[n_0+1] \\ .. \\ .. \\ x[n_0+N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^{n_0} & \dots & W_N^{n_0(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{n_0+1} & \dots & W_N^{(n_0+1)(N-1)} \\ & \dots\dots\dots & & \\ & \dots\dots\dots & & \\ W_N^0 & W_N^{n_0+N-1} & \dots & W_N^{(n_0+N-1)(N-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ .. \\ .. \\ X[N-1] \end{bmatrix} \qquad \text{(٧.٢) المعادلة رقم}$$

x = W X

أو في الصورة المدمجة التالية : Nx=WX. حيث W مصفوفة غير أحادية ، ولذلك يمكننا مباشرة كتابة X كما يلي : $X=W^{-1}Nx$. المعادلة (٢.٧) يمكن كتابتها أيضاً على الصورة :

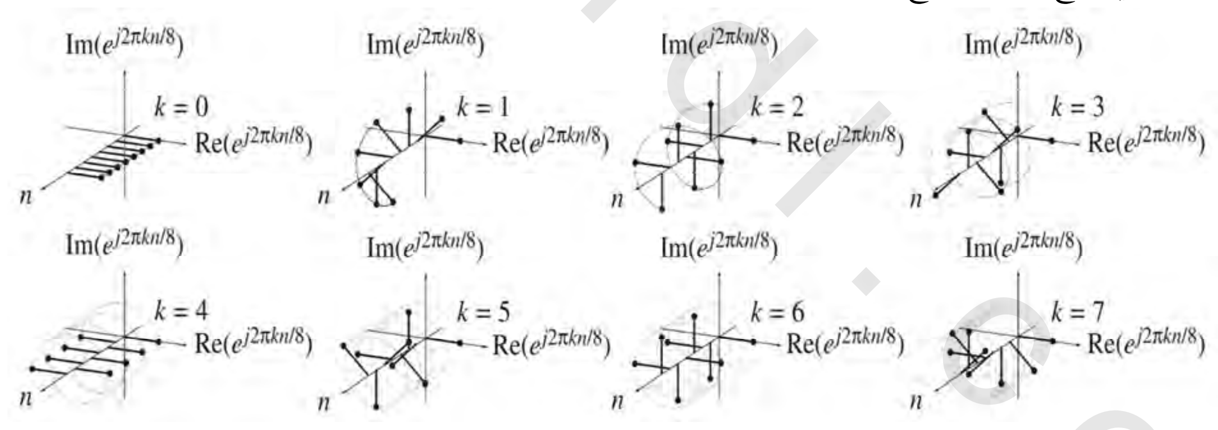
$$N\begin{bmatrix} x[n_0] \\ x[n_0+1] \\ .. \\ .. \\ x[n_0+N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{bmatrix} X[0] + \begin{bmatrix} W_N^{n_0} \\ W_N^{n_0+1} \\ .. \\ .. \\ W_N^{n_0+N-1} \end{bmatrix} X[1] + \cdots + \begin{bmatrix} W_N^{n_0(N-1)} \\ W_N^{(n_0+1)(N-1)} \\ .. \\ .. \\ W_N^{(n_0+N-1)(N-1)} \end{bmatrix} X[N-1]$$

k=0 k=1 k=N-1 المعادلة رقم (٧.٣)

$$Nx = w_0X[0] + w_1X[1] + \ldots + w_{N-1}X[N-1]$$ المعادلة رقم (٧.٤)

حيث $W=[w_0\ w_1\ \ldots\ w_{N-1}]$. عناصر متجه العمود الأول $w_0$ كلها ثابتة وتساوي واحداً ويمكن التفكير فيها على أنها دوال جيبية مركبة ترددها صفر. متجه العمود الثاني $w_1$ يتكون من قيم دالة من دورة واحدة من الدالة الجيبية المركبة على الفترة الزمنية $n_0 \le n < n_0+N$. متجه كل عمود من الأعمدة التالية يتكون من قيم الدالة من k من الدورات من الدالة الجيبية المركبة عند الرقم التوافقي الأعلى في الفترة الزمنية $n_0 \le n < n_0+N$. شكل (٧.٧) يوضح هذه الدوال الجيبية في حالة N=8 و $n_0=0$.

لاحظ أن تتابع قيم الدوال الجيبية المركبة مع n عندما k=7 يشبه تماماً التتابع عندما k=1، فيما عدا الدوران في الاتجاه المعاكس. في الحقيقة فإن التتابع عندما k=7 هو نفسه التتابع عندما k=-1. إن ذلك لا بد أن يحدث نتيجة الدورية في تتابع فورير المتقطع DFT.




**شكل رقم (٧.٧) توضيح لمجموعة كاملة من متجهات القواعد المتعامدة عندما N=8 و n0=0.**

هذه المجموعة تكّون عائلة من المتجهات المتعامدة. بالرجوع إلى أساسيات الجبر الخطي وتحليل المتجهات نجد أن المسقط p لمتجه حقيقي x في اتجاه متجه آخر حقيقي y هو :

$$p = \frac{x^T y}{y^T y} y$$ المعادلة رقم (٧.٥)

وعندما يكون هذا الإسقاط يساوي صفراً، فإن كلاً من x و y يقال عنهما إنهما متعامدان. يحدث ذلك عندما يكون حاصل الضرب القياسي للمتجهين x و y، وهو $x^T y$ يساوي صفراً. إذا كان المتجهين لهما قيم مركبة، فإن النظرية تبقى كما هي، فيما عدا أن الضرب القياسي يكون $x^H y$ ويكون الإسقاط كما يلي:

$$p = \frac{x^H y}{y^H y} y$$ المعادلة رقم (٧.٦)

حيث الرمز $x^H$ يعني المرافق المركب لدوران، أو بديل المتجه x. (هذه العملية شائعة في المصفوفات ذات القيم المركبة، وهي أن دوران أو تبديل المصفوفة ذات القيم المركبة يعرف عادة على أنه يشتمل على عملية المرافق المركب. وهذا حقيقي في تبديل المصفوفات في ماتلاب). أي مجموعة من المتجهات المتعامدة المختارة جيداً، يمكن أن تشكل أساسات. متجهات الأساس المتعامدة هي مجموعة من المتجهات التي يمكن تجميعها في مجموعة خطية لتكوين متجه اختياري من الأبعاد نفسها.

الضرب القياسي لأول متجهين أساسيين في المعادلة (٧.٤) هو:

$$w_0^H w_1 = [1\ \ 1 \ldots\ \ 1]\begin{bmatrix} W_N^{n_0} \\ W_N^{n_0+1} \\ \vdots \\ W_N^{n_0+N-1} \end{bmatrix} = W_N^{n_0}(1 + W_N + \cdots + W_N^{N-1})$$ المعادلة رقم (٧.٧)

مجموع المتوالية الهندسية المحددة الطول هو:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} N, & r = 1 \\ \dfrac{1-r^N}{1-r}, & r \neq 1 \end{cases}$$

بجمع المتوالية الهندسية في (٧.٧) نحصل على:

$$w_0^H w_1 = W^{n_0}\frac{1-W_N^N}{1-W_N} = W_N^{n_0}\frac{1-e^{j2\pi}}{1-e^{j2\pi/N}} = 0$$

مما يثبت أنهما حقاً متعامدان (إذا كانت N≠1). عموماً، فإن الضرب القياسي لمتجه التوافقية $k_1$ ومتجه التوافقة $k_2$ يكون على الصورة:

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = \left[W_N^{-n_0 k_1}\ \ W_N^{-(n_0+1)k_1}\ \ldots\ W_N^{-(n_0+N-1)k_1}\right]\begin{bmatrix} W_N^{n_0 k_2} \\ W_N^{(n_0+1)k_2} \\ \vdots \\ W_N^{(n_0+N-1)k_2} \end{bmatrix}$$

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = W_N^{n_0(k_2-k_1)}\left[1 + W_N^{(k_2-k_1)} + \ldots + W_N^{(N-1)(k_2-k_1)}\right]$$

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = W_N^{n_0(k_2-k_1)}\frac{1-\left[W_N^{(k_2-k_1)}\right]^N}{1-W_N^{(k_2-k_1)}} = W_N^{n_0(k_2-k_1)}\frac{1-e^{j2\pi(k_2-k_1)}}{1-e^{j2\pi(k_2-k_1)/N}}$$

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = \begin{Bmatrix} 0, & k_1 \neq k_2 \\ N, & k_1 = k_2 \end{Bmatrix} = N\delta[k_1 - k_2]$$

هذه النتيجة تساوي صفراً عندما $k_1 \neq k_2$ لأن البسط يساوي صفراً بينما المقام لا يساوي الصفر. البسط يساوي صفراً لأن كل من $k_1$ و $k_2$ أرقاماً صحيحة وبالتالي تكون الكمية $e^{j2\pi(k_2-k_1)}$ تساوي واحد. المقام لا يساوي صفراً لأن كل من $k_1$ و $k_2$ يكونان في المدى $0 \leq k_1$ و $k_2 < N$ والنسبة $(k_2-k_1)/N$ لا يمكن أن تكون صحيحة (إذا كانت $k_1 \neq k_2$ و $N \neq 1$). وعلى ذلك فإن كل المتجهات في المعادلة (٧.٤) يكون كل منها متعامداً مع الآخر.

حقيقة أن الأعمدة W تكون متعامدة تؤدي إلى تفسير مهم عن كيفية حساب X. إذا قمنا بضرب كل حدود المعادلة (٧.٤) في الكمية $w_0^H$ من الجانب الأيسر نحصل على :

$$w_0^H N x = \underbrace{w_0^H w_0}_{=N} X[0] + \underbrace{w_0^H w_1}_{=0} X[1] + \cdots + \underbrace{w_0^H w_{N-1}}_{=0} X[N-1] = N X[0]$$

وعلى ذلك يمكننا حساب $X[0]$ كما يلي :

$$X[0] = \frac{w_0^H N}{w_0^H w_0} = w_0^H X$$

المتجه $X[0]w_0$ هو إسقاط المتجه Nx في اتجاه متجه الأساس $w_0$. بالطريقة نفسها، يكون كل $X[k]w_k$ هو إسقاط المتجه Nx في اتجاه متجه الأساس $w_k$. قيمة الدالة التوافقية $X[k]$ يمكن إيجادها عند كل رقم توافقي كما يلي :

$$X[k] = w_k^H X$$

ويمكننا تلخيص كل عملية إيجاد الدالة التوافقية كما يلي :

$$X = \begin{bmatrix} w_0^H \\ w_1^H \\ .. \\ .. \\ w_{N-1}^H \end{bmatrix} X = w^H X \qquad \text{(٧.٨) المعادلة رقم}$$

نتيجة التعامد بين المتجهات $w_{k_1}$ و $w_{k_2}$ (عندما $k_1 \neq k_2$) فإن حاصل ضرب W ودوران مرافقها المركب $W^H$ سيكون :

$$WW^H = [w_0\ w_1\ \dots\ w_{N-1}] \begin{bmatrix} w_0^H \\ w_1^H \\ .. \\ .. \\ w_{N-1}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix} = NI$$

بقسمة طرفي المعادلة على N

$$\frac{WW^H}{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

وعلى ذلك، فإن معكوس W سيكون :

$$W^{-1} = \frac{W^H}{N}$$

ومن المعادلة $X=W^{-1}Nx$ يمكننا حساب قيمة X كما يلي :

$$X=W^{H}x$$ المعادلة رقم (٧.٩)

والتي هي نفسها كما في المعادلة (٧.٨). المعادلة (٧.٨) والمعادلة (٧.٩) يمكن كتابتهما في صورة المجموع التالية :

$$X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

والآن يصبح لدينا تحويل فورير المتقطع الأمامي والعكسي كما يلي :

$$X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=<N_0>} X[K]e^{j2\pi kn/N}$$ المعادلة رقم (٧.١٠)

إذا كانت الدالة $x[n]$ في النطاق الزمني محدودة زمنياً في المدى $n_0 \le n < n_0+N$ ، فإنه يمكن دائماً حساب الدالة التوافقية وهي نفسها تكون محدودة لأنها تكون مجموعاً لعدد محدود من الحدود.

في معظم المؤلفات عن تحويل فورير المتقطع تتم كتابة زوج التحويل كما يلي :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{و} \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[K]e^{j2\pi kn/N}$$ المعادلة رقم (٧.١١)

نقطة البداية للإشارة $x[n]$ هي $n_0=0$ ونقطة البداية لـ $X[k]$ هي $k=0$. هذه هي صورة تحويل فورير المتقطع التي يتم تنفيذها عملياً بكل لغات البرمجة. وعلى ذلك فعند استخدام DFT على الحاسب، فإن المستخدم يجب أن يكون على وعي بأن النتيجة المسترجعة من الحاسب تعتمد على افتراض أن العنصر الأول من الـ N من العناصر للإشارة x التي يتم إرسالها لإجراء DFT عليها هي القيمة، أو العينة $X[0]$. فإذا العنصر الأول هو $x[n_0]$ ، $n_0 \neq 0$ ، فإن نتيجة DFT ستحتوي مركبة زاوية خطية زائدة مقدارها $e^{j2\pi kn_0/N}$. ويمكن تعويض ذلك عن طريق ضرب نتيجة DFT في الكمية $e^{-j2\pi kn_0/N}$. بالطريقة نفسها فإذا كانت أول قيمة في $X[k]$ ليست عند $k=0$ ، فإن نتيجة DFT العكسي سيتم ضربها في دالة جيبية مركبة.

**خواص تحويل فورير المتقطع**

في كل الخواص المدونة في جدول ٧.١ تذكر الأزواج التالية : $x[n] \leftrightarrow X[k]$ و $y[n] \leftrightarrow Y[k]$.

إذا كانت أي إشارة $x[n]$ زوجية ودورية بدورة مقدارها N ، فإن دالتها التوافقية ستكون :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

إذا كنت N رقماً زوجياً فإن :

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + x\left[\frac{N}{2}\right]e^{-j\pi k} + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N-1}^{\frac{N}{2}+1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

**جدول رقم ٧.١ خواص تحويل فورير المتقطع DFT**

| | |
|---|---|
| الخطية | $\alpha\, x[n] + \beta y[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \alpha\, X[k] + \beta\, Y[k]$ |
| الإزاحة الزمنية | $x(n - n_0) \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]e^{-j2\pi k n_0/N}$ |
| الإزاحة الترددية | $x[n]e^{j2\pi k_0 n/N} \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k - k_0]$ |
| الانعكاس الزمني | $x\,[-n] = x[N - n] \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[-k] = x[N - k]$ |
| الترافق | $x^*[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X*[-k] = X*[N - k]$ <br> $x^*[-n]X*[N - n] \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X*[k]$ |
| التحجيم الزمني | $z[n] = \begin{cases} x[n/m], & n/m \text{ an intger} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ <br> $N \rightarrow mN,\ Z[k] = X[k]$ |
| تغيير الدورة | $N \rightarrow qN,\ q$ a postive integer <br> $X_q[k] = \begin{cases} qX[k/q], & k/q \text{ an intger} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ |
| ازدواجية الضرب والالتفاف | $x[n]\, y[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} (1/N)Y[k]\Theta X[k]$ <br> $x[n]\, y[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y[k]\Theta X[k]$ <br> where $x[n]\Theta\, y[n] = \sum_{m=\langle N\rangle} x[m]\, y[n - m]$ |
| نظرية بارسيفال | $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{n=\langle N\rangle}\lvert X[k]\rvert^2$ |

بمعلومية أن x دورية بدورة مقدارها N ، فإنه يمكننا أن نطرح N من n في المجموع الثاني كما يلي :

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=-1}^{-(\frac{N}{2}-1)} x[n]e^{-\frac{j2\pi k(n-N)}{N}} + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + e^{j2\pi k}\sum_{n=-1}^{-(\frac{N}{2}-1)} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} \left(x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + x[-n]e^{\frac{j2\pi kn}{N}}\right) + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

والآن حيث إن x[n]=x[-n] فيمكننا كتابة ما يلي :

$$X[k] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{N/2-1} \left(x[n]\cos(\frac{2\pi k}{N})\right) + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

كل هذه الحدود لها قيم حقيقية ، ولذلك فإن X[k] ستكون كذلك. بتحليل مماثل يمكن بيان أنه إذا كانت N فردية ، فإن النتيجة ستكون كما هي حيث ستكون قيم X[k] في هذه الحالة حقيقية. أيضاً ، إذا كانت x[n] دالة فردية ودورية بدورة مقدارها N ، فإن قيم X[k] ستكون قيماً تخيلية خالصة.

**مثال ٧.١**

**تحويل فورير المتقطعDFT لنبضة مربعة دورية متكررة 1**

أوجد تحويل فورير المتقطع DFT للدالة $x[n]=(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n]$ حيث $0\leq n_x\leq N_0$ مستخدما $N_0$ كزمن للتعبير عن هذه الإشارة.

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} \sum_{n=0}^{n_x-1} e^{-j2\pi kn/N_0}$$

بإجراء مجموع المتوالية الهندسية المحدودة :

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{1-e^{-j2\pi kn_x/N_0}}{1-e^{-j2\pi kn/N_0}} = \frac{e^{-j\pi kn_x/N_0}}{e^{-j\pi k/N_0}} \frac{e^{j\pi kn_x/N_0}-e^{-j\pi kn_x/N_0}}{e^{j\pi k/N_0}-e^{-j\pi k/N_0}}$$

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} e^{-j\pi k(n_x-1)/N_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

**مثال ٧.٢**

**تحويل فورير المتقطعDFT لنبضة مربعة دورية متكررة 2**

احسب تحويل فورير المتقطع DFT للدالة $x[n]=(u[n-n_0]-u[n-n_1])*\delta_{N_0}[n]$ حيث $0\leq n_1-n_0\leq N_0$.

نحن نعرف مبدئياً من مثال ٧.١ زوج التحويل المتقطع التالي :

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} e^{-j\pi k(n_x-1)/N_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

إذا طبقنا خاصية الإزاحة الزمنية :

$$x[n-n_y] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} X[k]e^{-j2\pi kn_y/N}$$

بهذه النتيجة يمكننا كتابة ما يلي :

$$\left(u[n-n_y]-u[n-n_y-n_x]\right)*\delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} e^{-j\pi k(n_x-1)/N_0}\, e^{-j2\pi kn_y/N_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

$$\left(u[n-n_y]-u[n-n_y-n_x]\right)*\delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} e^{-j\pi k(n_x+2n_y-1)/N_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

الآن دع $n_0=n_y$ و $n_1=n_y+n_x$.

$$(u[n-n_0]-u[n-n_1]) * \delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}} e^{-j\pi k(n_0+n_1-1)/N} \frac{\sin\left(\frac{\pi k(n_1-n_0)}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \quad 0 \le n_1-n_0 \le N_0$$

افترض الحالة الخاصة التي فيها $n_0+n_1=1$، فيمكننا كتابة:

$$(u[n-n_0]-u[n-n_1]) * \delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k(n_1-n_0)}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \quad n_0+n_1=1$$

هذه هي حالة النبضة المستطيلة ذات العرض $n_1-n_0=2n_1-1$، المتمركزة عند $n=0$. إن ذلك يكافئ النبضة الدورية المتكررة في الزمن المستمر التي على الصورة:

$$T_0 rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{T_0}(t)$$

قارن دوالهما التوافقية التالية:

$$T_0 rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{T_0}(t) \overset{\mathcal{FS}}{\underset{T_0}{\longleftrightarrow}} w\, sinc\left(\frac{wk}{T_0}\right) = \frac{\sin(\pi wk/T_0)}{\pi k/T_0}$$

$$(u[n-n_0]-u[n-n_1]) * \delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k(n_1-n_0)}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \quad n_0+n_1=1$$

الدالة التوافقية لـ $T_0 rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{T_0}(t)$ هي دالة سنك sinc. على من عدم وضوحها حتى الآن، فإن الدالة التوافقية لـ $u[n-n_0]-u[n-n_1]$ عبارة عن دالة سنك دورية ومتكررة.

صورة الدالة $\frac{\sin(\pi Nx)}{N\sin(\pi x)}$ (انظر مثال ٧.٢) يشيع ظهورها بما فيه الكفاية في تحليل الإشارات والأنظمة تعطي الاسم دالة درتشليت Dirichlet كما في شكل (٧.٨).

$$drcl(t,N) = \frac{\sin(\pi Nt)}{N\sin(\pi t)}$$ المعادلة رقم (٧.١٢)

**شكل رقم (٧.٨) دالة درتشليت عند N=4, 5, 7, 13**

عندما تكون N فردية فإن التشابه مع الدالة سنك يكون واضحاً، الدالة درتشليت عبارة عن مجموع لا نهائي لدوال سنك منتظمة التباعد. البسط sin(Nπt) يكون صفراً عندما تكون t أي مضاعف صحيح من 1/N. ولذلك فإن دالة درتشليت تكون صفراً عند هذه النقاط، إلا إذا كان المقام هو الآخر يساوي صفراً. المقام Nsin(πt) يساوي صفراً عند كل قيمة صحيحة لـ t. ولذلك علينا استخدام قانون لوبيتال لإجراء دالة درتشليت عند القيم الصحيحة لـ t.

$$\lim_{t\to m} drcl(t,N) = \lim_{t\to m}\frac{\sin(\pi Nt)}{Nsin(\pi t)} = \lim_{t\to m}\frac{\mathrm{N\pi cos(N\pi t)}}{N\pi cos(\pi t)} = \pm 1,$$

حيث m رقم صحيح.

إذا كانت N زوجية، فإن النقاط العظمى لدالة درتشليت ستتبدل بين 1+ و 1-. إذا كانت N فردية، فإن النقاط العظمى كلها تكون عند 1+. أحد إصدارات الدالة درتشليت جزء من صندوق أدوات الإشارة في ماتلاب واسم الدالة هو diric، وهي معرفة كالتالي:

$$diric(x,N) = \frac{\sin(Nx/2)}{Nsin(x/2)}$$

ولذلك فإن:

drcl(t,N)=diric(2πt,N)

```
% دالة لحساب قيم دالة درتشليت
% تعمل بالطريقة نفسها مع المتجهات والكميات القياسية
%
% x = sin(N*pi*t)/(N*sin(pi*t))
%
function x = drcl(t,N)
x = diric(2*pi*t,N) ;
% دالة لإجراء دالة درتشليت بدون استخدام دالة
% MATLAB diric.
% تعمل مع المتجهات والكميات القياسية
%
% x = sin(N*pi*t)/(N*sin(pi*t))
%
function x = drcl(t,N),
num = sin(N*pi*t) ; den = N*sin(pi*t) ;
I = fi nd(abs(den) < 10*eps) ;
num(I) = cos(N*pi*t(I)) ; den(I) = cos(pi*t(I)) ;
x = num./den ;
```

باستخدام تعريف دالة درتشليت، فإن زوج تحويل فورير المتقطع DFT من مثال ٧.٢ يمكن كتابته كالتالي:

$$(u[n-n_0) - u[n-n_1]) * \delta_N[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \frac{e^{-j\pi k(n_1+n_0)/N}}{e^{-j\pi k/N}}(n_1-n_0)drcl(\frac{k}{N}, n_1-n_0)$$

جدول ٧.٢ يبين العديد من أزواج تحويل فورير المتقطع الشائعة.

**جدول رقم ٧–٢ أزواج شائعة من تحويل فورير المتقطع في كل زوج تكون m رقماً صحيحاً موجباً**

| | |
|---|---|
| ١ | $e^{j2\pi n/N} \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{mN}{\longleftrightarrow}} mN\delta_{mN}[k-m]$ |
| ٢ | $\cos(2\pi qn/N) \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{mN}{\longleftrightarrow}} (mN/2)\delta_{mN}[k-mq] + \delta_{mN}[k+mq]$ |
| ٣ | $\sin(2\pi qn/N) \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{mN}{\longleftrightarrow}} (jmN/2)\delta_{mN}[k+mq] - \delta_{mN}[k-mq]$ |
| ٤ | $\delta_N[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{mN}{\longleftrightarrow}} M\,\delta_{mN}[k]$ |
| ٥ | $1 \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} N\,\delta_N[k]$ |
| ٦ | $\left(u[n-n_0] - u[n-n_1] * \delta_N[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \frac{e^{-j\pi k(n_1+n_0)/N}}{e^{-j\pi k/N}}(n_1-n_0)\mathrm{drcl}(k/N, n_1-n_0)\right)$ |
| ٧ | $\mathrm{tri}(n/N_w) * \delta_N[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} N_w\,\mathrm{drcl}^2\,(k/N, N_w)N_w$ an integer |
| ٨ | $\mathrm{sinc}(n/w) * \delta_N[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} w\mathrm{rect}\,(wk/N)\delta_N[k]$ |

## تحويل فورير السريع

لقد تم تحديد تحويل فورير المتقطع DFT الأمامي كما يلي :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

الطريقة المباشرة لحساب DFT من الممكن أن تكون كما هو مبين في الخواريزم التالي (المكتوب بماتلاب) والذي يقوم بإجراء العمليات السابقة مباشرة :

```
.
.
.
%  اكتساب بيانات الدخل ووضعها في متجه
% x
%  مكون من عدد
% N
%   من العناصر
%
% بدأ متجه تحويل فورير المتقطع من متجه عمود كله أصفار
%
X = zeros(N,1) ;
%
% حساب تحويل فورير المتقطع باستخدام حلقتين متداخلتين
%
for k = 0:N-1
    for n = 0:N-1
        X(k+1) = X(k+1) + x(n+1)*exp(-j*2*pi*n*k/N) ;
    End
end
.
.
.
```

(لن يحتاج أي أحد لكتابة هذا البرنامج في ماتلاب ؛ لأن تحويل فورير المتقطع مبنى جاهز في ماتلاب كدالة ضمنية تسمى fft)

إن حساب DFT باستخدام هذا الخواريزم يتطلب عدد $N^2$ من عمليات الضرب والجمع المركب. ولذلك فإن عدد هذه الحسابات يزداد تربيعياً مع زيادة عدد عناصر متجه الدخل المطلوب تحويله. في عام 1965 نشر كل من جيمس كوولي James Cooley و جون تيوكي John Tukey خواريزم أكثر كفاءة في زمن الحساب لمتجهات الدخل الكبيرة التي يكون طولها قوي من الرقم 2. هذا الخواريزم لحساب الـ DFT هو ما أطلق عليه تحويل فورير السريع fast Fourier transform أو باختصار الـ FFT.

جدول ٧.٣ يبين النقص في زمن حساب تحويل فورير السريع مع طريقة الحلقتين المتداخلتين التي قدمت فيما قبل وفيه A تمثل عدد عمليات الجمع المركب المطلوبة، و M تمثل عدد عمليات الضرب المركب المطلوبة، والرمز DFT الجانبي يبين استخدام طريقة الحلقتين المتداخلتين المباشرة، والرمز FFT يبين استخدام خواريزم تحويل فورير السريع FFT.

مع زيادة عدد النقاط N في عملية التحويل، فإن ميزة سرعة تحويل فورير السريع FFT تتنامي بسرعة كبيرة. ولكن معامل التحسن في السرعة لا يطبق إذا كانت N ليست قوة صحيحة للرقم 2. لهذا السبب، فإن كل تحليلات ال DFT الحقيقية يتم إجراؤها عملياً باستخدام الـ FFT باستخدام أطوال متجه يكون طوله قوة صحيحة للرقم 2. (في ماتلاب إذا كان طول متجه الدخل قوة صحيحة من الرقم 2، فإن الخواريزم المستخدم في دالة ماتلاب، fft، يكون هو خواريزم FFT الذي تم تقديمه. إذا كان طول المتجه ليس قوة صحيحة من الرقم 2، فإن DFT لا يزال يحسب ولكن بسرعة أقل لأنه يتم استخدام خواريزم أقل كفاءة).

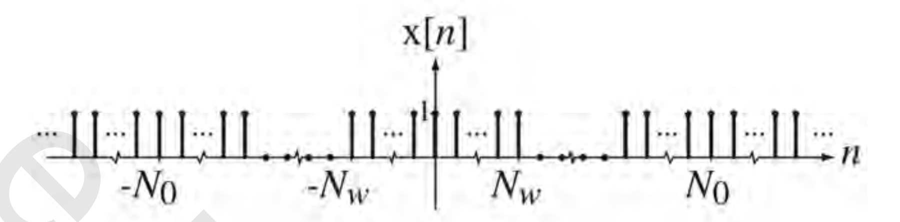
**جدول رقم ٧.٣ عدد عمليات الجمع وعمليات الضرب ونسبها لقيم مختلفة لعدد العناصر N**

| $\gamma$ | $N = 2^\gamma$ | $A_{DFT}$ | $M_{DFT}$ | $A_{FFT}$ | $M_{FFT}$ | $A_{DFT}/A_{FFT}$ | $M_{DFT}/M_{FFT}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 4 | 12 | 16 | 8 | 4 | 1.5 | 4 |
| 3 | 8 | 56 | 64 | 24 | 12 | 2.33 | 5.33 |
| 4 | 16 | 240 | 256 | 64 | 32 | 3.75 | 8 |
| 5 | 32 | 992 | 1024 | 160 | 80 | 6.2 | 12.8 |
| 6 | 64 | 4032 | 4096 | 384 | 192 | 10.5 | 21.3 |
| 7 | 128 | 16256 | 16384 | 896 | 448 | 18.1 | 36.6 |
| 8 | 256 | 65280 | 65536 | 2048 | 1024 | 31.9 | 64 |
| 9 | 512 | 261632 | 262144 | 4608 | 2304 | 56.8 | 113.8 |
| 10 | 1024 | 1047552 | 1048576 | 10240 | 5120 | 102.3 | 204.8 |

## (٧.٣) تحويل فورير في الزمن المتقطع

### امتداد تحويل فورير المتقطع إلى الإشارات غير الدورية

افترض إشارة الموجة المستطيلة الموضحة في شكل (٧.٩).




**شكل رقم (٧.٩) إشارة موجة مستطيلة عامة.**

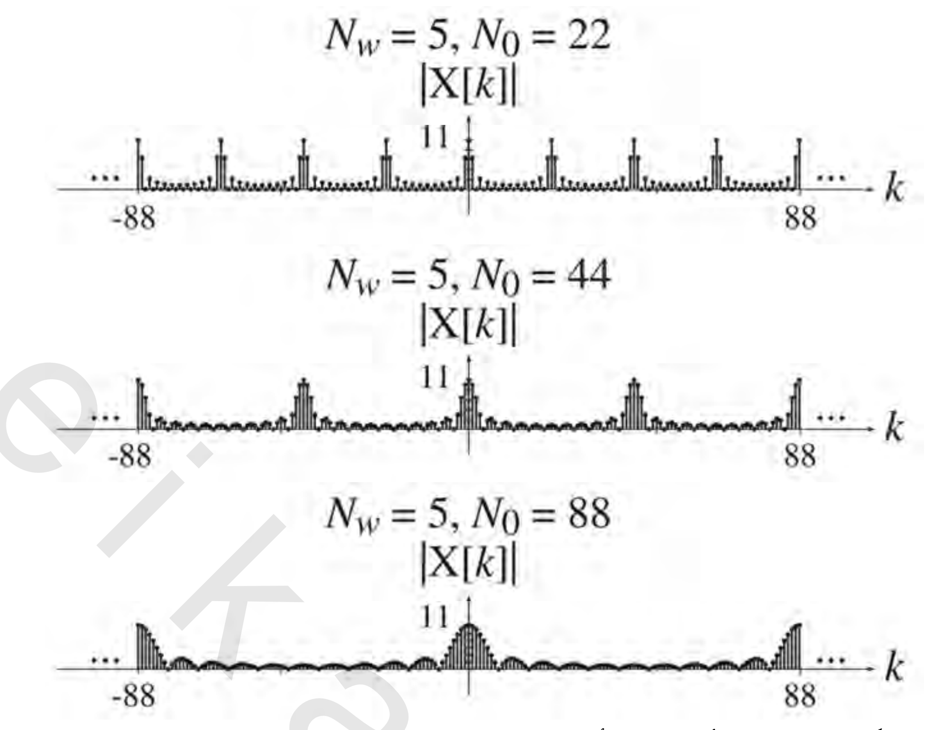
الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع DFT اعتمادا على الدورة الأساسية ($N=N_0$) هي :

$$X[k]=(2N_w+1)drcl(k/N_0,2N_w+1)$$

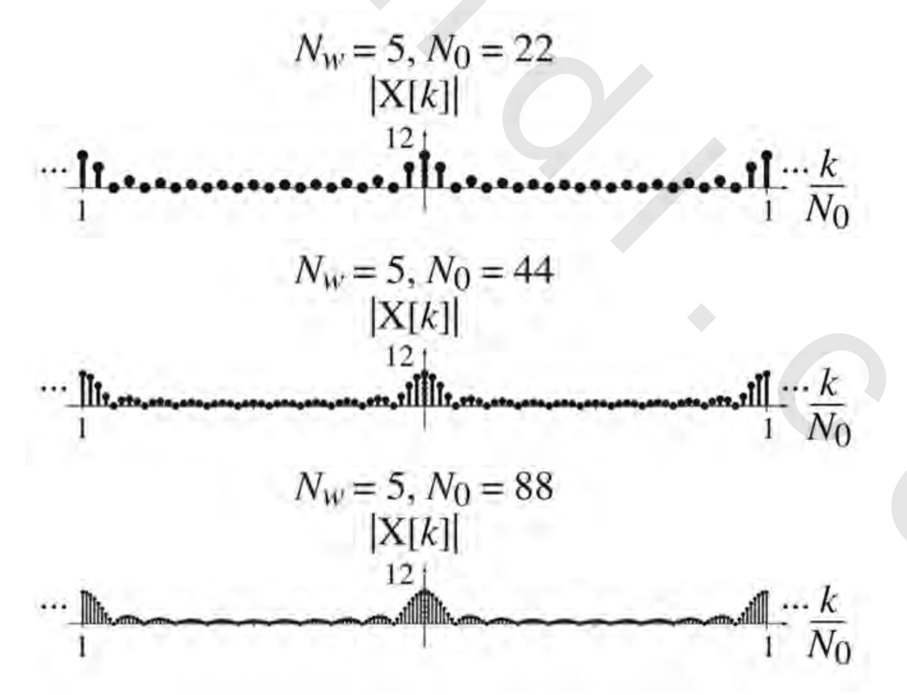
وهي دالة ديرشليت (Dirichlet ) معيننة ونقاطها العظمى عند $2N_w+1$ ودورة مقدارها $N_0$.

لبيان تأثيرات الدورات الأساسية المختلفة $N_0$ سنفترض $N_w=5$ وسنرسم مقدار X[k] مع k لقيم $N_0=22, 44,$ 88 كما هو مبين في شكل (٧.١٠).

تأثير زيادة الدورة الأساسية للإشارة x[n] على الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع هو زيادة انتشار هذه الدالة بدلالة الرقم التوافقي k. ولذلك ففي النهاية ، ومع اقتراب $N_0$ من الما لانهاية فإن دورة الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع DFT ستقترب أيضاً من الما لانهاية. إذا كانت دورة أي دالة غير محددة ، فإن هذه الدالة لن تكون بالتالي دالة دورية. يمكننا أن نطبع ذلك عن طريق رسم الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع مع التردد الدوري $k/N_0$ بدلاً من الرقم التوافقي k. وبالتالي فإن الدورة الأساسية للدالة التوافقية لـ DFT (كما تم رسمها) تكون عادة واحداً بدلاً من $N_0$ كما في شكل (٧.١١).

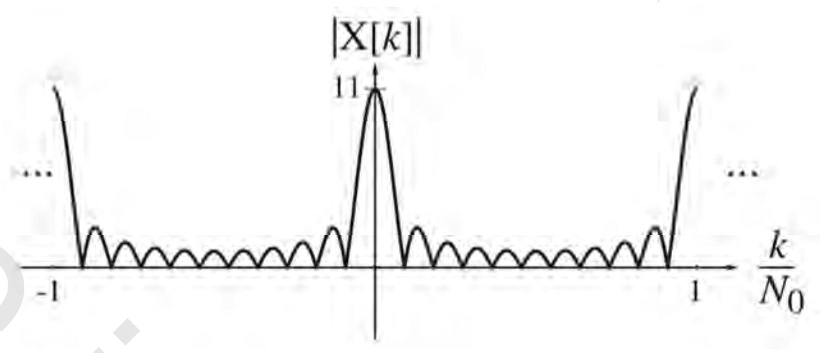



**شكل رقم (٧.١٠) تأثير الدورة الأساسية N0 على مقدار الدالة التوافقية لـ DFT لإشارة موجة مستطيلة.**




**شكل رقم (٧.١١) مقدار الدالة التوافقية لـ DFT لإشارة موجة مستطيلة مرسومة مع k/N0 بدلا من k.**

مع اقتراب $N_0$ من الما لانهاية، فإن الفاصل بين نقاط الـ X[k] يقترب من الصفر ويصبح شكل التردد المتقطع شكلاً ترددياً مستمراً كما في شكل (٧.١٢).




**شكل رقم (٧.١٢) الشكل النهائي للدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع لإشارة الدالة الموجية**

**التعريف والاستنتاج**

لتمديد تحويل فورير المتقطع تحليلياً ليشتمل على الإشارات غير الدورية، سنفترض أن $\Delta F=1/N_0$، عبارة عن تغير متقطع زمنياً محدد في التردد الدوري F. وبالتالي يمكن كتابة x[n] على أنها تحويل فورير المتقطع العكسي لـ X[k] كما يلي:

$$x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} X[k] e^{j2\pi kn/N_0} = \Delta F \sum_{k=<N_0>} X[k] e^{j2\pi k\Delta Fn}$$

بالتعويض بمعادلة المجموع لـ X[k] من تعريف تحويل فورير المتقطع:

$$x[n] = \Delta F \sum_{k=<N_0>} \left( \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] e^{-j2\pi k\Delta Fm} \right) e^{j2\pi k\Delta Fn}$$

(مؤشر المجموع n في معادلة X[k] تم تغييرها إلى m لتجنب الخلط أو الالتباس مع n في معادلة x[n] حيث إنهما متغيران مستقلان).

حيث إن x[n] دالة دورية بدورة أساسية مقدارها $N_0$، فإن المجموع الداخلي من الممكن أن يكون على أي دورة وعلى ذلك فالمعادلة السابقة تصبح كما يلي:

$$x[n] = \sum_{k=<N_0>} \left( \sum_{m=<N_0>} x[m] e^{-j2\pi k\Delta Fm} \right) e^{j2\pi k\Delta Fn} \Delta F$$

سنفترض أن مدى المجموع الداخلي هو $-N_0/2 \le m < N_0/2$ للقيم الزوجية لـ $N_0$ أو للقيم الفردية لـ $N_0$ يمكن كتابة هذا المدى كالتالي : $-(N_0-1)/2 \le m < (N_0+1)/2$. المجموع الخارجي يكون على أي مدى اختياري k بعرض مقداره $N_0$ ، ولذلك سنفترض أن هذا المدى سيكون $k_0 \le k < k_0+N_0$ ، وبالتالي يمكن كتابة :

$$x[n] = \sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1}\left(\sum_{m=-N_0/2}^{\frac{N_0}{2}-1} x[m]e^{-j2\pi k\Delta F m}\right)e^{j2\pi k\Delta F n}\Delta F$$ المعادلة رقم (٧.١٣)

عندما n تكون زوجية. و

$$x[n] = \sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1}\left(\sum_{m=-(N_0-1)/2}^{\frac{(N_0-1)}{2}} x[m]e^{-j2\pi k\Delta F m}\right)e^{j2\pi k\Delta F n}\Delta F$$ المعادلة رقم (٧.١٤)

عندما تكون n فردية.

الآن سنفترض أن الدورة الأساسية $N_0$ لتحويل فورير المتقطع DFT ستقترب من الما لانهاية. عند هذا الحد تحدث الأشياء التالية :

١- تقترب $\Delta F$ من تفاضل التردد المتقطع زمنياً dF.

٢- تصبح $k\Delta F$ تردداً متقطعاً زمنياً F ، وهي عبارة عن متغير مستقل مستمر ، لأن $\Delta F$ تقترب من dF.

٣- يقترب المجموع الخارجي من تكامل في $F=k\Delta F$. يغطي المجموع للمدى $k_0 \le k < k_0+N_0$. المدى المكافئ له في التكامل يمكن إيجاده باستخدام العلاقة $F=kdF=k/N_0$. بقسمة مدى الرقم التوافقي $k_0 \le k < k_0+N_0$ على $N_0$ ينقل هذا المدى إلى تردد الزمن المتقطع $F_0<F<F_0+1$ حيث $F_0$ تكون اختيارية حيث إن $k_0$ تكون اختيارية. المجموع الداخلي يغطي مدى لانهائي لأن $N_0$ تقترب من الما لانهاية.

في النهاية تصبح كل من المعادلة (٧.١٣)والمعادلة (٧.١٤) على الصورة :

$$x[n] = \int_1 \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi Fm}\right)}_{=\mathcal{F}(x[m])} e^{j2\pi Fm}dF$$

وصورة التردد الزاوي ستكون كما يلي :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m}\right)e^{j\Omega m}d\Omega$$

حيث $\Omega = 2\pi F$ و $dF=d\Omega/2\pi$. هذه النتائج تعطي تعريف تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT كما يلي :

$$x[n] = \int_1 X(F)\, e^{j2\pi Fn}dF \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi Fn}$$

أو :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}d\Omega \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

جدول ٧.٤ يبين بعض أزواج تحويل فورير في الزمن المستمر لبعض الإشارات البسيطة.

نحن هنا مواجهون مع نظام الترميز نفسه المعتمد في استنتاج تحويل فورير في الزمن المتقطع CTFT في الفصل ٦. X(F) ستعرف بالمعادلة التالية: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi Fn}$ و $X(e^{j\Omega})$ ستعرف كما يلي: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$، ولكن في الحقيقة، فإن الاثنين X يكونان دوال مختلفة حسابيا لأن $X(e^{j\Omega}) \neq X(F)_{F\to e^{j\Omega}}$. القرار هنا سيكون مشابهاً للقرار الذي تم الوصول إليه في الفصل ٦. سنستخدم الصورة X(F) والصورة $X(e^{j\Omega})$ للأسباب نفسها. إن استخدام $X(e^{j\Omega})$ بدلاً من الصورة المبسطة $X(\Omega)$ تكون مدفوعة بالرغبة في الحفاظ على التطابق في التعريف الدالي بين ال DTFT وتحويل زد z الذي سيتم تقديمه في الفصل ٩.

**جدول رقم (٧.٤). بعض أزواج تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT المستنتجة مباشرة من التعريف.**

| | |
|---|---|
| ١ | $\delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$ |
| ٢ | $e^{n}u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha} = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}},\ \lvert\alpha\rvert < 1$ |
| ٣ | $-\alpha^{n}u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha} = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}},\ \lvert\alpha\rvert > 1$ |
| ٤ | $n\alpha^{n}u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\alpha e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\alpha)^2} = \frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2},\ \lvert\alpha\rvert < 1$ |
| ٥ | $-n\alpha^{n}u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\alpha e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\alpha)^2} = \frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2},\ \lvert\alpha\rvert > 1$ |
| ٦ | $\alpha^{n}\sin(\Omega_0 n)u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}\alpha\sin(\Omega_0)}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert\alpha\rvert < 1$ |
| ٧ | $-\alpha^{n}\sin(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}\alpha\sin(\Omega_0)}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert\alpha\rvert > 1$ |
| ٨ | $\alpha^{n}\cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}[e^{j\Omega}-\alpha\cos(\Omega_0)]}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert\alpha\rvert < 1$ |
| ٩ | $-\alpha^{n}\cos(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}[e^{j\Omega}-\alpha\cos(\Omega_0)]}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert\alpha\rvert > 1$ |
| ١٠ | $\alpha^{\lvert n\rvert} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha} - \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/\alpha},\ \lvert\alpha\rvert < 1$ |

**الصورة العامة لتحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT**

تماماً كما رأينا في الزمن المستمر، فإنه في الزمن المتقطع يكون هناك بعض الإشارات المهمة عملياً، التي لا يكون لها DTFT بالمعنى الصارم. حيث إن هذه الإشارات تكون غاية في الأهمية، فقد تم تعميم DTFT ليشمل هذه الإشارات. افترض DTFT للدالة x[n]=A، حيث A ثابت:

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ae^{-j2\pi Fn} = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi Fn}$$

هذا التتابع لن يتقارب. ولذلك، فإنه بالمعنى الصارم، فإن DTFT لا يوجد. لقد واجهنا موقفا مشابهاً في حالة CTFT ووجدنا أن CTFT العام للقيمة الثابتة يكون صدمة عند f=0 أو w=0. نتيجة العلاقات القريبة بين CTFT والـ DTFT فإننا يجب أن نتوقع نتيجة مشابهة عند إجراء DTFT على الكمية الثابتة. ولكن كل DTFT يجب أن

تكوندورية ، ولذلك فإن الصدمة الدورية تكون هي الاختيار المنطقي في هذه الحالة. افترض أن الإشارة x[n] سيكون لها DTFT على الصورة $A\delta_1(F)$ ، لذلك فإن x[n] يمكن إيجادها عن طريق حساب الـ DTFT العكسي للكمية $A\delta_1(F)$ كما يلي :

$$x[n] = \int_1 A\delta_1(F)e^{j2\pi Fn}\,dF = A\int_{-1/2}^{1/2} \delta(F)e^{j2\pi Fn}\,dF = A$$

وعلى ذلك نحصل على زوج التحويل DTFT التالي :

$$A \leftrightarrow A\delta_1(F), \quad A \leftrightarrow 2\pi A\delta_{2\pi}(\Omega)$$

إذا عممنا هذه الصورة إلى الصورة $A\delta_1(F - F_0)$ حيث $-1/2<F_0<1/2$ سنحصل على التالي :

$$x[n] = \int_1 A\delta_1(F - F_0)e^{j2\pi Fn}\,dF = A\int_{-1/2}^{1/2} \delta(F - F_0)e^{j2\pi Fn}\,dF = Ae^{j2\pi F_0 n}$$

وعلى ذلك فإذا كانت $x[n]=A\cos(2\pi f_0 n)=(A/2)(e^{j2\pi F_0 n} + e^{-j2\pi F_0 n})$ سنحصل على زوج تحويل الـ DTFT التالي :

$$A\cos(2\pi F_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left(\frac{A}{2}\right)[\delta_1(F - F_0) + \delta_1(F + F_0)]$$

أو :

$$A\cos(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi A[\delta_1(\Omega - \Omega_0) + \delta_1(\Omega + \Omega_0)]$$

بعملية مماثلة يمكننا أن نستنتج أزواج التحويل التالية :

$$A\sin(2\pi F_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left(\frac{jA}{2}\right)[\delta_1(F + F_0) - \delta_1(F - F_0)]$$

أو :

$$A\sin(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi A[\delta_1(\Omega + \Omega_0) - \delta_1(\Omega - \Omega_0)]$$

ونستطيع الآن نوسع جدول الـ DTFT ليشتمل على دوال مفيدة أكثر كما في جدول ٧.٥.

**تقارب تحويل فورير في الزمن المتقطع**

شرط التقارب للـ DTFT هو ببساطة أن يكون المجموع التالي متقارباً :

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}, \quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$ المعادلة رقم (٧.١٥)

وهذا المجموع سيتقارب إذا كان :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$ المعادلة رقم (٧.١٦)

إذا كانت دالة DTFT محدودة ، فإن التحويل العكسي التالي :

$$x[n] = \int_1 X(F)e^{j2\pi FN}\,dF, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\,d\Omega$$ المعادلة رقم (٧.١٧)

سيتقارب دائماً حيث إن فترة التكامل محدودة.

**جدول رقم (٧.٥) المزيد من أزواج الـ DTFT .**

| | |
|---|---|
| $\delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$ | ١ |
| $u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j2\pi F}} + (1/2)\delta_1(F),$ | ٢ |
| $u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_1(\Omega),$ | ٣ |
| $\mathrm{sinc}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\,\mathrm{rect}(wF) * \delta_1(F),$ | ٤ |
| $\mathrm{sinc}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\,\mathrm{rect}(w\Omega/2\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega),$ | ٥ |
| $\mathrm{tri}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\,\mathrm{drcI}^2(F, w)$ | ٦ |
| $\mathrm{tri}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\,\mathrm{drcI}^2(\Omega/2\pi, w)$ | ٧ |
| $1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta_1(F),$ | ٨ |
| $1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega),$ | ٩ |
| $\delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/N_0), \delta_{1/N_0}(F)$ | ١٠ |
| $\delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (2\pi/N_0), \delta_{2\pi/N_0}(\Omega)$ | ١١ |
| $\cos(2\pi f_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)[\delta_1(F - F_0) + \delta(F + F_0)]$ | ١٢ |
| $\cos(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)]$ | ١٣ |
| $\cos(2\pi f_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j/2)[\delta_1(F + F_0) - \delta(F - F_0)]$ | ١٤ |
| $\sin(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0) - \delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0)]$ | ١٥ |
| $u[n - n0] - u[n - n1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{e^{j2\pi F}}{e^{j2\pi F}-1}\left(e^{-j2\pi n_0 F} - e^{-j2\pi n_1 F}\right) = \frac{e^{-j\pi F(n_0+n_1)}}{e^{-j\pi F}}(n_0 - n_1)\mathrm{drcI}(F, n_0 - n_1)$ | ١٦ |
| $u[n - n0] - u[n - n1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}\left(e^{-jn_0\Omega} - e^{-jn_1\Omega}\right) = \frac{e^{-j\Omega(n_0+n_1)/2}}{e^{-j\Omega/2}}(n_0 - n_1)\mathrm{drcI}(\Omega/2\pi, n_0 - n_1)$ | ١٧ |

## خواص تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT

سنفترض أن الإشارتين x[n] و y[n] واللذان لهما DTFT يساوي X(F) و Y(F) أو $X(e^{j\Omega})$ و $Y(e^{j\Omega})$ وبالتالي فإن الخواص الموجودة في جدول ٧.٦ ستكون مطبقة.

**جدول رقم (٧.٦) خواص ال DTFT .**

| | |
|---|---|
| $\alpha\, x[n] + \beta y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha\, X(F) + \beta\, Y(F)$ | $\alpha\, x[n] + \beta y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha\, X(e^{j\Omega}) + \beta\, Y(e^{j\Omega})$ |
| $x[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi F n_0/T} X[\mathrm{F}]$ | $x[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega n_0/T} X(e^{j\Omega})$ |
| $e^{j2\pi F_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{X}[\mathrm{F}-\mathrm{F}_0]$ | $e^{j\Omega_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{X}\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$ |
| $\text{if } \mathrm{z}[\mathrm{n}] = \begin{Bmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{n/m}], & \mathrm{n/m} \text{ an intger} \\ 0, & otherwise \end{Bmatrix}\ then\ \mathrm{z}[\mathrm{n}] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(mF)\ or\ \mathrm{z}[\mathrm{n}] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{jm\Omega})$ | |
| $x^*[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X * [-F]$ | $x^*[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X * (e^{-j\Omega})$ |
| $x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1 - e^{-j2\pi F}) X(\mathrm{F})$ | $x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1 - e^{-j\Omega}) X(e^{j\Omega})$ |
| $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{X(\mathrm{F})}{1-e^{-j2\pi F}} + \frac{1}{2} x(0)\delta_1(F)$ | $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{X(e^{j\Omega})}{1-e^{-j\Omega}} + \pi x(0)\delta_{2\pi}(\Omega)$ |
| $x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(-F)$ | $x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{-j\Omega})$ |
| $x[n] * y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{F}) * Y(\mathrm{F})$ | $x[n] * y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) * Y(e^{j\Omega})$ |
| $x[n]y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{F})\Theta Y(\mathrm{F})$ | $x[n]y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2\pi) X(e^{j\Omega})\Theta Y(e^{j\Omega})$ |
| $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi F n} = \delta_1(\mathrm{F})$ | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} = 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega)$ |
| $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \int_1 \lvert X(\mathrm{F})\rvert^2 dF$ | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = (1/2\pi) \int_{2\pi} \lvert X(e^{j\Omega})\rvert^2 d\Omega$ |

في الخاصية :

$$X[n]y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2\pi) X(e^{j\Omega})\Theta\, Y(e^{j\Omega})$$

العملية ⊗ تبين الالتفاف الدوري الذي تم تقديمه في الفصل ٦. في هذه الحالة يكون :

$$X(e^{j\Omega})\Theta\, Y(e^{j\Omega}) = \int_{2\pi} X(e^{j\Phi})\Theta\, Y(e^{j(\Omega-\Phi)}) d\Phi$$

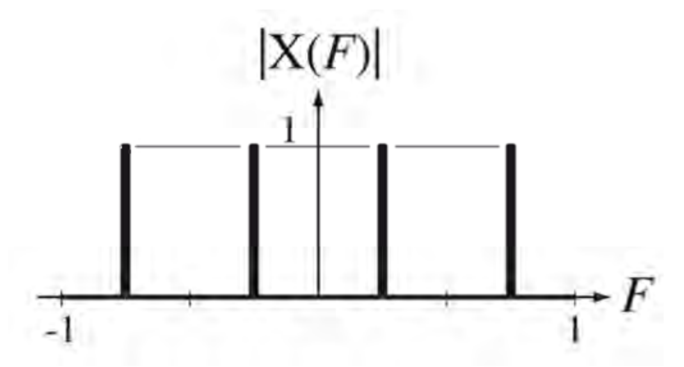
### مثال ٧.٣

### حساب ال DTFT العكسي لمستطيلين دوريين مزاحين.

احسب وارسم ال DTFT العكسي للدالة :

$$X(F) = \left[rect\left(50\left(F - \frac{1}{4}\right)\right) + rect\left(50\left(F + \frac{1}{4}\right)\right)\right] * \delta_1(F)$$

انظر شكل (٧.١٣).




**شكل رقم (٧.١٣) مقدار X(F)**

يمكننا أن نبدأ من جدول الخواص $sinc\left(\frac{n}{w}\right) \leftrightarrow wrect(wF) * \delta_1(F)$ وفي هذه الحالة فإن:

$$\left(\frac{1}{50}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect(50F) * \delta_1(F)$$

الآن بتطبيق خاصية الإزاحة الترددية $e^{j2\pi F_0 n}x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(F-F_0)$ يمكننا كتابة ما يلي:

$$e^{j\pi n/2}\left(\frac{1}{50}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect\left(50\left(F-\frac{1}{4}\right)\right) * \delta_1(F)$$ المعادلة رقم (٧.١٨)

وأيضاً:

$$e^{-j\pi n/2}\left(\frac{1}{50}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect\left(50\left(F+\frac{1}{4}\right)\right) * \delta_1(F)$$ المعادلة رقم (٧.١٩)

(تذكر أنه عند التفاف الدالتين، فإن أي واحدة منهما وليس بإزاحة كلتيهما، سيزيح الالتفاف الناتج ب بالكمية نفسها). في النهاية بدمج المعادلتين (٧.١٨) و (٧.١٩) وبالتبسيط نحصل على:

$$\left(\frac{1}{25}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left[rect\left(50\left(F-\frac{1}{4}\right)\right) + rect\left(50\left(F+\frac{1}{4}\right)\right)\right] * \delta_1(F)$$

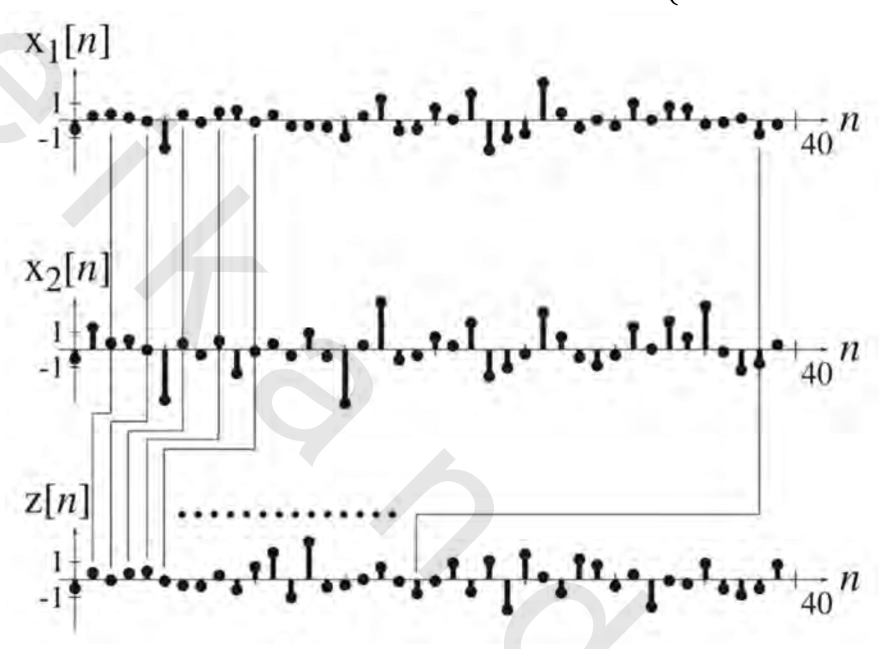
التحجيم الزمني في DTFT مختلف تماماً عن التحجيم الزمني في الـ CTFT نتيجة الاختلافات بين الزمن المتقطع والزمن المستمر. سنفترض أن z[n]=x[an]. إذا لم تكن a ثابتاً صحيحاً، فإن بعض القيم لـ z[n] ستكون غير محددة وبالتالي لن يمكن إيجاد DTFT لها. إذا كانت a ثابتاً صحيحاً أكبر من الواحد، فإن بعض القيم لـ x[n] لن تظهر في z[n] نتيجة التقسيم، ولن تكون هناك علاقة وحيدة أو فريدة بين DTFT و x[n] و z[n] كما في شكل (٧.١٤).

في شكل (٧.١٤) فإن الإشارتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ إشارتان مختلفتان ولكنهما لهما القيمة نفسها عند القيم الزوجية لـ n. إذا تم تقسيم كل من الدالتين يالمعامل ٢، فإنها ستعطي نفسها الإشارة المقسمة z[n]. لذلك فإن ال DTFT للإشارة وال DTFT لصورة مقسمة من نفس الإشارة لن تكون وحيدة أو فريدة ولن يمكن إيجاد خاصية لهذا النوع من التحجيم الزمني. بينما إذا كانت z[n] صورة موسعة من x[n]، يتم تكوينها بوضع أصفار بين قيم x[n]، فإنه ستكون هناك علاقة وحيدة، أو فريدة بين الـ DTFT لكل من x[n] و z[n]. افترض أن:

$$z[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{m}\right], & \frac{n}{m} \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

حيث m رقم صحيح. بالتالي فإن $Z(e^{j\Omega})=X(e^{jm\Omega})$ وستكون خاصية التحجيم الزمني لـ DTFT كما يلي :

إذا كانت $z[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{m}\right], & \frac{n}{m} \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$ ، بالتالي فإن $\begin{Bmatrix} z[n] \leftrightarrow X(mF) \\ z[n] \leftrightarrow X(e^{jm\Omega}) \end{Bmatrix}$ المعادلة رقم (٧.٢٠)




**شكل رقم (٧.١٤) الإشارات المختلفة التي عندما يتم تقسيمها بالمعامل 2 تعطي الإشارة نفسها**

يمكن تفسير هذه النتائج أيضاً على أنها خاصية تحجيم ترددي. افترض ال DTFT التالي: $X(e^{j\Omega})$، وأنه تم تحجيم Ω إلى mΩ حيث m≥1، فإن التأثير في النطاق الزمني سيكون هو إدخال m-1 من الأصفار بين نقاط الإشارة x[n]. التحجيم الوحيد الذي يمكن عمله في النطاق الترددي هو الضغط وبمعامل صحيح فقط. إن ذلك ضروري ؛ لأن كل الـ DTFT يجب أن تكون له فترة زمنية (ليست بالضرورة دورة أساسية) مقدارها 2π في **Ω**.

**مثال ٧.٤**

**المعادلة العامة للـ DTFT لصدمة دورية**

بمعلومية زوج الـ DTFT $1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega)$ وباستخدام خاصية التقسيم الزمني لإيجاد المعادلة العامة للـ DTFT للـ $\delta_{N_0}[n]$.

الثابت 1 يمكن التعبير عنه بأنه $\delta_1[n]$. الصدمة الدورية $\delta_{N_0}[n]$ هي صورة مجحمة زمنياً من $\delta_1[n]$ مجحمة بالمقدار $N_0$. بمعنى :

$$\delta_{N_0}[n] = \begin{cases} \delta_1[\frac{n}{N_0}], & \frac{n}{N_0} \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ولذلك فمن (٧.٢٠) يمكن كتابة :

$$\delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta_{2\pi}(N_0\Omega) = (\frac{2\pi}{N_0})\delta_{2\pi/N_0}(\Omega)$$

إن انعكاسات ازدواجية الضرب والالتفاف في تحليل الإشارات والأنظمة ستكون كما هي بالنسبة للإشارات والأنظمة المتقطعة زمنياً كما كانت في حالة الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً. إستجابة أي نظام هي التفاف الإثارة واستجابة الصدمة لهذا النظام. العبارة المكافئة لذلك في النطاق الترددي هي أن DTFT لاستجابة النظام تساوي حاصل ضرب DTFT للإثارة والاستجابة الترددية للنظام، والتي هي DTFT لاستجابة الصدمة لهذا النظام كما في شكل (٧.١٥).

انعكاسات ذلك على التوصيلات المتوالية للأنظمة ستكون كما هي وكما هو مبين في شكل (٧.١٦). إذا كانت الإثارة جيبية وعلى الصورة $x[n]=A\cos(2\pi n/N_0+\theta)$ فإنه يمكن كتابة :

$$X(e^{j\Omega}) = \pi A[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)]e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow x[n]*h[n]$

$X(e^{j\Omega}) \rightarrow \boxed{H(e^{j\Omega})} \rightarrow X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$

**شكل رقم (٧.١٥) التكافؤ بين الالتفاف في النطاق الزمني والضرب في النطاق الترددي.**

$X(e^{j\Omega}) \rightarrow \boxed{H_1(e^{j\Omega})} \rightarrow X(e^{j\Omega})H_1(e^{j\Omega}) \rightarrow \boxed{H_2(e^{j\Omega})} \rightarrow Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H_1(e^{j\Omega})H_2(e^{j\Omega})$

$X(e^{j\Omega}) \rightarrow \boxed{H_1(e^{j\Omega})H_2(e^{j\Omega})} \rightarrow Y(e^{j\Omega})$

**شكل رقم (٧.١٦) التوصيل المتوالي للأنظمة**

حيث $\Omega_0=2\pi/N_0$. وبالتالي يمكننا كتابة ما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})x\,\pi A[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة ، وخاصية الدورية للـ DTFT ، وخاصية الترافق للـ CTFT يمكن كتابة ما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi A[H(e^{j\Omega_0})\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+H(e^{-j\Omega_0})\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi A\left\{\begin{matrix} Re\left(H(e^{j\Omega_0})\right)[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)] \\ +jIm\left(H(e^{j\Omega_0})\right)[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)-\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]\end{matrix}\right\}e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

$$y[n] = A\left[Re\left(H(e^{j\Omega_0})\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{N_0}+\theta\right)-Im\left(H(e^{j\Omega_0})\right)sin\left(\frac{2\pi n}{N_0}+\theta\right)\right]$$

$$y[n] = A|H(e^{j2\pi/N_0})|\cos\left(\frac{2\pi n}{N_0}+\theta+\measuredangle H(e^{j2\pi/N_0})\right)$$

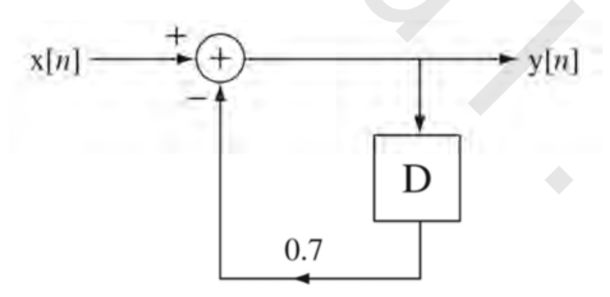
**مثال ٧.٥**

**الاستجابة الترددية لأي نظام**

ارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الموضح في شكل (٧.١٧). إذا تمت إثارة النظام بالإشارة $x[n]=\sin(\Omega_0 n)$ ، فأوجد وارسم استجابة النظام y[n] عندما $\Omega_0=\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

المعادلة الفرقية التي تصف النظام هي: $y[n]+0.7y[n-1]=x[n]$ واستجابة الصدمة للنظام ستكون $h[n]=(-0.7)^n u[n]$. الاستجابة الترددية هي تحويل فورير لاستجابة الصدمة. لذلك يمكننا استخدام زوج التحويل DTFT التالي :

$$\alpha^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$




**شكل رقم (٧.١٧) نظام متقطع زمنياً**

للحصول على :

$$h[n] = (-0.7)^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1+0.7e^{-j\Omega}}$$

حيث إن الاستجابة الترددية تكون دورية في Ω بدورة مقدارها 2π ، فإن المدى $-\pi\le\Omega<\pi$ سيبين كل سلوك الاستجابة الترددية. عندما Ω=0 فإن الاستجابة الترددية ستكون $H(e^{j0}) = 0.5882$. وعندما $\Omega=\pm\pi$ فإن الاستجابة الترددية ستكون $H(e^{\pm j\pi}) = 3.333$. وعندما $\Omega=\Omega_0$ فإن الاستجابة ستكون :

$$y[n] = \left|H(e^{j\Omega_0})\right| \sin\left(\Omega_0 n + \measuredangle H(e^{j\Omega_0})\right)$$

انظر شكل (٧.١٨).

**مثال ٧.٦**

احسب طاقة الإشارة للإشارة التالية : x[n]=(1/5)sinc(n/100).

طاقة الإشارة لأي إشارة تعرف كما يلي :

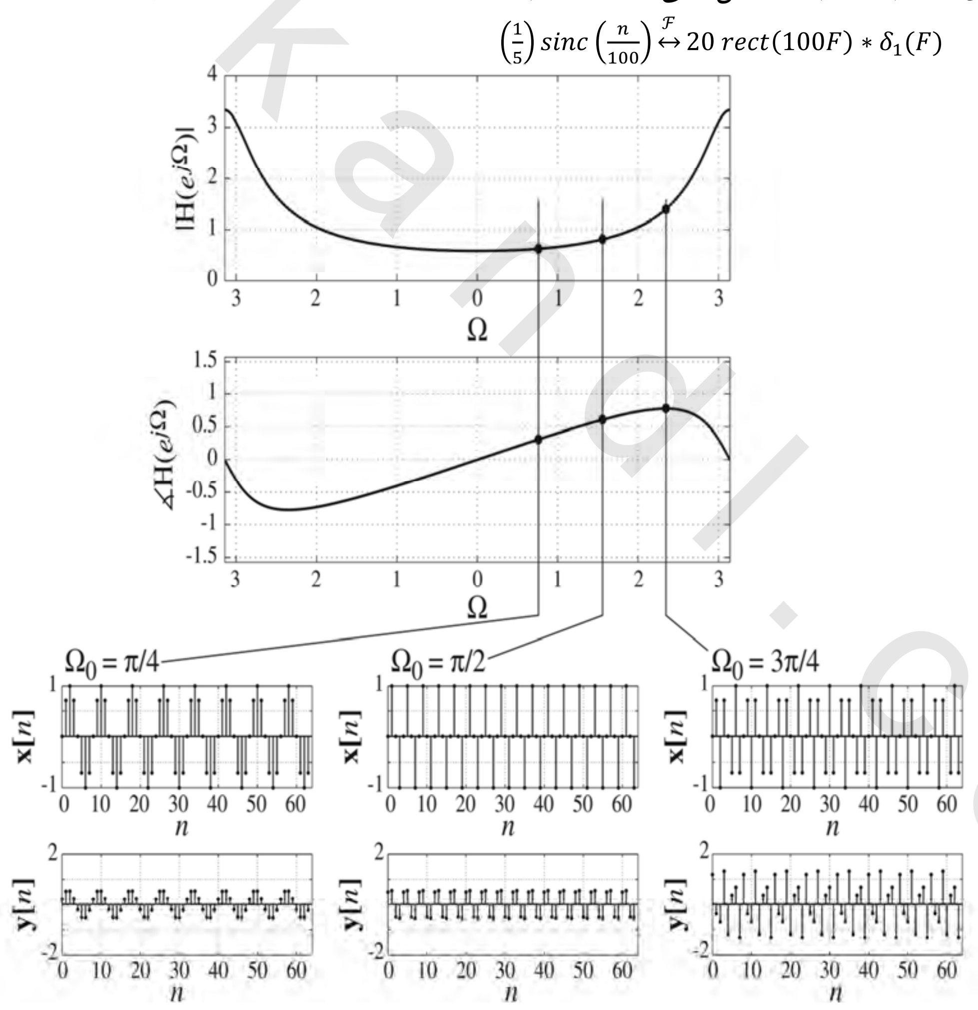
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

ولكن يمكننا تجنب إجراء المجموع غير المحدود المعقد عن طريق استخدام نظرية بارسيفال. يمكن حساب الـ DTFT للإشارة x[n] عن طريق البدأ بزوج تحويل فورير التالي :

$$sinc\left(\frac{n}{w}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} wrect(wF) * \delta_1(F)$$

وتطبيق خاصية الخطية لنحصل على المعادلة التالية :

$$\left(\frac{1}{5}\right) sinc\left(\frac{n}{100}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 20\, rect(100F) * \delta_1(F)$$




**شكل رقم (٧.١٨) الاستجابة الترددية وثلاث إشارات جيبية والاستجابة لهم**

**مثال ٧.٦**

**طاقة الإشارة لإشارة السنك sinc**

تقول نظرية بارسيفال ما يلي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{1} |X(F)|^2 \, dF$$

وبالتالي ستكون طاقة الإشارة كما يلي :

$$E_x = \int_{1} |20rect(100F) * \delta_1|^2 \, dF = \int_{-\infty}^{\infty} |20rect(100F)|^2 \, dF$$

أو :

$$E_x = 400 \int_{-1/200}^{1/200} dF = 4$$

**مثال ٧.٧**

**تحويل DTFT العكسي للمستطيل المتكرر دوريا**

أوجد DTFT العكسي لـ $X(F)=rect(wF)*\delta_1(F)$ ، حيث w>1 باستخدام تعريف DTFT.

$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi Fn} \, dF = \int_{1} rect(\mathrm{w}F) * \delta_1(F)e^{j2\pi Fn} \, dF$$

حيث إنه يمكننا اختيار إجراء التكامل على أي فترة في F يكون عرضها واحداً ، ودعنا نختار الأسهل :

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} rect(\mathrm{w}F) * \delta_1(F)e^{j2\pi Fn} \, dF$$

في هذه الفترة التكاملية ، يوجد هناك مستطيل واحد بعرض مقداره 1/w (لأن w>1) وبالتالي :

$$x[n] = \int_{-1/2\mathrm{w}}^{1/2\mathrm{w}} e^{j2\pi Fn} \, dF = 2\int_{0}^{1/2\mathrm{w}} \cos(2\pi Fn) \, dF = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{\mathrm{w}}\right)}{\pi n} = \frac{1}{\mathrm{w}} sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right)$$ المعادلة رقم (٧.٢١)

من هذه النتيجة يمكننا الحصول زوج DTFT الكثيرة الاستخدام (والتي تظهر في جدول أزواج DTFT) التالية :

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\, rect(\mathrm{w}\omega F) * \delta_1(F), \quad \mathrm{w} > 1$$

أيضاً :

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{w} \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\big(\mathrm{w}(F-k)\big), \quad \mathrm{w} > 1$$

أو في شكل التقدير الزاوي ، وباستخدام خاصية الالتفاف يمكن كتابة :

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow y(at) = |a|x(at) * h(at)$$

وبذلك نحصل على :

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\, rect\left(\frac{\mathrm{w}\Omega}{2\pi}\right) * \delta_{2\pi}(\Omega), \quad \mathrm{w} > 1$$

وأيضاً:

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\mathrm{w}\sum_{k=-\infty}^{\infty}rect\left(\frac{\mathrm{w}(\Omega-2\pi k)}{2\pi}\right),\quad \mathrm{w}>1$$

(على الرغم من أن هذه الأزواج لتحويل فورير تم استنتاجها بفرض أن w>1 لجعل التكامل الانعكاسي في المعادلة (٧.٢١) أبسط، إلا أنها تكون صحيحة أيضاً عندما w≤1).

## الحساب العددي لتحويل فورير في الزمن المتقطع

تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT تم تعريفه بالمعادلة $X(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j2\pi Fn}$، وتم تعريف تحويل فورير المتقطع DFT بالمعادلة $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$. إذا كانت الإشارة x[n] سببية ومحددة زمنياً، فإن المجموع في ال DTFT يكون على مدى محدود من قيم n بدءا من n=0. يمكننا وضع قيمة N عن طريق جعل N-1 تكون آخر قيمة ل n تغطي هذا المدى المحدود. وبالتالي فإن:

$$X(F)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

إذا جعلنا الآن التغير في المتغير F→k/N فإنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$X_{F\to k/N}=X\left(\frac{k}{N}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}=X[k]$$

أو بالتقدير الزاوي ستكون على الصورة:

$$X(e^{j\Omega})_{\Omega\to 2\pi k/N}=X\left(e^{j2\pi k/N}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}=X[k]$$

وعلى ذلك فإن الـ DTFT للإشارة x[n] يمكن حسابه من الـ DFT للإشارة x[n] عند مجموعة من الترددات المتقطعة F=k/N، أو بالتوازي Ω=2πk/N، حيث K أي قيمة ثابتة. إذا أردنا زيادة التحديدية لهذه الترددات المتقطعة، فإنه يمكننا أن نجعل N أكبر. القيم الإضافية ل x[n] المقابلة للقيمة المزادة من N ستكون أصفاراً كلها. هذه الطريقة لزيادة تحديدية النطاق الترددي تسمى الإلحاق بالأصفار.

DTFT العكسي يتم تعريفه بالمعادلة التالية:

$$x[n]=\int_{1}X(F)e^{j2\pi Fn}dF$$

وأما DFT العكسي فيعرف بالمعادلة التالية:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi Fn}$$

يمكن تقريب DTFT العكسي بمجموع N من التكاملات التي مع بعضها تقارب تكامل DTFT العكسي.

$$x[n] \cong \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k/N}^{(k+1)/N} X[k/N] e^{j2\pi Fn} dF = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{k}{N}\right) \int_{k/N}^{(k+1)/N} e^{j2\pi Fn}\, dF$$

$$X[n] \cong \sum_{k=0}^{N-1} X(\mathrm{k/N}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\mathrm{k}+1)\mathrm{n/N}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{k/N}}}{j2\pi n} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{k/N}} - 1}{j2\pi n} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{X(k/N)e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{kn/N}}$$

$$X[n] \cong \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\mathrm{k/N}} \frac{\mathrm{j2sin}(\pi\mathrm{n/N})}{j2\pi n} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{X(k/N)e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{kn/N}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\mathrm{k/N}} sinc(\pi/\mathrm{N}) \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{X(k/N)e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{kn/N}}$$

لقيم $n << N$ فإن :

$$x[n] \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{k}{N}\right) e^{j2\pi kn/N}$$

أو في التردد الزاوي كالتالي :

$$x[n] \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left( e^{j2\pi kn/N}\right) e^{j2\pi kn/N}$$

وهذا يمثل DFT العكسي مع :

$$X[k] = X(e^{j\Omega})_{\Omega \to 2\pi k/N} = X\left( e^{j2\pi k/N} \right) \quad \text{أو} \quad X[k] = X(F)_{F \to k/N} = X\left(\frac{k}{N}\right)$$

**مثال ٧.٨**

**DTFT العكسي باستخدام DFT**

احسب DTFT العكسي التقريبي للمعادلة :

$$X(F) = \left[rect\left(50\left(F - \frac{1}{4}\right)\right) + rect\left(50\left(F + \frac{1}{4}\right)\right)\right] * \delta_1(F)$$

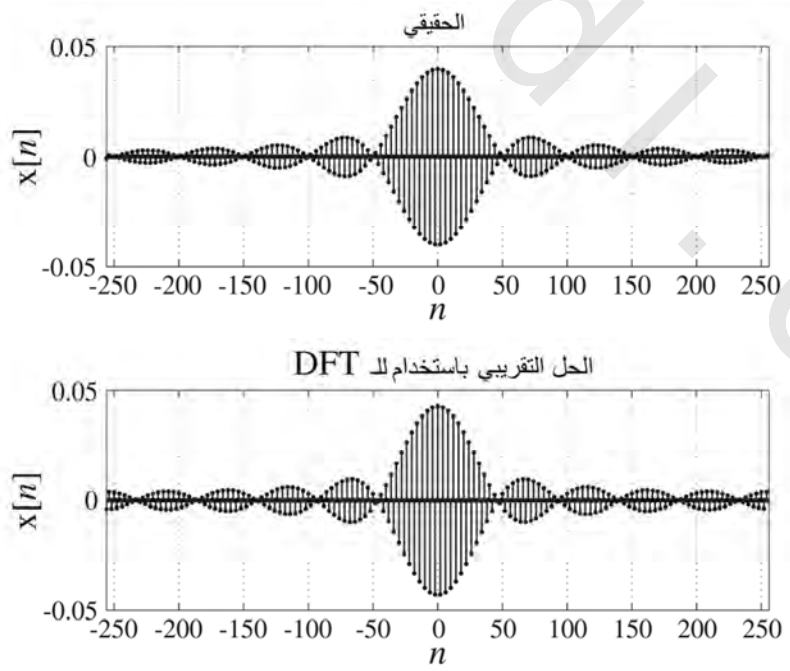
باستخدام DFT.

```
N = 512 ; % عدد النقاط التي ستقارب X(F)
k = [0:N-1]' ; % الأرقام التوافقية
% حساب العينات من
% X(F)
% بين الصفر والواحد بافتراض التكرار الدوري بدورة مقدارها ١
X = rect(50*(k/N - 1/4)) + rect(50*(k/N - 3/4)) ;
% حساب تحويل فورير في الزمن المتقطع العكسي التقريبي
% ومركز الدالة عند n=0
xa = real(fftshift(ifft(X))) ;
n = [-N/2:N/2-1]' ; % متجه الأزمنة المتقطعة للرسم
```

```
% حساب إشارة الدخل من تحويل فورير العكسي في الأزمنة المتقطعة
xe = sinc(n/50).*cos(pi*n/2)/25 ;
% رسم تحويل فورير العكسي في الأزمنة المتقطعة
subplot(2,1,1) ; p = stem(n,xe,'k','fi lled') ; set(p,'LineWidth',1,
'MarkerSize',2) ;
axis([-N/2,N/2,-0.05,0.05]) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Exact','FontName','Times','FontSize',24) ;
% رسم تحويل فورير العكسي التقريبي في الأزمنة المتقطعة
subplot(2,1,2) ; p = stem(n,xa,'k','fi lled') ; set(p,'LineWidth',1,
'MarkerSize',2) ;
axis([-N/2,N/2,-0.05,0.05]) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Approximation Using the DFT','FontName','Times','FontSize',
24) ;
```

نتائج تحويل فورير العكسي الكامل والتقريبي في الأزمنة المتقطعة موضحة في شكل (٧.١٩). لاحظ أن من x[n] الحقيقية والتقريبية يكونان منطبقين عمليا بالقرب من n=0 ولكنهما يختلفان بالقرب من n=±256. يحدث ذلك نتيجة أن النتائج التقريبية تكون دورية ويتسبب التعدي المتكرر دورياً للدالة سنك في هذه الأخطاء بالقرب من موجب أو سالب نصف الدورة.


يوضح مثال ٧.٩ مشكلة تحليلية شائعة ونوعاً مختلفاً من الحلول.




**شكل رقم (٧.١٩) تحويل فورير العكسي في الزمن المتقطع DTFT الحقيقي والتقريبي للدالة X(F)**

**مثال ٧.٩**

**استجابة النظام باستخدام DTFT و DFT**

نظام له الاستجابة الترددية التالية: $H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.7}$ وتمت إثارته بالإشارة التالية: x[n]=tri((n-8)/8). احسب استجابة النظام.

الـ DTFT للإثارة هي: $X(e^{j\Omega}) = 8drcl^2\left(\frac{\Omega}{2\pi},8\right)e^{-j8\Omega}$. وعلى ذلك فإن الـ DTFT للاستجابة ستكون:

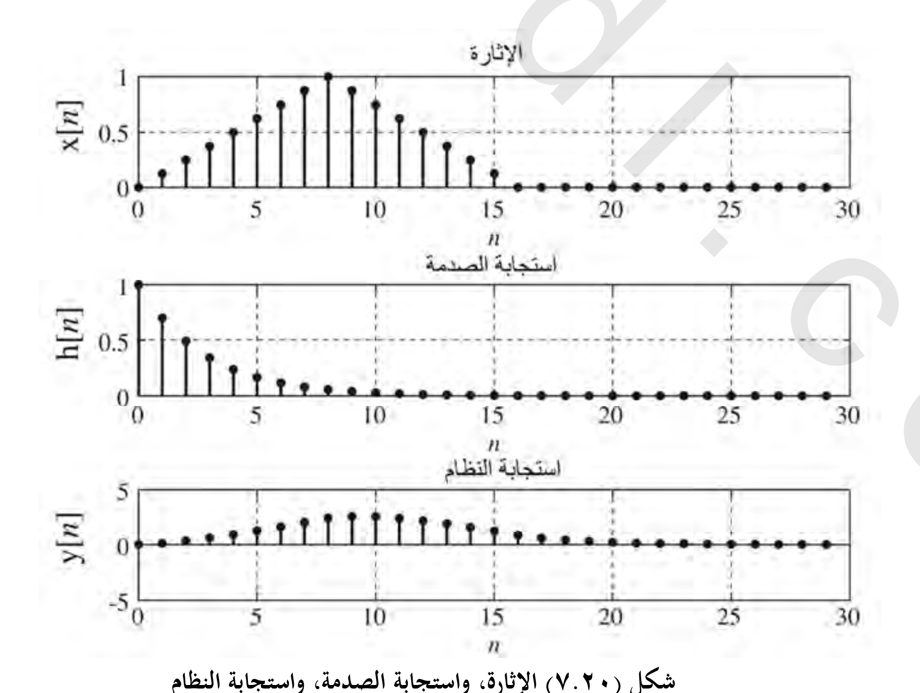
$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.7}\, x\, 8drcl^2\left(\frac{\Omega}{2\pi},8\right)e^{-j8\Omega}$$

ونحن هنا نواجه مشكلة. كيف سنحسب ال DTFT العكسي لـ $Y(e^{j\Omega})$ ؟ للحصول على حل تحليلي قد يكون من الأسهل في هذه الحالة أن نجري الالتفاف في النطاق الزمني عن استخدام التحويل بهذه الطريقة. ولكن هناك طريقة أخرى. من الممكن استخدام DFT العكسي للحصول على تقريب للـ DTFT العكسي لـ $Y(e^{j\Omega})$ عدديا.

عند حساب DFT العكسي، فإن عدد قيم y[n] سيكون هو نفسه عدد قيم $Y(e^{j2\pi k/N})$ المستخدم وهو N. لجعل هذا التقريب جيدا فإننا نحتاج أن تكون قيمة N كبيرة بما فيه الكفاية لتغطي المدى الزمني الذي نتوقع أن تكون فيه قيم y[n] مختلفة عن الصفر. الدالة المثلثة لها عرض قاعدة مقداره 16 واستجابة الصدمة للنظام هي $(0.7)^n u[n]$. إن هذه تمثل دالة أسية متناقصة، تقترب، ولكنها لا تصل أبدا، إلى الصفر. إذا استخدمنا العرض الذي تصل إليه القيم حتى ٪1 من قيمتها الابتدائية، فإننا سنحصل على عرض مقداره حوالي 13. حيث إن الالتفاف سيكون مجموع هذين العرضين ناقص واحد، والذي سيحتاج أن تكون N تساوي 28 على الأقل. تذكر أيضاً أن التقريب يعتمد على العلاقة n<<N للحصول على تقريب جيد. ولذلك دعنا نستخدم N=128 في إجراء الحسابات، وبعد ذلك نستخدم منها فقط أول 30 قيمة. برنامج ماتلاب التالي يحسب هذا DTFT العكسي. وبعد ذلك شكل (٧.٢٠) يوضح ثلاثة الأشكال الناتجة من هذا البرنامج.

```
% برنامج لحساب تحويل فورير العكسي في الزمن المتقطع باستخدام معكوس DFT
N = 128 ; % عدد النقاط المستخدمة
k = [0:N-1]' ; % متجه الأرقام التوافقية
n = k ; % متجه الأزمنة المتقطعة
x = tri((n-8)/8) ; % متجه قيم إشارة الإثارة
% حساب تحويل فورير في الزمن المتقطع للإثارة
X = 8*drcl(k/N,8).^2.*exp(-j*16*pi*k/N) ;
% حساب الاستجابة الترددية للنظام
H = exp(j*2*pi*k/N)./(exp(j*2*pi*k/N) - 0.7) ;
```

```
h = 0.7.^n.*uD(n) ; % متجه استجابة الصدمة
Y = H.*X ; % حساب تحويل فورير في الزمن المتقطع للاستجابة
y = real(ifft(Y)) ; n = k ; % متجه قيم استجابة النظام
% رسم الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام
n = n(1:30) ; x = x(1:30) ; h = h(1:30) ; y = y(1:30) ;
subplot(3,1,1) ;
ptr = stem(n,x,'k','filled') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
% xlabel('\itn','FontSize',24,'FontName','Times') ;
ylabel('x[{\itn}]','FontSize',24,'FontName','Times') ;
title('Excitation','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',18,'FontName','Times') ;
subplot(3,1,2) ;
ptr = stem(n,h,'k','filled') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
% xlabel('\itn','FontSize',24,'FontName','Times') ;
ylabel('h[{\itn}]','FontSize',24,'FontName','Times') ;
title('Impulse Response','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',18,'FontName','Times') ;
subplot(3,1,3) ;
ptr = stem(n,y,'k','filled') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
xlabel('\itn','FontSize',24,'FontName','Times') ;
ylabel('y[{\itn}]','FontSize',24,'FontName','Times') ;
title('System Response','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',18,'FontName','Times') ;
```




**شكل (٧.٢٠) الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام**

**مثال ٧.١٠**

**استخدام ال DFT لحساب استجابة النظام**

مجموعة من العينات التالية :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x[n] | -9 | -8 | 6 | 4 | -4 | 9 | -9 | -1 | -2 | 5 | 6 |

تم أخذها من تجربة معينة وتمت معالجتها عن طريق مرشح تنعيم استجابة الصدمة له هي : $h[n]=n(0.7)^n u[n]$. أوجد استجابة المرشح y[n].

يمكننا إيجاد DTFT لـ h[n] من الجدول، ولكن x[n] ليست شكلاً معروفاً لدالة من الدوال. لذلك يمكننا حساب تحويل x[n] باستخدام المعادلة المباشرة التالية :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{10} x[n]e^{-j\Omega n}$$

ولكن ذلك يكون مملا ومضيعا للوقت، وبالطبع إذا كان الجزء الذي لا يساوي الصفر في x[n] كبيراً جداً فإن ذلك يصبح غير عملي على الإطلاق. بدلاً من ذلك يمكننا إيجاد الحل عددياً باستخدام العلاقة المستنتجة مسبقاً لإيجاد DTFT باستخدام الـ DFT كما يلي :

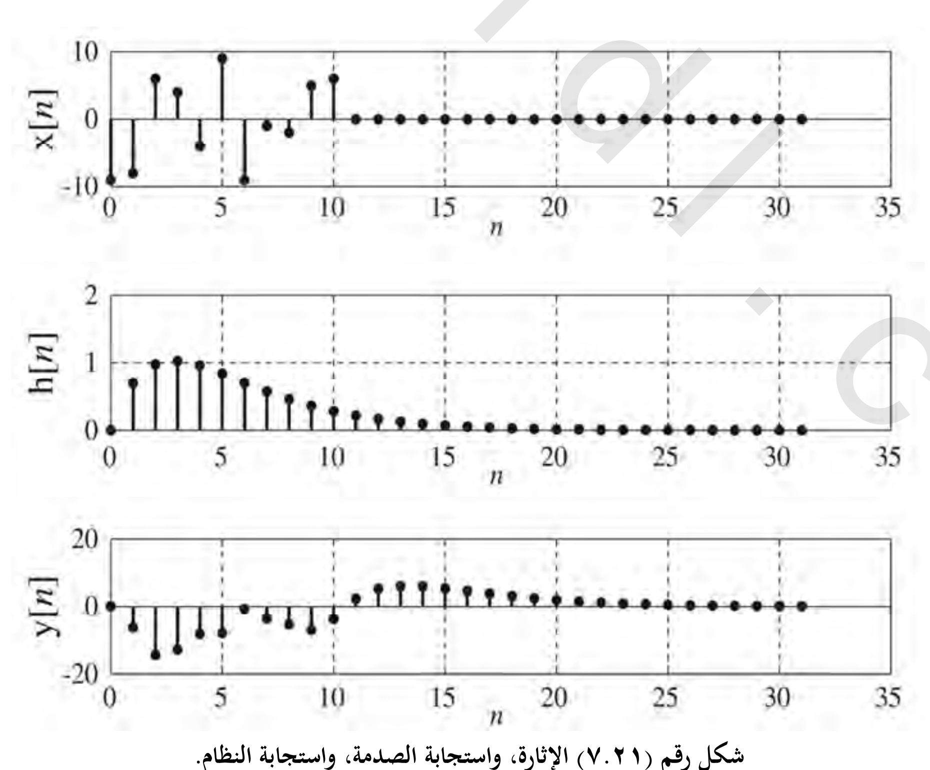
$$X\left(e^{j2\pi k/N}\right) = \sum_{n=0}^{10} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

هذه المشكلة يمكن حلها أيضاً في النطاق الزمني باستخدام الالتفاف العددي، ولكن هناك سببين لتفضيل استخدام DFT. أولاً، إذا عدد النقاط المستخدمة أحد قوي الرقم ٢، فإن خواريزم الـ fft المستخدم لحساب DFT على الحاسب يكون فعالاً جداً وقد يكون له ميزة عظيمة في الحساب في وقت أقصر من طريقة الالتفاف العددي. ثانيا، فإن استخدام طريقة DFT، فإن التحجيم الزمني للإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام ستكون كلها نفس الشيء، وهذا غير حقيقي عند استخدام الالتفاف العددي في النطاق الزمني.

برنامج ماتلاب التالي يحل هذه المشكلة عددياً باستخدام DFT. شكل (٧.٢١) يبين أشكال الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام.

```
% برنامج لحساب استجابة نظام متقطع زمنياً باستخدام DFT
N = 32 ; % استخدام ٣٢ نقطة
n = [0:N-1]' ; % المتجه الزمني
% وضع قيم الإثارة
x = [[-9,-8,6,4,-4,9,-9,-1,-2,5,6],zeros(1,21)]' ;
h = n.*(0.7).^n.*uD(n) ; % حساب استجابة الصدمة
```

```
X = fft(x) ; % حساب تحويل فورير المتقطع للإثارة
H = fft(h) ; % حساب تحويل فورير المتقطع لاستجابة الصدمة
Y = X.*H ; % حساب تحويل فورير لاستجابة النظام
y = real(ifft(Y)) ; % استجابة النظام
% رسم الإثارة، واستجابة الصدمة ، واستجابة النظام
subplot(3,1,1) ;
ptr = stem(n,x,'k','fi lled') ; set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24) ;
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ;
subplot(3,1,2) ;
ptr = stem(n,h,'k','fi lled') ; set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('h[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24) ;
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ;
subplot(3,1,3) ;
ptr = stem(n,y,'k','fi lled') ; set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('y[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24) ;
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ;
```




**شكل رقم (٧.٢١) الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام.**

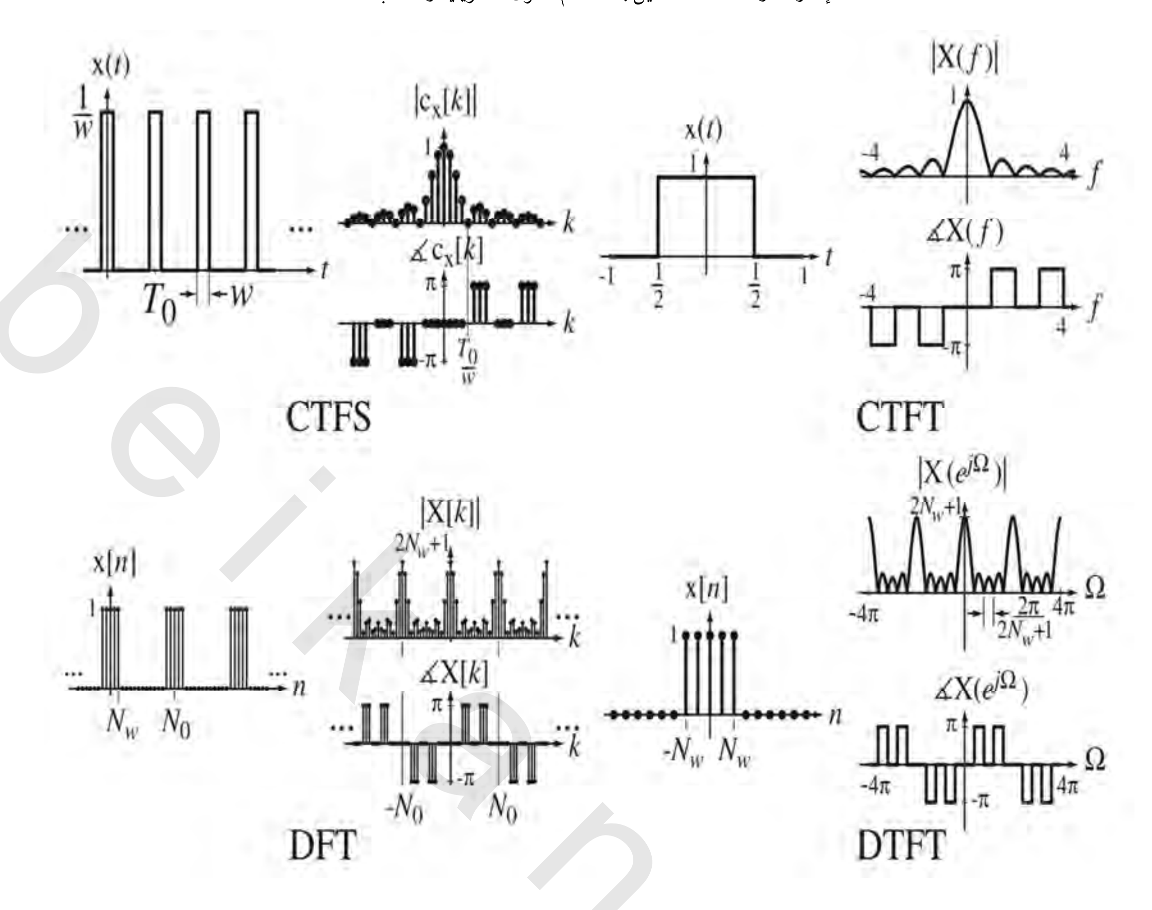
## (٧.٤) مقارنات بين طرق فورير

لقد تم اكتمال طرق تحليل فورير بتقديم طريقة تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT. هذه الطرق الأربعة تكون مصفوفة من الطرق للأربع تشكيلات من الزمن المستمر والزمن المتقطع والتردد المستمر والتردد المتقطع (المعبر عنه بالرقم التوافقي ) كما في شكل (٧.٢٢).

| | تردد مستمر | تردد متقطع |
|---|---|---|
| زمن مستمر | CTFT | CTFS |
| زمن متقطع | DTFT | DFT |

**شكل رقم (٧.٢٢) مصفوفة طرق فورير.**

شكل (٧.٢٣) يبين أربعة مستطيلات أو مستطيلات متكررة دورياً في كل من الزمن المستمر والزمن المتقطع مع تحويل فورير، أو الدوال التوافقية في كل حالة. CTFT لمستطيل واحد مستمر زمنياً يكون عبارة عن دالة سنك وحيدة مستمرة زمنياً. إذا تمت عيننة هذا المستطيل ليعطي مستطيلاً واحداً متقطعاً زمنياً، فإن DTFT له يكون مشابهاً لـ CTFT فيما عدا أنه أصبح متكرراً دورياً. إذا تم تكرار المستطيل دورياً، فإن CTFS له يكون مشابها لـ CTFT فيما عدا أنه أصبح الأن معيناً أو متقطعاً في النطاق الترددي (رقم توافقي). إذا كان المستطيل المستمر زمنياً الأصلي متكرراً دورياً ومتقطعاً زمنياً، فإن DFT له يكون أيضاً متكرراً دورياً ومتقطعاً ترددياً. ولذلك، فعلى العموم، فإن التكرار الدوري في نطاق معين، الزمن أو التردد، يقابله تقطيع، أو عيننة في النطاق الآخر، التردد، أو الزمن، والتقطيع أو العيننة في نطاق معين، الزمن أو التردد، يقابله تكرار ترددي في النطاق الآخر، التردد، أو الزمن. هذه العلاقات ستكون مهمة في الفصل ١٠ عن التقطيع الزمني، أو العيننة.




**شكل رقم (٧.٢٣) مقارنة لتحويل فورير لأربع إشارات ذات علاقة.**

## (٧.٥) ملخص النقاط المهمة

١- أي إشارة متقطعة زمنياً ذات أهمية هندسية يمكن التعبير عنها بتتابع فورير في الزمن المتقطع، أو تحويل فورير العكسي المتقطع DFT، وعدد التوافقات المطلوبة في هذا التعبير هو نفسه مثل الدورة الأساسية في التعبير.

٢- الدوال الجيبية المستخدمة في DFT تكون مجموعة من دوال الأساس المتعامدة.

٣- تحويل فورير السريع FFT هو خواريزم على الحاسب لحساب الـ DFT إذا كان زمن التعبير قوة صحيحة للرقم ٢.

٤- يمكن امتداد DFT إلى تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT للإشارات غير الدورية عن طريق جعل زمن التعبير يقترب من الما لانهاية.

٥- عن طريق السماح بالصدمات في التحويلات، يمكن تعميم DTFT ليمكن تطبيقه على بعض الإشارات المهمة.

٦- DFT وDFT العكسي يمكن استخدامهما للتقريب العددي للـ DTFT و DTFT العكسي تحت شروط معينة.

٧- باستخدام جدول لأزواج تحويل فورير في الزمن المتقطع وخواصها، فإن التحويلات الأمامية والعكسية لكل الإشارات المهمة هندسيا يمكن حسابها.

٨- CTFS، و CTFT، و DFT، و DTFT كلها ذات علاقات متقاربة في طرق التحليل للإشارات الدورية، أو غير دورية، المستمرة أو المتقطعة زمنياً.

**تمارين مع إجاباتها**

(في كل تمرين، تم ترتيب الإجابات بطريقة عشوائية)

**التعامد**

١- بدون استخدام الآلة الحاسبة، أو الحاسب، احسب الضرب القياسي لما يأتي:

(أ) $W_1$ و $w_{-1}$

(ب) $w_1$ و $w_{-2}$

(ج) $w_{11}$ و $w_{37}$

حيث:

$$W_N = e^{j2\pi/N} \quad \text{و} \quad w_k = \begin{bmatrix} W_4^0 \\ W_4^k \\ W_4^{2k} \\ W_4^{3k} \end{bmatrix}$$

لتبين أنها كلها متعامدة.

**الإجابة:** كل الضرب القياسي يساوي صفراً.

٢- أوجد الإسقاط p للمتجه $x = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$ في اتجاه المتجه $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$؟

**الإجابة:** $18 \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

٣- أوجد الإسقاط p للمتجه $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ في اتجاه المتجه $y = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix}$. بعد ذلك احسب DFT للمتجه x وقارن هذه النتيجة مع X[3]y/4؟

**الإجابة :** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} - j2 \\ 2 + \frac{j}{4} \\ -\frac{1}{4} + j2 \\ -2 - j/4 \end{bmatrix}$ ، كلها الشيء نفسه.

**تحويل فورير المتقطع**

٤- باستخدام معادلة التجميع المباشر احسب دالة DFT التوافقية لـ $\delta_{10}[n]$ ، حيث N=10 وقارن ذلك مع DFT الموجود في الجدول؟

٥- بدون استخدام الحاسب ، احسب DFT الأمامي لتتابع البيانات التالي. بعد ذلك احسب ال DFT العكسي لهذا التتابع وتحقق من أنك قد حصلت على التتابع نفسه؟

$$x[n]_{n=0\to3} = \{3, 4, 1, -2\}$$

**الإجابة :** $X[k]_{k=0\to3} = \{6, 2-j6, 2, 2+j6\}$

٦- احسب دالة ال DFT التوافقية للإشارة x[n] التي دورتها ٤ والتي لها x[0]=3 و x[1]=1 و x[2]=-5 و x[3]=0 باستخدام ضرب المصفوفات $X=W^H x$؟

**الإجابة :** $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 8-j \\ -3 \\ 8+j \end{bmatrix}$

٧- لكل واحدة من الإشارات التالية احسب دالة ال DFT التوافقية على مدى دورة أساسية واحدة وبين أن $X[N_0/2]$ حقيقية :

(أ) $x[n]=(u[n+2]-u[n-3])*\delta_{12}[n]$

(ب) $x[n]=(u[n+3]-u[n-2])*\delta_{12}[n]$

(ج) $x[n]=\cos(14\pi n/16)\cos(2\pi n/16)$

(د) $x[n]=\cos(12\pi n/14)\cos(2\pi(n-3)/14)$

**الإجابة:**

$$2(2\delta_8[k-4] + \delta_8[k-3] + \delta_8[k+3]),\ 5drcl(k/12.5)e^{j\pi k/6},$$
$$(49/14)(\delta_{14}[k-7] + \delta_{14}[k-5] + \delta_{14}[k+5] + \delta_{14}[k+7])e^{j3\pi k/7}, 5drcl(k/12.5)$$

**تعريف تحويل فورير في الزمن المتقطع**

٨- من تعريف المجموع ، احسب DTFT للدالة :

$$x[n]=10(u[n+4]-u[n-5])$$

وقارن مع جدول الـ DTFT.

٩- من التعريف ، استنتج تعريفاً عاماً للشكل Ω لـ DTFT للدوال التي على الصورة :

$$x[n] = \alpha^n \sin(\Omega_0 n)\, u[n], \quad |\alpha| < 1$$ ؟

وقارن مع جدول الـ DTFT.

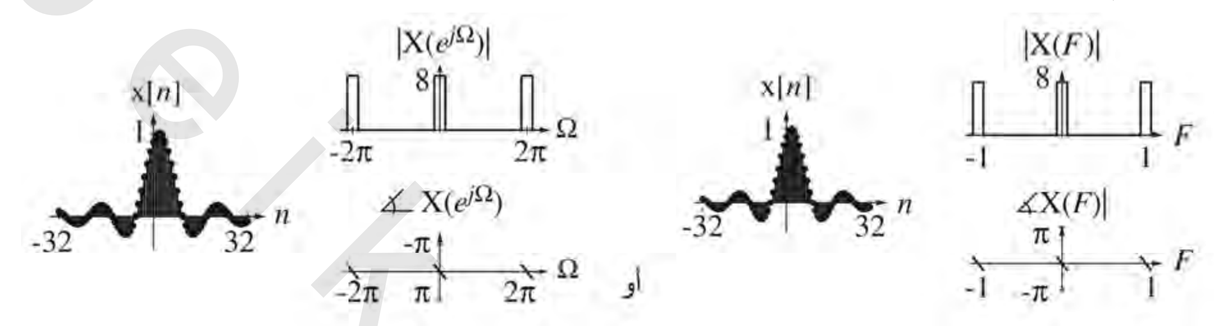
## تحويل فورير في الزمن المتقطع الأمامي والعكسي

١٠- إشارة محددة بالمعادلة التالية :

$x[n]=sinc(n/8)$

ارسم مقدار وزاوية DTFT للإشارة $x[n-2]$.

**الإجابة :**



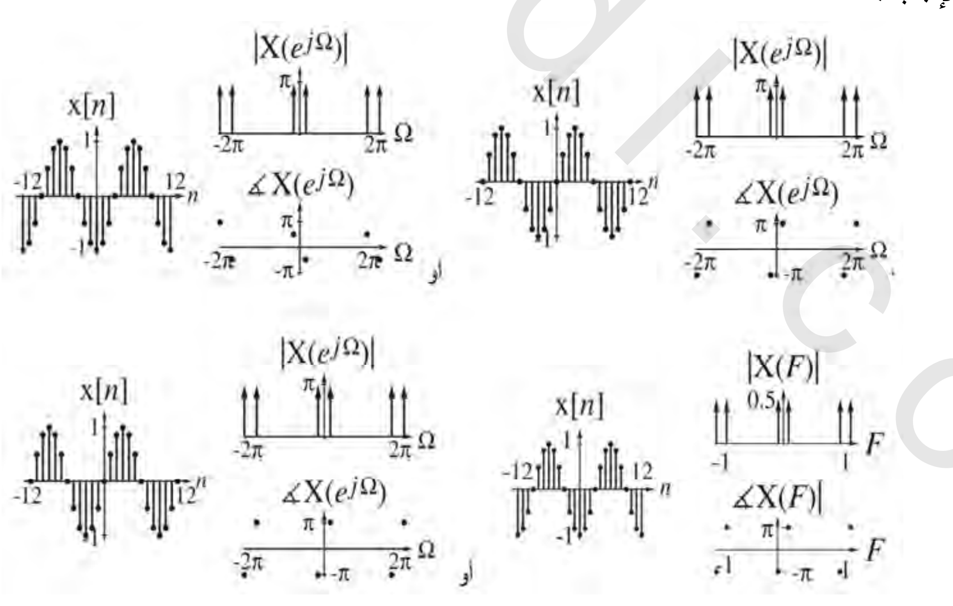

**شكل رقم (ج.ت-١٠)**

١١- إشارة معرفة بالمعادلة التالية :

$x[n]=\sin(\pi n/6)$

ارسم مقدار وزاوية الـ DTFT لـ $x[n-3]$ و $x[n+12]$.

**الإجابة :**



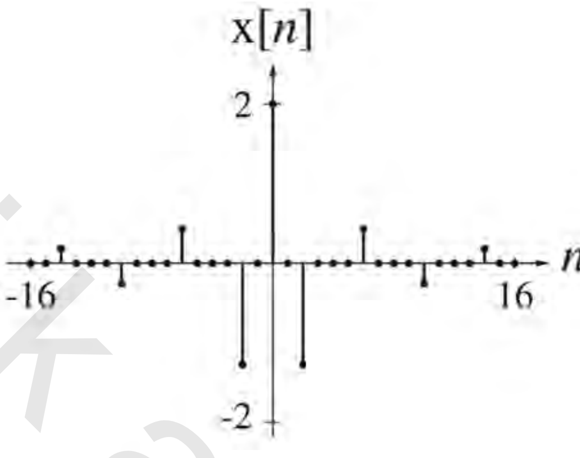

**شكل رقم (ج.ت-١١)**

١٢- الـ DTFT لإشارة معينة معرف كما يلي:

$$X(e^{j\Omega}) = 4\left[rect\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)\right) + rect\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] * \delta_{2\pi}(\Omega)$$

ارسم x[n].

**الإجابة:**



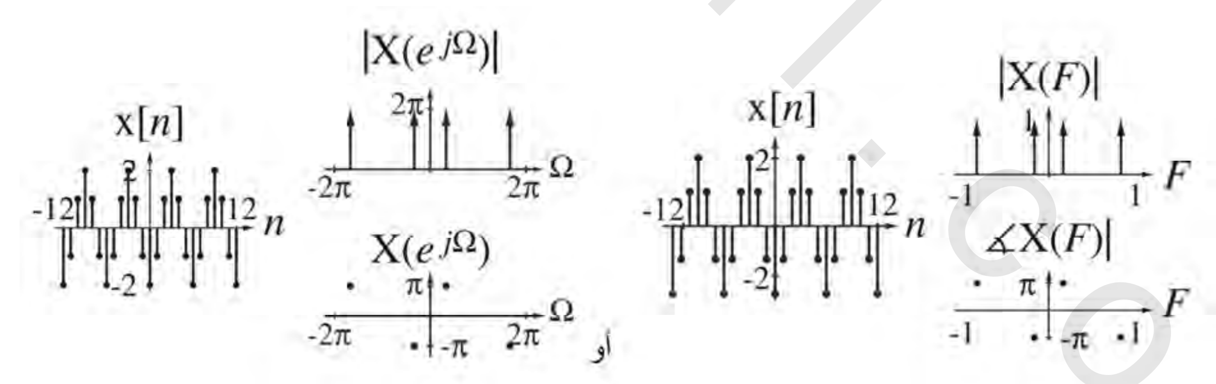

**شكل رقم (ج.ت١٢)**

١٣- ارسم مقدار وزاوية DTFT للإشارة التالية:

$$x[n] = (u[n+4] - u[n-5]) * \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right)$$

ثم ارسم x[n].

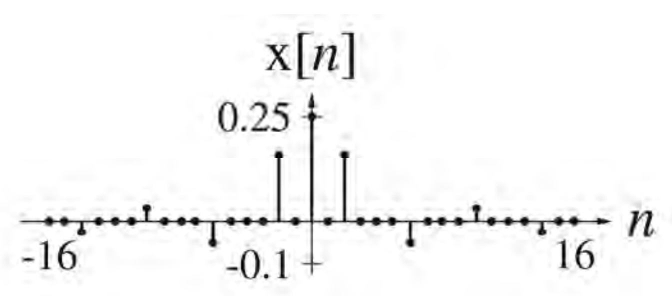
**الإجابة:**




**شكل رقم (ج.ت-١٣)**

١٤- ارسم DTFT العكسي للدالة $X(F) = \left(\frac{1}{2}\right)[rect(4F) * \delta_1(F)] \otimes \delta_{1/2}(F)$؟

**الإجابة:**




**شكل رقم (ج.ت-١٤)**

١٥- احسب القيم العددية للثوابت في كل مما يأتي:

(أ)

$$A(u[n+W]-u[n-W-1])e^{jB\pi n} \leftrightarrow 10\frac{\sin(5\pi(F+1))}{\sin(\pi(F+1))}$$

أوجد A و W و B.

(ب) $2\delta_{15}[n-3](u[n+3]-u[n-4]) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Ae^{jB\Omega}$ أوجد A و B.

(ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n+2] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{Ae^{jB\Omega}}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$ أوجد A و B و α.

(د) $4sinc\left(\frac{n}{10}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\, rect(BF) * \delta_1(F)$ احسب A و B

**الإجابة:** 2, -2, -3, 10, 2/3, 2, 4, 40, 10, 9/4

١٦- أوجد القيم العددية للدوال التالية:

(أ) $x[n] = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n], \quad X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi}$

(ب) $x[n] = 2(u[n+1]-u[n-6]), \quad X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi/4}$

(ج) $X(F) = [rect(10F) * \delta_1(F)] \otimes \left(\frac{1}{2}\right)\left[\delta_1\left(F-\frac{1}{4}\right)+\delta_1\left(F+\frac{1}{4}\right)\right]$ $x[2]$

**الإجابة:** -0.09355, 2.4, -j2

١٧- باستخدام خاصية الفرق للـ DTFT وزوج التحويل التالي:

$$\text{Tri}(n/2) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1+\cos(2\pi F)$$

احسب DTFT للدالة $(1/2)(\delta[n+1]+\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2])$.قارنها مع تحويل فورير من الجدول؟

١٨- باستخدام نظرية بارسيفال، احسب طاقة الإشارة التالية:

$x[n]=sinc(n/10)\sin(2\pi n/4)$ ؟

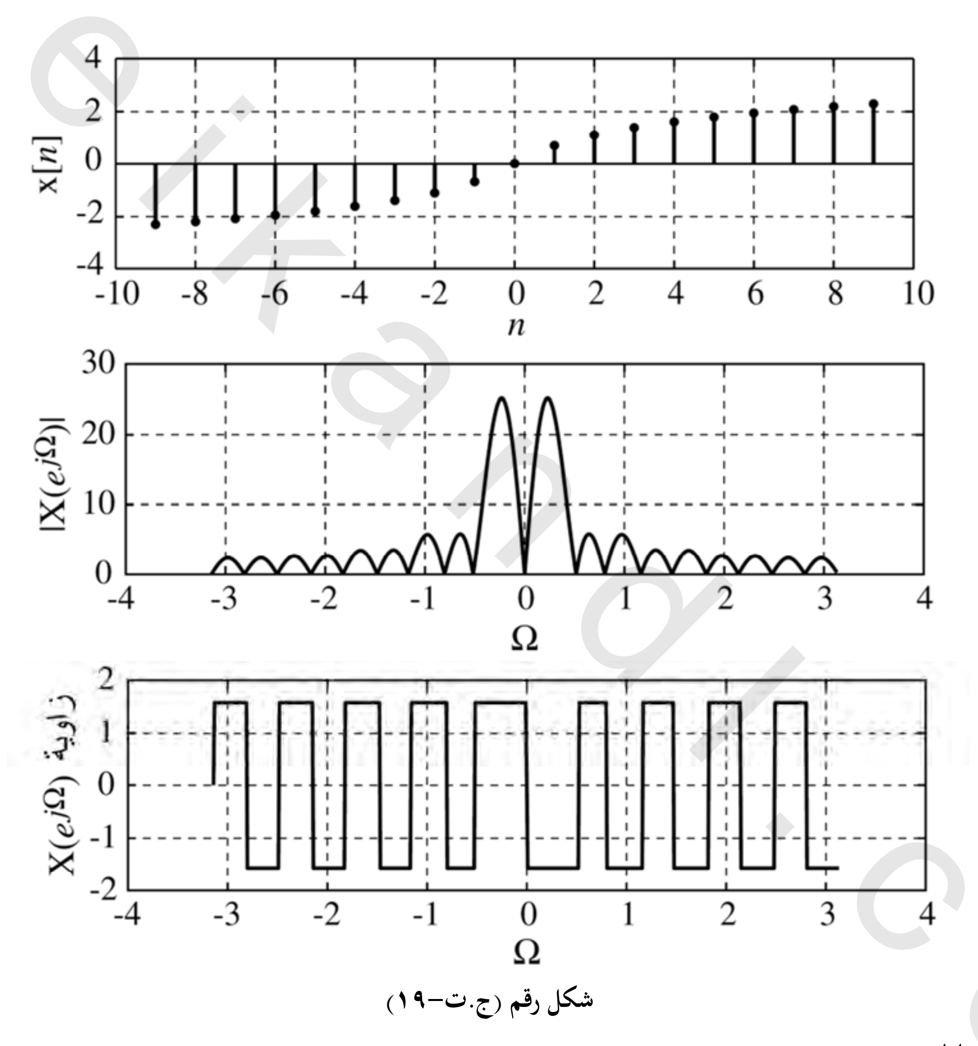
**الإجابة:** 5

١٩- إشارة موصوفة بالمعادلة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} \ln(n+1), & 0 \le n < 10 \\ -lin(-n+1), & -10 < n < 0 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ارسم مقدار وزاوية DTFT لهذه الدالة على المدى π>Ω≥π-؟

**الإجابة:**




**شكل رقم (ج.ت-١٩)**

**تمارين بدون إجابات**

**تحويل فورير المتقطع**

٢٠- افترض زوج التحويل التالي: $(u[n]-u[n-5]) * \delta_8[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{8}{\longleftrightarrow}} 5e^{-j\pi k/2} drcl\left(\frac{k}{8,5}\right)$ أوجد دالة DFT التوافقية للإشارة نفسها ولكن باستخدام 16 نقطة بدلاً من 8. بعد ذلك اكتب DFT العكسي في صورة

مجموع، وباستخدام ماتلاب، ونفذ المجموع الحقيقي وارسم النتيجة لتبين أن التغير في خاصية الدورة تكون صحيحة؟

٢١- دالة x[n] متقطعة زمنياً ودورية بدورة مقدارها 8. دورة من دالة DFT التوافقية لها هي :

$$\{X[0], \ldots, X[7]\} = \{3, 4+j5, -4-j3, 1+j5, -4, 1-j5, -4+j3, 4-j5\}$$

(أ) ما هي القيمة المتوسطة لـ x[n] ؟

(ب) ماهي طاقة الإشارة لـ x[n] ؟

(ج) هل x[n] زوجية أم فردية أم لا فردية ولا زوجية ؟

٢٢- إذا كانت $x_1[n]=10\cos(2\pi n/8) \leftrightarrow X_1[k]$ و $x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]$، احسب القيم العددية لكل من $x_2[2]$ و $x_2[4]$ و $x_2[8]$ و $x_2[204]$؟

٢٣- إشارة x(t) تمت عينتها ٤ مرات وكانت العينات كالتالي {x[0], x[1], x[2], x[3]}. دالة ال DFT التوافقية هي {X[0], X[1], X[2], X[3]} و X[3] يمكن كتابتها كالتالي :

X[3]=ax[0]+bx[1]+cx[2]+dx[3]

أوجد قيم كل من a و b و c و d ؟

## تحويل فورير العكسي المتقطع الأمامي والعكسي

٢٤- احسب DTFT لكل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

(ب) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-2]$

(ج) $x[n] = sinc\left(\frac{2\pi n}{8}\right) * sinc\left(\frac{2\pi(n-4)}{8}\right)$

(د) $x[n] = sinc^2\left(\frac{2\pi n}{8}\right)$

٢٥- ارسم DTFT العكسي لكل من الدوال التالية :

(أ) $X(F) = \delta_1(F) - \delta_1\left(F - \frac{1}{2}\right)$

(ب) $X(e^{j\Omega}) = j2\pi\left[\delta_{2\pi}\left(\Omega + \frac{\pi}{4}\right) - \delta_{2\pi}\left(\Omega - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

(ج) $X(e^{j\Omega}) = 2\pi\left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{8}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{5\pi}{8}\right)\right] * \delta_{2\pi}(2\Omega)$؟

٢٦- الإشارة x[n] لها DTFT التالي : $X(F)=10\text{sinc}(5F)*\delta_1(F)$، فما هي طاقة هذه الإشارة؟

٢٧- الإشارة x[n] لها DTFT التالي :

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi\left[\delta_{2\pi}\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta_{2\pi}\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) + j\delta_{2\pi}\left(\Omega + \frac{2\pi}{3}\right) - j\delta_{2\pi}\left(\Omega - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

فما هي الدورة الأساسية $N_0$ للإشارة x[n] ؟

٢٨- الـ DTFT للإشارة $x[n]=2\delta[n+3]-3\delta[n-3]$ يمكن التعبير عنه بالصورة $X(F)=A\sin(bF)+Ce^{dF}$. احسب القيم العددية لكل من A و b و C و d؟

٢٩- افترض x[n] أي إشارة، وافترض $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. إذا كانت $Y(e^{j\Omega})=\cos(2\Omega)$، وكانت x[n] تتكون من تماماً من أربع صدمات. ما هي القيمة العددية لهذه الصدمات ومواضعها؟

٣٠- إشارة $x[n]=4\cos(2\pi n/15)+2\cos(2\pi n/9)$ تثير نظاماً استجابته الصدمية هي $h[n]=u[n+N_w]-u[n-N_w-1]$. عندما $N_w=22$ تكون استجابة النظام y[n] تساوي صفراً. استجابة النظام تكون صفراً أيضاً عند بعض القيم العالية للـ $N_w$. أوجد أصغر قيمة عددية صحيحة تالية لـ $N_w$ أكبر من ٢٢ التي تجعل الاستجابة تساوي صفر. (ملاحظة : أصفار ال drcl(F,N) تحدث عندما تكون F مضاعفاً صحيحاً لـ 1/N ، إلا عندما تكون F نفسها رقماً صحيحاً).

٣١- في شكل (ت- ٣١) توجد بعض الإشارات المرقمة من ١ حتى ١٤. يوجد أسفلهم رسومات لمقدار بعض تحويلات DTFT. لكل رسم لمقدار DTFT ، حدد الإشارة المقابلة له :

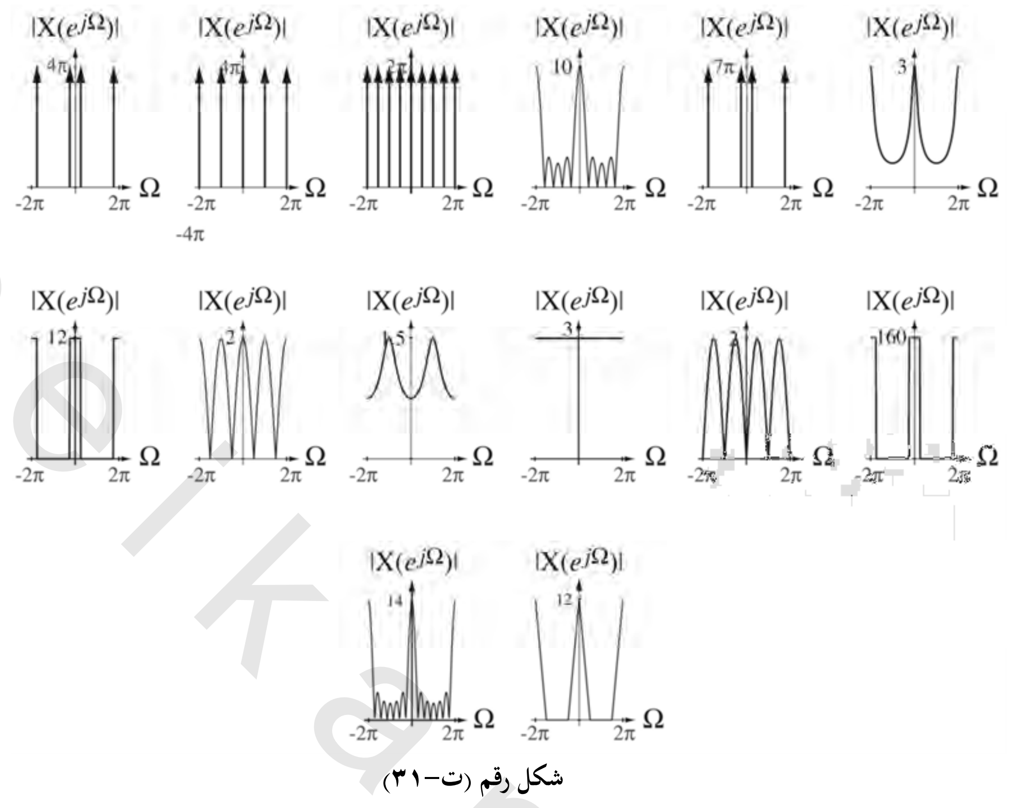
1. $3sinc(n)$ 2. $5sinc(n/4)*2sinc(n/4)$ 3. $7cos(2\pi n/8)$

4. $\delta[n+1]-\delta[n-1]$ 5. $3sinc(n/4)$ 6. $4sin(2\pi n/8)$

7. $(2/3)^n\ u[n]$ 8. $2(u[n-1]-u[n-6])$ 9. $4\delta_4[n]$

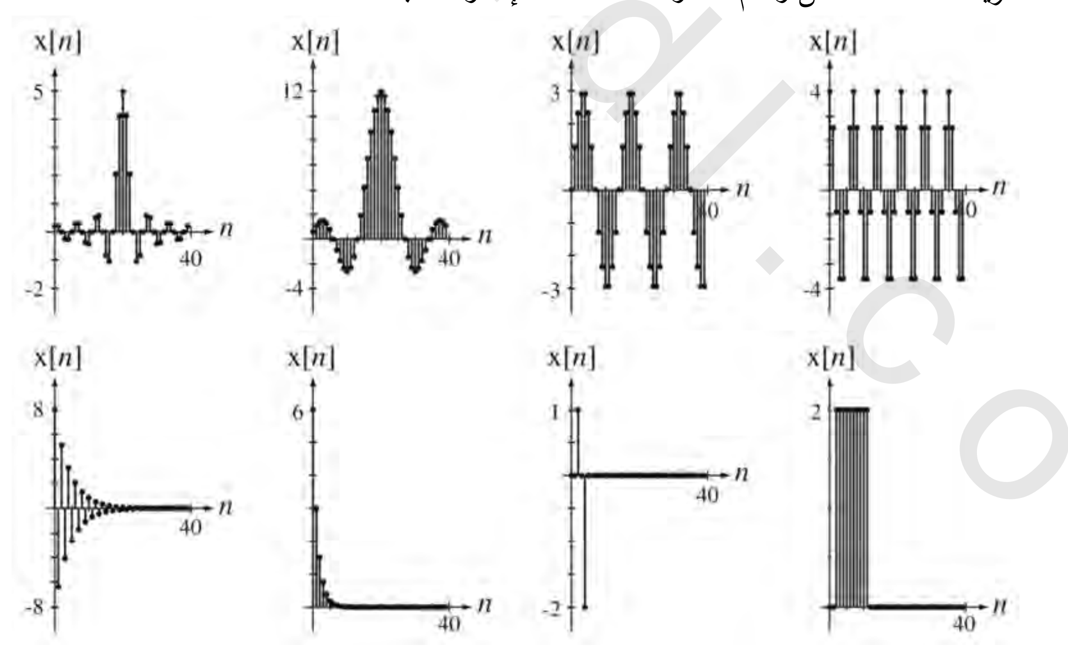
10. $-4\delta_2[n]$ 11. $-3sinc^2(n/4)$ 12. $\delta[n+1]+\delta[n-1]$

13. $2(u[n]-u[n-7])$ 14. $(-1/3)^n\ u[n]$

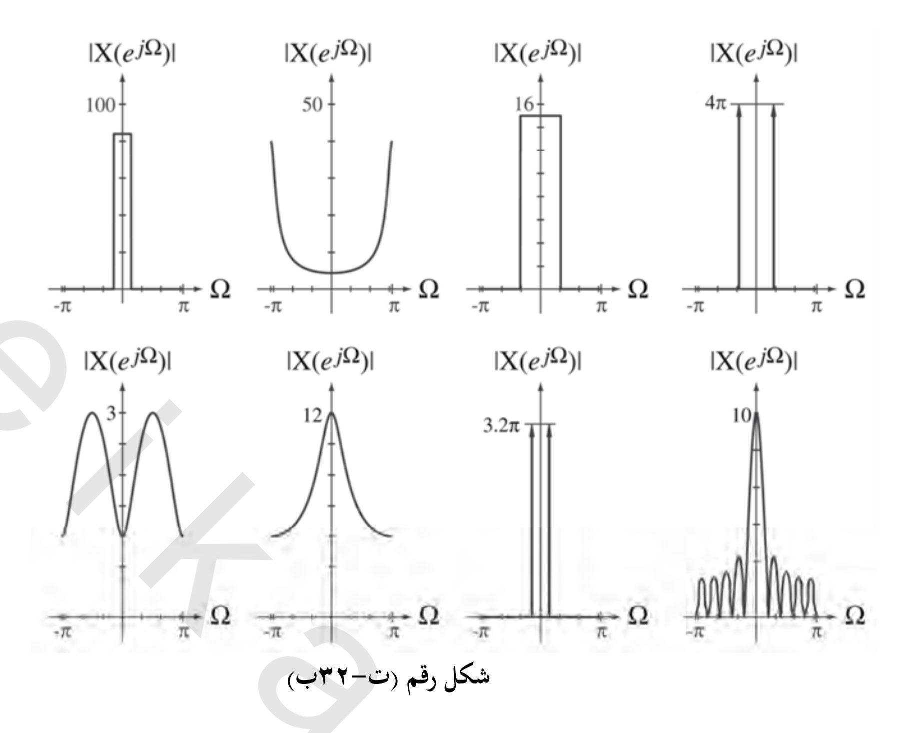



شكل رقم (ت-٣١)

٣٢- في شكل (ت- ٣٢أ) بعض الإشارات المتقطعة زمنياً. في شكل (ت- ٣٢ب) رسومات لبعض تحويلات DTFT. لكل رسم لمقدار DTFT حدد الإشارة المقابلة :




شكل رقم (ت-٣٢أ)



**شكل رقم** (ت–٣٢ب)

٣٣- احسب DTFT العكسي عددياً باستخدام DFT لدالة، دورتها يمكن وصفها كما يلي: $X(e^{j\Omega}) = \sqrt{\pi^2 - \Omega^2}$ حيث $-\pi<\Omega<\pi$، . ارسم هذه الدالة مع الزمن المتقطع n.

الفصل الثامن

# تحويل لابلاس

## (٨.١) المقدمة والأهداف

يعتبر تحويل فورير في الزمن المتقطع CTFT أداة فعالة في تحليل الإشارات والأنظمة ولكنه له حدود. هناك بعض الإشارات المفيدة التي ليس لها CTFT، حتى بالمعنى العام، مما يسمح بالصدمات في تحويل الـ CTFT لأي إشارة. إن CTFT يعبر عن الإشارات كمجموع خطي من الدوال الجيبية المركبة. في هذا الفصل سنمدد CTFT إلى تحويل لابلاس، الذي يعبر عن الإشارات كمجموع خطي من الأسس المركبة، وهي الدوال المميزة للمعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الخطية المستقرة زمنياً LTI والمستمرة. الدوال الجيبية المركبة تعتبر حالة خاصة من الأسس المركبة. بعض الإشارات التي لن يكون لها CTFT سيكون لها تحويل لابلاس.

الاستجابة الصدمية لأنظمة LTI تميز هذا النوع من الأنظمة. حيث إن تحويل لابلاس يصف استجابة الصدمة لأنظمة LTI كمجموع خطي من الدوال المميزة لأنظمة LTI، إنه يحتوي مباشرة خواص أي نظام بطريقة مفيدة جدا. العديد من طرق تحليل الأنظمة وتصميمها تعتمد على تحويل لابلاس.

**أهداف الفصل**

١- عرض تحويل لابلاس، الذي سيتم تطبيقه على بعض الإشارات التي ليس لها CTFT.
٢- تعريف مدى الإشارات التي يمكن تطبيق تحويل لابلاس عليها.
٣- عرض طريقة لبناء نظام مباشرة من دالة العبور الخاصة به.
٤- سنتعلم كيفية إيجاد تحويل لابلاس الأمامي والعكسي.
٥- سنستنتج ونوضح خواص تحويل لابلاس، وبالذات هذه الخواص التي ليس لها نظير مباشر في تحويل فورير.
٦- سنعرف تحويل لابلاس أحادي الاتجاه ونستكشف خواصه الفريدة.
٧- سنتعرف على كيفية حل المعادلات التفاضلية مع الشروط الابتدائية باستخدام تحويل لابلاس أحادي الاتجاه.

٨- سنوجد العلاقة بين مواضع الأصفار والأقطاب لدالة عبور أي نظام مباشرة مع الاستجابة الترددية للنظام.

٩- سنتعلم كيف يعبر ماتلاب عن دوال عبور الأنظمة.

## (٨.٢) استعراض تحويل لابلاس

عندما وسعنا تتابع فورير إلى تحويل فورير افترضنا أن الدورة الأساسية لأي إشارة دورية ستزداد إلى ما لانهاية، مما يجعل الترددات المتقطعة $kf_0$ في CTFT تندمج في الترددات f المستمرة في CTFT. إن ذلك يؤدي إلى التعريفات البديلة التالية لتحويل فورير:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad x(t) = (\frac{1}{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+jwt}d\omega$$

وأيضاً:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt, \quad x(t) = (\frac{1}{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j2\pi ft}d\omega$$

هناك طريقتان شائعتان لتقديم تحويل لابلاس. إحداهما: استخلاص تحويل لابلاس كتعميم من تحويل فورير عن طريق التعبير عن الدوال كمجموع خطي من الأسس المركبة بدلاً من كونها مجموعاً من فصيل محدد من الدوال، وهو الدوال الجيبية المركبة المستخدمة في تحويل فورير. الطريقة الثانية هي: عن طريق استعراض الطبيعة الخاصة للأس المركب كدالة مميزة للمعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الخطية وفهم أنه عند إثارة نظام LTI بدالة أسية مركبة فإنه يستجيب بدالة أسية مركبة أخرى. العلاقة بين الإثارة والاستجابة الأسية المركبة لأي نظام LTI وهي تحويل لابلاس، ونحن هنا سنفترض الطريقتين.

**تعميم تحويل فورير**

إذا عممنا ببساطة تحويل فورير الأمامي عن طريق استبدال الدوال الجيبية المركبة في الصورة $e^{jwt}$ حيث ω متغير حقيقي بالدالة الأسية $e^{st}$ حيث s متغير مركب نحصل على ما يلي:

$$\mathcal{L}\big(x(t)\big) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

والتي تحدد تحويل لابلاس الأمامي، حيث الرمز $\mathcal{L}(.)$ يعني تحويل لابلاس.

باعتبار المتغير s متغير مركب فإنها يمكنها أن تأخذ أي قيم في المستوى المركب. إن لها جزءا مركبا هو σ وجزء تخيلي هو ω وبالتالي فإن $s=\sigma+j\omega$. وعلى ذلك ففي الحالة الخاصة التي تكون فيها $\sigma=0$ ويكون تحويل فورير للدالة x(t) موجودا بالمعنى المحدود، فإن تحويل لابلاس الأمامي يكافئ تحويل فورير الأمامي.

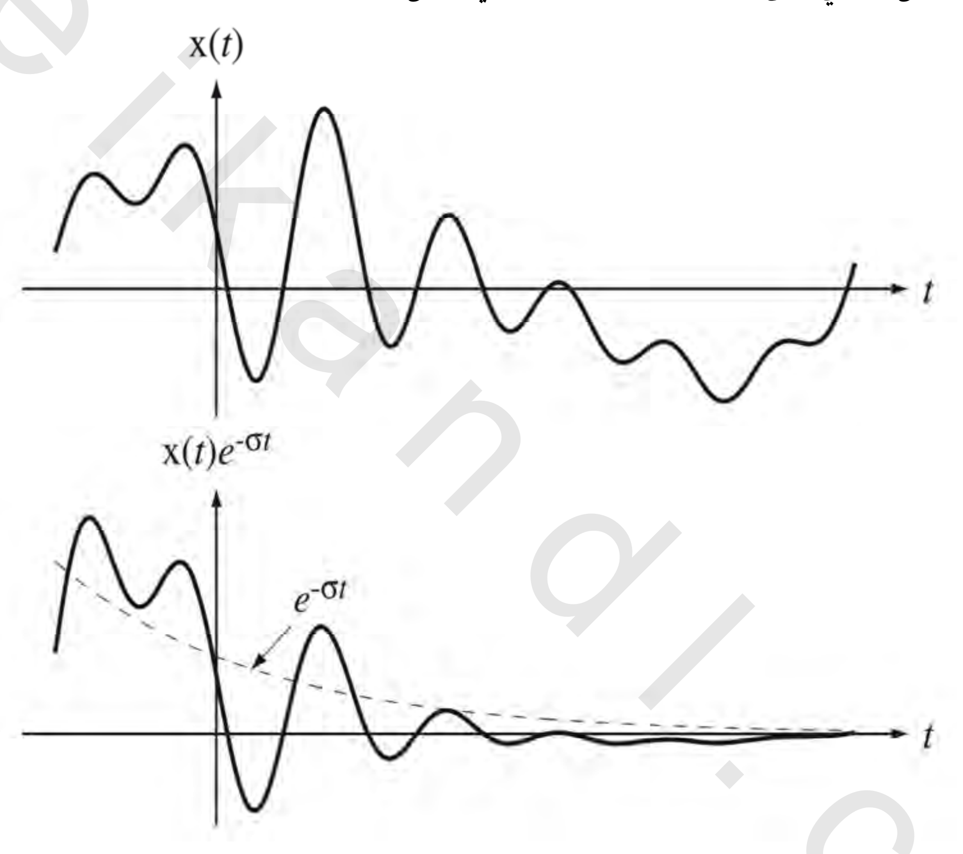
$$X(j\omega) = X(s)_{s\rightarrow j\omega}$$

هذه العلاقة بين تحويل فورير وتحويل لابلاس هي السبب في اختيار رمز CTFT في الفصل ٦ على الصورة $X(j\omega)$ بدلاً من $X(\omega)$. إن ذلك الاختيار يحافظ على المعنى الحسابي المحدد للدالة "X".

باستخدام $s=\sigma+j\omega$ في تحويل لابلاس الأمامي نحصل على:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+jw)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-jwt}dt = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

وعلى ذلك فأحد الطرق لمفهوم تحويل لابلاس هي أنه يكافئ لتحويل فورير للدالة $x(t)$ مضروبة في أس حقيقي هو معامل تقاربي على الصورة $e^{-\sigma t}$ كما هو مبين في شكل (٨.١).




**شكل رقم (٨.١) تأثير المعامل التقاربي الأسي المتناقص على الدالة الأصلية**

هذا المعامل التقاربي يسمح لنا، في بعض الأحوال، بإيجاد التحويلات لبعض الدوال التي لا يمكن إيجاد تحويل فورير لها. كما ذكرنا في فصل سابق، فإن تحويل فورير لبعض الدوال لا يوجد (بالمعنى المحدد). فمثلا الدالة $g(t)=Au(t)$ من الممكن أن يكون لها تحويل فورير التالي:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Au(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}dt$$

وهذا التكامل لن يتقارب. الطريقة المستخدمة في الفصل ٦ والتي تجعل تحويل فورير يتقارب كانت عن طريق ضرب الإشارة في معامل تقارب $e^{-\sigma|t|}$ حيث σ ثابت حقيقي وموجب. بعد ذلك يمكن إيجاد تحويل فورير للإشارة المعدلة ويتم أخذ النهاية مع اقتراب σ من الصفر. تحويل فورير المحسوب بهذه الطريقة تمت تسميته بتحويل فورير العام والذي سمح فيه بالصدمة كجزء من التحويل. لاحظ أنه عندما تكون $t>0$ فإن معامل التقارب يكون هو نفسه في تحويل لابلاس وفي تحويل فورير العام، ولكن في تحويل لابلاس فإن النهاية مع تقارب σ من الصفر لن يتم إجراؤها. كما سنرى قريبا فإن هناك دوال أخرى مفيدة لن يكون لها حتى تحويل فورير العام.

الآن، لكي نستنتج تحويل لابلاس الأمامي والعكسي من تحويل فورير، فإننا نجري تحويل فورير للدالة $g_\sigma(t) = g(t)e^{-\sigma t}$ بدلا من الدالة الأصلية $g(t)$. من الممكن أن نكتب هذا التكامل كما يلي:

$$\mathcal{F}(g_\sigma(t)) = G_\sigma(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

هذا التكامل قد يتقارب أو لا يتقارب، اعتماداً على طبيعة الدالة $g(t)$ واختيار القيمة σ.سنستكشف حالا الشروط التي سيتقارب معها التكامل. باستخدام الرمز $s=\sigma+j\omega$، يمكننا أن نكتب ما يلي:

$$\mathcal{F}(g_\sigma(t)) = \mathcal{L}(g(t)) = G_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt$$

وهذا هو تحويل لابلاس للدالة $g(t)$، إذا كان هذا التكامل سيتقارب.

من الممكن كتابة تحويل فورير العكسي كما يلي:

$$\mathcal{F}^{-1}(G_\sigma(j\omega)) = g_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(j\omega)\,e^{+j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_L(\omega)e^{+j\omega t}\,d\omega$$

باستخدام $s=\sigma+j\omega$ و $ds=jd\omega$ سنحصل على ما يلي:

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G_L(s)e^{+(s-\sigma)t}\,ds = \frac{e^{-\sigma t}}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G_L(s)e^{+st}\,ds$$

أو بقسمة كل من الطرفين على $e^{-\sigma t}$ نحصل على:

$$g(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G_L(s)e^{+st}\,ds$$

وهذا يعرف، أو يحدد تحويل لابلاس العكسي. عندما نتعامل فقط مع تحويل لابلاس فإن الرمز $\mathcal{L}$ لن نحتاج إليه لكي نتجنب الخلط مع تحويل فورير، وفي هذه الحالة يمكن كتابة التحويل والتحويل العكسي كما يلي:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \quad , \quad x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{+st}\,ds$$ المعادلة رقم (٨.١)

هذه النتيجة توضح أن أي دالة يمكن التعبير عنها كتجميع خطي لأسس مركبة، وهذا يعتبر تعميماً لتحويل فورير التي يتم فيها التعبير عن أي دالة كتجميع خطي من الجيوب المركبة. يمكننا كتابة الرمز الشائع عالمياً لتحويل لابلاس كما يلي:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$$

مما يوضح أن كلاً من h(t) و H(s) تشكلان زوجاً لتحويل لابلاس.

**الإثارة والاستجابة الأسية المركبة**

طريقة أخرى لتحويل لابلاس هي عن طريق فرض استجابة النظام LTI لإثارة أسية مركبة على الصورة $x(t) = Ke^{st}$ حيث s=σ+j$\omega$ و σ و $\omega$ و K كلها قيم حقيقية. باستخدام الالتفاف، يمكن كتابة استجابة النظام LTI الذي استجابته الصدمية هي h(t) والإثارة هي x(t) كما يلي:

$$y(t) = h(t) * Ke^{st} = K\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau = Ke^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

استجابة أي نظام LTI للإثارة الأسية المركبة تكون هي نفسها ولكن مضروبة في الكمية $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$ إذا كان هذا التكامل سيتقارب. هذا هو حاصل ضرب استجابة الصدمة h(τ) والأس المركب $e^{-s\tau}$ على كل قيم **τ** ونتيجة هذه العملية تكون دالة في ال **τ** فقط. عادة تكتب هذه النتيجة كالتالي:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt \qquad \text{المعادلة رقم (٨.٢)}$$

وH(s) تسمى تحويل لايلاس لـ h(t). (اسم متغير التكامل تم تغييره من **τ** إلى t ولكن ذلك لن يغير من النتيجة التي هي H(s)).

بالنسبة للأنظمة الـ LTI، فإن معرفة ال h(t) تكون كافية للتشخيص الكامل للنظام. تحتوي H(s) على معلومات كافية للوصف الكامل للنظام، ولكن هذه المعلومات تكون في شكل مختلف. إن حقيقة أن هذا الشكل يكون مختلفاً من الممكن أن تؤدي إلى التعمق في عملية النظام التي يكون من الصعب رؤيتها عن طريق فحص h(t) وحدها. في الفصول التالية سنرى العديد من الأمثلة على ميزة عرض خواص الأنظمة وأدائها من خلال H(s) و h(t).

## (٨.٣) دالة العبور

دعنا الآن نوجد تحويل لابلاس Y(s) للاستجابة y(t) لنظام LTI استجابته الصدمية هي h(t) للإثارة x(t) كما يلي:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}[h(t) * x(t)]\,e^{-st}dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-st}dt$$

بفض التكاملين فإن :

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)e^{-st}\,dt$$

سندع λ=t-τ وبالتالي dλ=dt ، وعلى ذلك يمكننا كتابة :

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,e^{-s(t+\lambda)}d\lambda = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-st}\,\mathrm{d}\tau}_{=H(s)}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,e^{-s\lambda}d\lambda}_{=X(s)}$$

تحويل لابلاس Y(s) للاستجابة y(t) سيكون :

Y(s)=H(s)X(s) المعادلة رقم (٨.٣)

وهو حاصل ضرب تحويل لابلاس للإثارة وتحويل لابلاس لاستجابة الصدمة (إذا كانت هذه التحويلات موجودة). الدالة H(s) تسمى دالة العبور للنظام لأنها تصف في المجال s كيف أن الإثارة تعبر من دخل النظام لخرجه ، وهذه تعتبر نتيجة أساسية في تحليل الأنظمة. في هذا النطاق الجديد ، النطاق s ، أصبح الالتفاف الزمني ضرباً في النطاق s تماماً كما حدث مع تحويل فورير.

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s)H(s)$$

## (٨.٤) الأنظمة الموصلة على التوالي

إذا كانت استجابة أحد الأنظمة هي الدخل أو الإثارة لنظام آخر ، فإن النظامين يقال عنهما إنهما موصلان على التوالي كما في شكل (٨.٢). تحويل لابلاس للنظام الكلي هو :

$$Y(s) = H_2(s)[H_1(s)X(s)] = [H_1(s)H_2(s)]X(s)$$

وبذلك يصبح التوصيل المتوالي لنظامين مكافئاً لنظام واحد تكون دالة العبور له هي $H(s)=H_1(s)H_2(s)$.

X(s) → H₁(s) → X(s)H₁(s) → H₂(s) → Y(s)=X(s)H₁(s)H₂(s)

X(s) → H₁(s)H₂(s) → Y(s)

**شكل رقم (٨.٢) التوصيل المتوالي للأنظمة .**

## (٨.٥) بناء المباشر شكل II

بناء النظام هي عملية وضع مكونات النظام مع بعضها بعضاً لتكوين نظام يعطي دالة العبور المطلوبة. لقد رأينا في الفصل ٥ أنه إذا تم وصف نظام بمعادلة تفاضلية خطية على الصورة:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^{(k)}(t)$$

فإن دالة العبور لها تساوي النسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s ومعاملات قوى الـ s تكون هي نفسها معاملات تفاضلات ال x وال y في المعادلة التفاضلية:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$ المعادلة رقم (٨.٤)

(لقد افتراض أن الدرجة الإسمية لكل من البسط والمقام هنا هي N. إذا كانت درجة البسط في الحقيقة أقل من N ، فإن بعض المعاملات b للدرجات العليا ستكون أصفارا ). درجة البسط يجب أن تكون N والمعامل $a_N$ يجب ألا يساوي صفراً إذا كانت درجة هذه المعادلة هي N.

إحدى الصور القياسية لبناء النظام تسمى الطريقة المباشرة II. يمكن التفكير في دالة العبور في هذه الحالة على أنها حاصل ضرب دالتي عبور كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$ المعادلة رقم (٨.٥)

والدالة:

$$H_2(s) = \frac{Y(s)}{Y_1(s)} = b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

حيث إشارة الخرج للنظام الأول $Y_1(s)$ هي إشارة الدخل للنظام الثاني كما في شكل (٨.٣).

$$X(s) \rightarrow \boxed{H_1(s) = \frac{1}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}} \rightarrow Y_1(s) \rightarrow \boxed{H_2(s) = b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \rightarrow Y(s)$$

**شكل رقم (٨.٣)**

يمكننا أن نرسم مخططاً صندوقياً للنظام $H_1(s)$ عن طريق إعادة كتابة المعادلة (٨.٥) كما يلي:

$$X(s) = [a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0] Y_1(s)$$

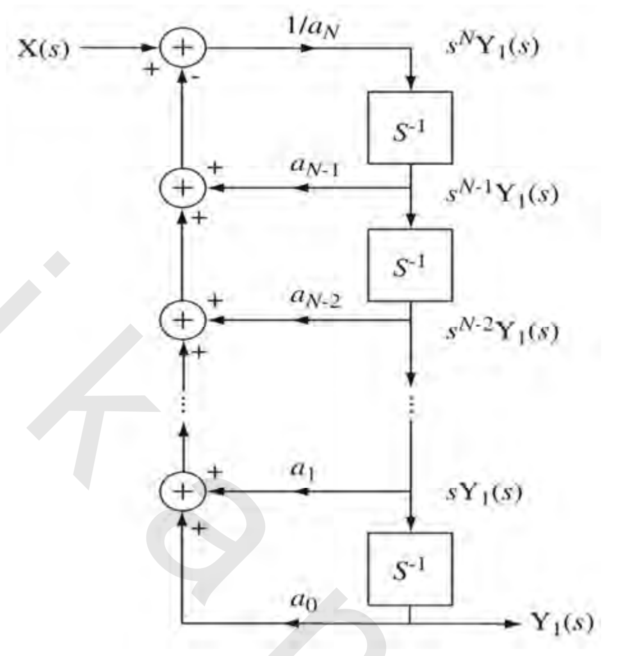
أو:

$$X(s) = a_N s^N Y_1(s) + a_{N-1} s^{N-1} Y_1(s) + \cdots + a_1 s Y_1(s) + a_0 Y_1(s)$$

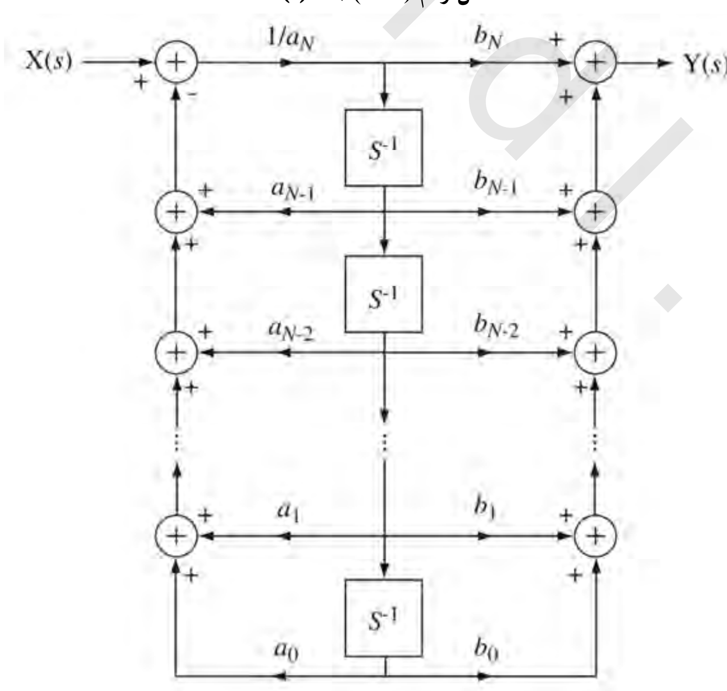
أو:

$$s^N Y_1(s) = \frac{1}{a_N}\{X(s) - [a_{N-1}s^{N-1}Y_1(s) + \cdots + a_1 sY_1(s) + a_0 Y_1(s)]\}$$

التي يمكن بناؤها كما في شكل (٨.٤).




**شكل رقم (٨.٤) بناء H1(s)**




**شكل رقم (٨.٥) الصورة المباشرة الكلية لبناء النظام**

يمكننا الآن وفوراً بناء الاستجابة الكلية Y(s) كتجميع خطي من القوى المختلفة للمتغير s مضروبة في $Y_1(s)$ كما في شكل (٨.٥).

## (٨.٦) تحويل لابلاس العكسي

في التطبيقات العملية لتحويل لابلاس سنحتاج إلى وسيلة لتحويل Y(s) إلى y(t)، أو التحويل العكسي لتحويل لابلاس. لقد رأينا في المعادلة (٨.١) أن :

$$y(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st}\, ds$$

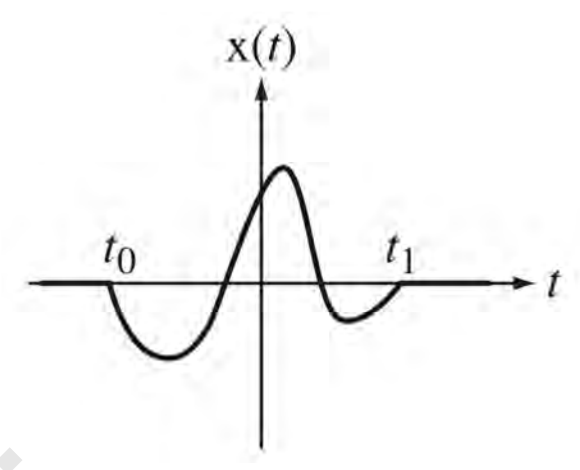
حيث σ هي الجزء الحقيقي من s. إن هذا يعتبر تكاملاً محيطياً أو كونتورياً في المستوى s المركب وهو خارج حدود هذا الكتاب. هذا التكامل العكسي نادراً ما يستخدم في حل المسائل العملية ؛ لأن تحويل لابلاس لمعظم الإشارات المفيدة قد تم فعلا حسابه ووضعه في جداول.

## (٨.٧) تواجد تحويل لابلاس

يجب علينا الآن أن نستكشف تحت أي الشروط من الممكن أن يكون تحويل لابلاس
$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt$ موجوداً حقاً. إنه يوجد بالطبع إذا كان التكامل سيتقارب، وتقارب هذا التكامل سيعتمد على كل من x(t) و s.

### الإشارات المحدودة زمنياً

إذا كانت $x(t)=0$ عندما $t<t_0$ و $t>t_1$ (حيث كل من $t_0$ و $t_1$ محددتان) فإنها تسمى إشارة محدودة زمنياً. أيضاً إذا كانت x(t) محددة لكل قيم t، فإن تكامل تحويل لابلاس سيتقارب لأي قيمة لـ s وسيكون تحويل لابلاس للدالة x(t) موجوداً كما في شكل (٨.٦).




**شكل رقم (٨.٦) إشارة محدودة زمنياً ومحددة.**

## الإشارات اليمينية واليسارية الجانب

إذا كانت $x(t)=0$ لقيم $t<t_0$ فإنها تسمى إشارة يمينية الجانب وسيكون تحويل لابلاس لها كالتالي :

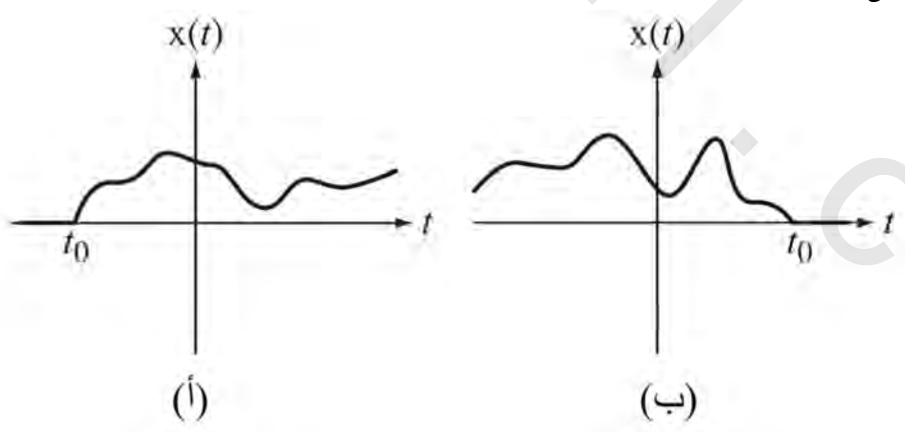
$$X(s) = \int_{t_0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

كما في شكل (٨.٧أ)

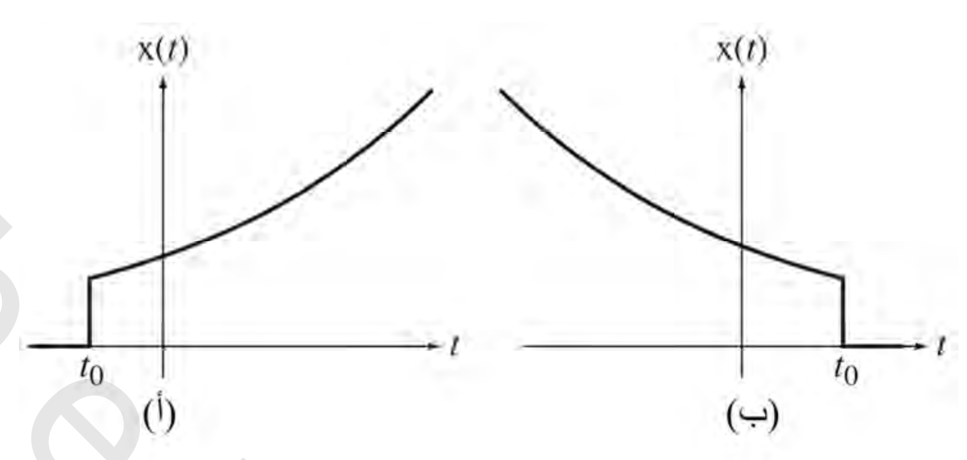
افترض تحويل لابلاس $X(s)$ للإشارة اليمينية الجانب $x(t)=e^{\alpha t}u(t-t_0)$ ، و $\alpha \in R$ الذي يمكن كتابته كالتالي :

$$X(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}\,dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{(\alpha-\sigma)t}e^{-wt}\,dt$$

كما في شكل (٨.٨أ).

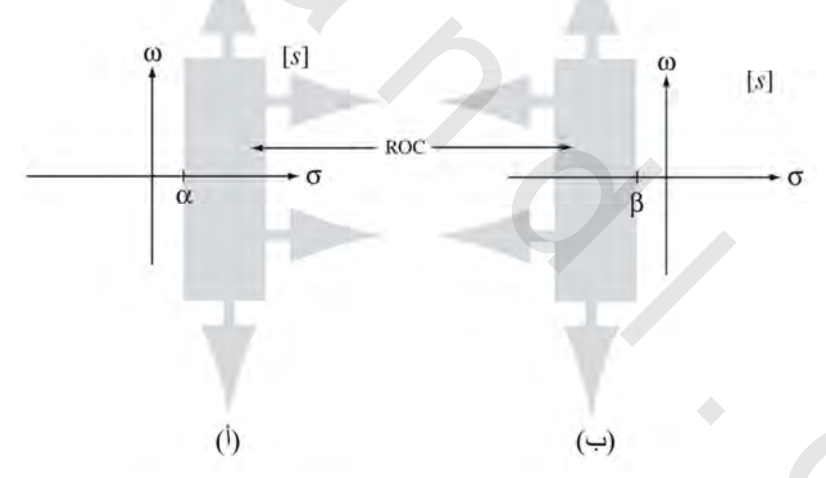



**شكل رقم (٨.٧) (أ) إشارة يمينية الجانب، (ب) إشارة يسارية الجانب**




**شكل رقم (٨.٨) (أ) x(t)=eαtu(t-t0)، و α∈R، (ب) x(t)=eβtu(t0-t)، و β∈R**

إذا كانت σ>α فإن التكامل سيتقارب. إن عدم التساوي σ>α تحدد منطقة في المستوى s تسمى منطقة التقارب region of convergence, ROC كما في شكل (٨.٩أ).



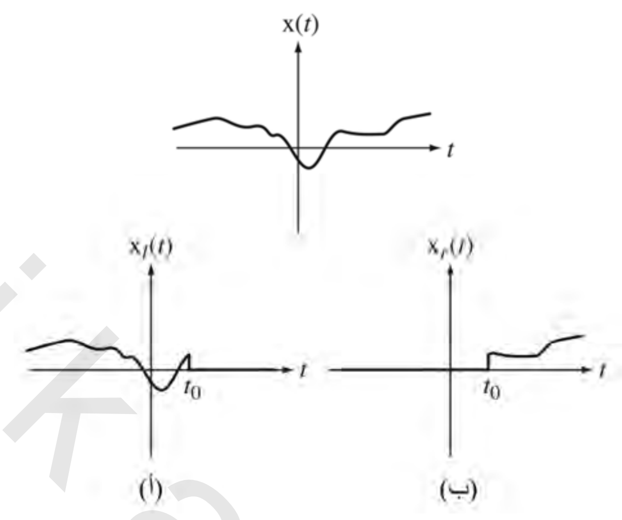

**شكل رقم (٨.٩) مناطق التقارب لـ (أ) الإشارة يمينية الجانب x(t)=eαtu(t-t0)، و α∈R، و (ب) الإشارة يسارية الجانب x(t)=eβtu(t0-t)، و β∈R**

إذا كانت x(t)=0 عندما $t>t_0$ فإن الإشارة تسمى إشارة يسارية الجانب كما في شكل (٨.٧ب)، ويصبح تحويل لابلاس لهذه الإشارة كالتالي: $X(s) = \int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-st}\,dt$. إذا كانت $x(t)=e^{\beta t}u(t_0-t)$، و $\beta\in R$، فإن تحويل لابلاس سيكون:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{\beta t}e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{t_0} e^{(\beta-\sigma)t}e^{-\omega t}\,dt$$

والتكامل سيتقارب لأي قيمة لـ $\sigma<\beta$ كما في شكل (٨.٨ب) وشكل (٨.٩ب).

أي إشارة يمكن التعبير عنها كمجموع من إشارة يمينية الجانب وأخرى يسارية الجانب كما في شكل (٨.١٠).




**شكل رقم (٨.١٠) إشارة مقسمة إلى جزء يميني (أ) وآخر يساري (ب)**

إذا كانت $x(t)=x_r(t)+x_l(t)$ حيث $x_r(t)$ هو الجزء اليميني و $x_l(t)$ هو الجزء اليساري، وإذا كان $|x_r(t)|<|K_r e^{\alpha t}|$ و $|x_l(t)|<|K_l e^{\beta t}|$، حيث كل من $K_r$ و $K_l$ ثوابت، فإن تكامل تحويل لابلاس يتقارب وتحويل لابلاس نفسه سيكون موجودا لقيم $\alpha<\sigma<\beta$. إن ذلك يعتي أنه إذا كانت $\alpha<\beta$ فإنه يمكن إيجاد تحويل لابلاس، وستكون منطقة التقارب في المستوى s هي $\alpha<\sigma<\beta$. إذا كانت $\alpha>\beta$ فإن تحويل لابلاس لن يكون موجوداً. بالنسبة للإشارات اليمينية الجانب تكون منطقة التقارب ROC في العادة هي المنطقة من المستوى s على يمين $\alpha$. بالنسبة للإشارات اليسارية الجانب تكون منطقة التقارب ROC في العادة هي المنطقة من المستوى s على يسار $\beta$.

## (٨.٨) أزواج تحويل لابلاس

يمكننا عمل جدول لأزواج تحويل لابلاس بدءاً من الإشارة الموصوفة بالدالة $\delta(t)$ و $e^{-\alpha t}\cos(w_0t)u(t)$ حيث باستخدام التعريف الأساسي يمكننا كتابة :

$$\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \delta(t)e^{-st}dt = 1, \qquad All\ s$$

$$e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)e^{-at}dt = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-(s+\alpha)t}dt, \sigma > -\alpha$$

$$e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/2)\int_0^{\infty}\left(e^{-(s-j\omega_0+\alpha)t}+e^{-(s+j\omega_0+\alpha)t}\right)dt\,dt, \sigma > -\alpha$$

$$e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/2)\left[\frac{1}{(s-j\omega_0+\alpha)}+\frac{1}{(s+j\omega_0+\alpha)}\right], \sigma > -\alpha$$

$$e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}, \quad \sigma > -\alpha$$

وإذا كانت $\alpha=0$ :

$$cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \sigma > -\alpha$$

وإذا كانت $\omega_0=0$ :

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma > -\alpha$$

وإذا كانت $\alpha= \omega_0=0$ :

$$u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \quad \sigma > 0$$

باستخدام طرق مشابهة، يمكننا أن نبني جدولاً لأزواج تحويل لابلاس الأكثر استخداماً كما في جدول (٨.١).

لتوضيح أهمية تحديد ليس فقط الصورة الجبرية لتحويل لابلاس ولكن أيضاً منطقة التقارب ROC، افترض تحويل لابلاس للدالة $e^{-\alpha t}u(t)$ والدالة $-e^{-\alpha t}u(-t)$ :

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma > -\alpha \quad and \quad -e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha$$

**جدول رقم (٨.١) بعض أزواج تحويل لابلاس الشائعة**

| | |
|---|---|
| $\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1, \ All\ \sigma$ | |
| $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \ \sigma > 0$ | $-u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \ \sigma < 0$ |
| $ramp\ (t) = tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s^2, \ \sigma > 0$ | $ramp\ (-t) = tu(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s^2, \ \sigma < 0$ |
| $e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha), \ \sigma > -\alpha$ | $-e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha), \ \sigma < -\alpha$ |
| $t^n u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}, \ \sigma > 0$ | $-t^n u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}, \ \sigma < 0$ |
| $te^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha)^2, \ \sigma > -\alpha$ | $-te^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha)^2, \ \sigma < -\alpha$ |
| $t^n e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \ \sigma > -\alpha$ | $-t^n e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \ \sigma < -\alpha$ |
| $sin(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \ \sigma > 0$ | $-sin(\omega_0 t)u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \ \sigma < 0$ |

| | |
|---|---|
| $cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2},\ \sigma > 0$ | $-cos(\omega_0 t)u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2},\ \sigma < 0$ |
| $e^{-at}sin(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},\ \sigma > -\alpha$ | $-e^{-at}sin(\omega_0 t)u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},\ \sigma < -\alpha$ |
| $e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},\ \sigma > -\alpha$ | $-e^{-at}cos(\omega_0 t)u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},\ \sigma < -\alpha$ |
| $e^{-\alpha\|t\|} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s-\alpha} = -\frac{2\alpha}{s^2-\alpha^2}, -\alpha < \sigma < \alpha$ | |

التعبير الجبري لكل تحويل لابلاس هو نفسه في كل حالة ولكن مناطق التقارب تكون مختلفة تماماً، بل وتكون غير مترابطة تماماً. إن ذلك يعني أن تحويل لابلاس للمجموع الخطي لهاتين الدالتين لا يمكن إيجاده؛ لأننا لا يمكن أن نجد في المستوى s منطقة تكون عامة لكل من منطقتي التقارب للدالة $e^{-\alpha t}u(t)$، والدالة $-e^{-\alpha t}u(-t)$.

إن القارئ الملاحظ سيرى أن بعض دوال الإشارات الشهيرة جدا لم تظهر في جدول ٨.١، مثل الكمية الثابتة. الدالة $x(t)=u(t)$ تظهر في الجدول ولكن الدالة $x(t)=1$ لم تظهر. سنكتب تحويل لابلاس لهذه الدالة كما يلي:

$$X(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t} dt}_{ROC:\sigma<0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t} dt}_{ROC:\sigma>0}$$

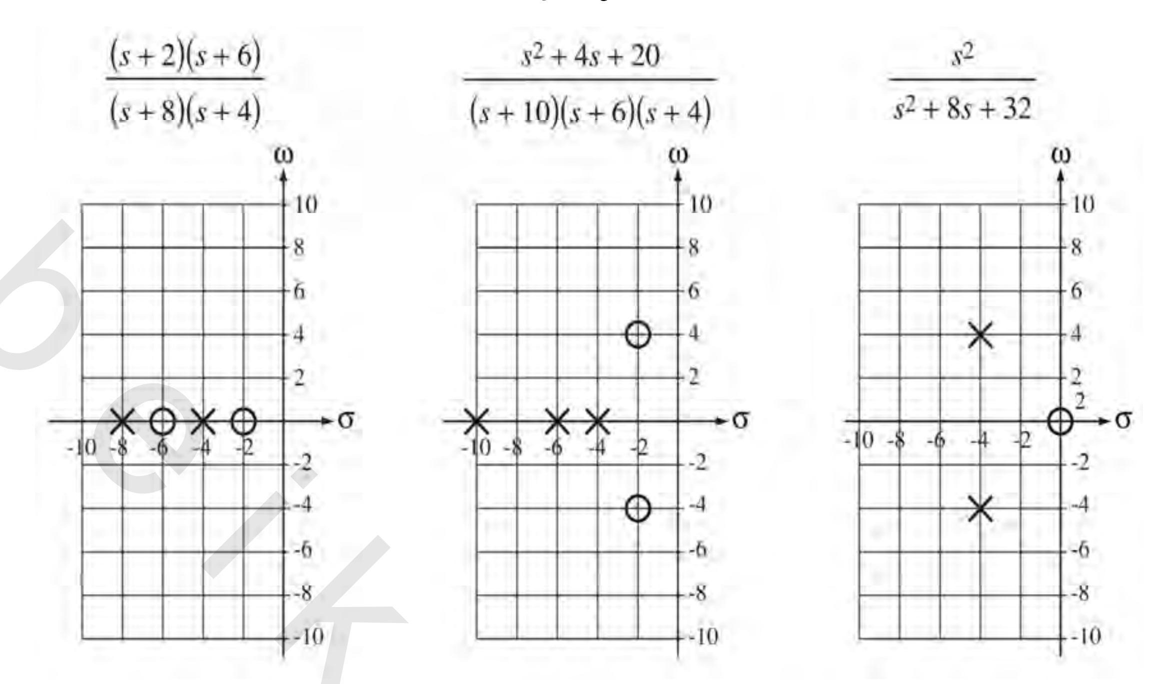
لا توجد هناك منطقة تقارب تكون عامة لكل من هذين التكاملين، لذلك فإن تحويل لابلاس لهذه الدالة لن يكون موجوداً. لنفس السبب فإن الدوال $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ و sgn(t) و $\delta_{T_0}(t)$ لا تظهر في الجدول على الرغم من ظهور الدوال $\cos(\omega_0 t)u(t)$ و $\sin(\omega_0 t)u(t)$.

تحويل لابلاس $1/(s+\alpha)$ يكون محدداً عند كل نقطة في المستوى s فيما عدا عند النقطة $s=-\alpha$. هذه النقطة الفريدة تسمى قطب pole للدالة $1/(s+\alpha)$. على العموم فإن القطب لأي تحويل لابلاس يكون هو قيمة s التي يؤول عندها التحويل إلى الما لانهاية. على العكس من ذلك هناك مفهوم الصفر zero لتحويل لابلاس، وهو قيمة s التي يؤول عندها التحويل إلى الصفر. بالنسبة للتحويل $1/(s+\alpha)$ يكون هناك صفر واحد عند s تساوي المالانهاية. تحويل لابلاس التالي:

$$\cos(\omega_0 t)\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

لها قطبان عند $s=\pm j\omega_0$ وصفر عند $s=0$ وآخر عند الما لانهاية.

من الأدوات المفيدة في تحليل الإشارات والأنظمة مخطط الأقطاب - الأصفار والذي يتم تعريف القطب فيه بالعلامة "X" وتعريف الصفر بالعلامة "O" في المستوى s كما في شكل (٨.١١).




**شكل رقم (٨.١١) أمثلة على مخططات الأقطاب – الأصفر**

ال "2" الصغيرة بجانب الصفر في المخطط الأيمن في شكل (٨.١١) توضح وجود صفر مزدوج عند s=0). كما سنرى في مواضع أخرى فإن الأصفار والأقطاب لتحويل لابلاس لأي دالة يحتوي على الكثير من المعلومات القيمة عن طبيعة هذه الدالة.

**مثال ٨.١**

**تحويل لابلاس لإشارة أسية غير سببية**

احسب تحويل لابلاس للإشارة $x(t)=e^{-t}u(t)+e^{2t}u(-t)$.

تحويل لابلاس لهذا المجموع هو مجموع تحويل لابلاس لكل عنصر من عناصرها $e^{-t}u(t)$ و $e^{2t}u(-t)$. منطقة التقارب ROC للمجموع ستكون المنطقة في المستوى s العامة بين المنطقتين. من جدول ٨.١ نستطيع أن نكتب :

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

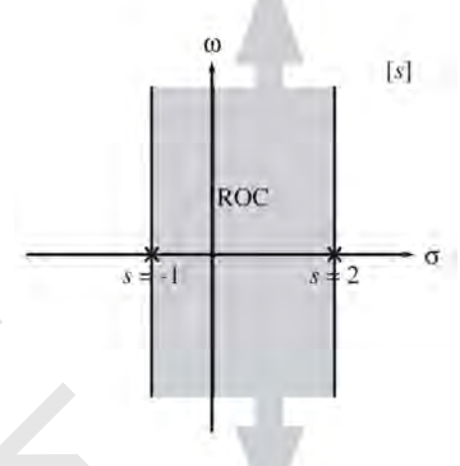
وأيضاً :

$$e^{2t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-2}, \quad \sigma < 2$$

في هذه الحالة ، ستكون المنطقة في المستوى s العامة لمنطقتي التقارب هي $-1<\sigma<2$ وبالتالي فإن :

$$e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}, \quad -1 < \sigma < 2$$

كما في شكل (٨.١٢)، فإن هذا التحويل له قطب عند s=-1 و s=2 وصفران عند الما لانهاية.




**شكل رقم (٨.١٢) منطقة تقارب تحويل لابلاس للدالة: $\mathbf{e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t)}$**

**مثال ٨.٢**

**تحويلات لابلاس العكسية**

احسب تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الالية:

(أ) $X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s-6}, \quad -3 < \sigma < 6$

(ب) $X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s-6}, \quad \sigma > 6$

(ج) $X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s-6}, \quad \sigma < -3$

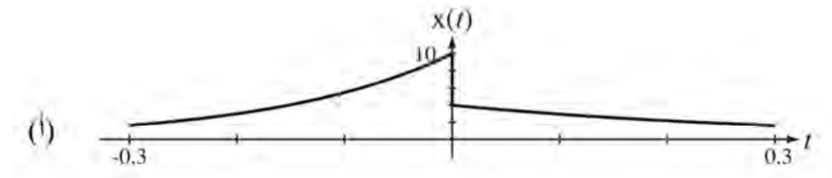
(أ) الدالة X(s) هي مجموع دالتين في المستوى s وبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي يجب أن يكون مجموع دالتين في النطاق الزمني. الدالة X(s) لها قطبان، أحدهما عند s=-3 والآخر عند s=6. نحن نعرف أن منطقة التقارب للدوال اليمينية تكون دائماً على يمين القطب وبالنسبة للدوال اليسارية تكون منطقة التقارب على يسار القطب. وعلى ذلك فإن 4/s+3 يجب أن تنعكس إلى إشارة أو دالة يمينية و 10/s-6 يجب أن تنعكس إلى إشارة أو دالة يسارية. وبالتالي باستخدام الأزواج التالية:

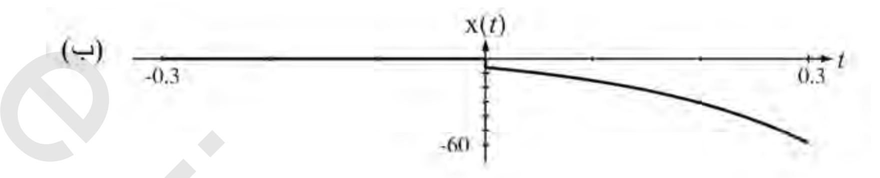
$$-e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha \quad \text{و} \quad e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha$$

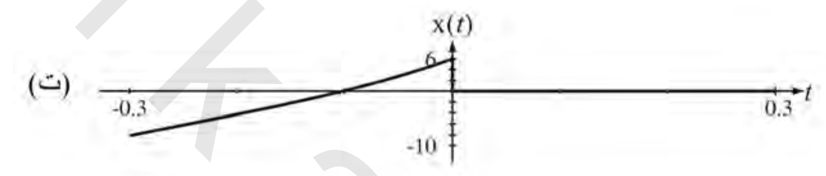
نحصل على:

$$x(t) = 4e^{-3t}u(t) + 10e^{6t}u(-t)$$

كما في شكل (٨.١٣أ).




**شكل رقم (٨.١٣) تحويلات لابلاس العكسية**

(ب) في هذه الحالة تكون منطقة التقارب على يمين القطبين وكل من الإشاراتين في النطاق الزمني يجب أن تكونا إشارات يمينية، وبالتالي باستخدام العلاقة : $e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha$ نحصل على :

$$x(t) = 4e^{-3t}u(t) - 10e^{6t}u(-t)$$

كما في شكل (٨.١٣ب).

(ج) في هذه الحالة ستكون منطقة التقارب على يسار القطبين وبالتالي ستكون الدالتان في النطاق الزمني دالتين يساريتين، وبالتالي باستخدام العلاقة : $-e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha$ نحصل على :

(د)

$$x(t) = -4e^{-3t}u(-t) - 10e^{6t}u(-t)$$

كما في شكل (٨.١٣ت).

## (٨.٩) تحليل الكسور الجزئية

في مثال ٨.٢ كل تعبير في المستوى s كان على صورة مكونين، كل واحد منهما يمكن إيجاده مباشرة في جدول ٨.١. ولكن ماذا نفعل عندما يكون تحويل لابلاس في صورة أكثر تعقيداً؟ مثلا، كيف نحسب تحويل فورير العكسي للدالة :

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s}{(s+3)(s+1)} \quad , \quad \sigma > 1?$$

هذه الصورة غير ظاهرة في جدول ٨.١. في حالة مثل هذه، هناك طريقة تسمى مفكوك الكسور الجزئية تصبح أكثر فائدة. باستخدام هذه الطريقة يمكن كتابة X(s) كما يلي :

$$X(s) = \frac{3/2}{s+3} - \frac{1/2}{s+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{s+3} - \frac{1}{s+1}\right), \quad \sigma > -1$$

وعلى ذلك فإن تحويل لابلاس العكسي سيكون :

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\right)(3e^{-3t} - e^{-t})u(t)$$

من أشهر أنواع المسائل في تحليل الإشارات والأنظمة باستخدام طرق لابلاس هي أن نوجد التحويل العكسي لدالة كسرية في الـ s على الصورة :

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots . + b_1 s + b_0}}{\mathrm{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots . + a_1 s + a_0}}$$

حيث معاملات البسط والمقام a و b كلها ثوابت. حيث أن درجة البسط والمقام تكون اختيارية، فإن هذه الدالة لا تظهر في جداول تحويل لابلاس القياسية. ولكن باستخدام مفكوك الكسور الجزئية، يمكن التعبير عن هذه الدالة كمجموع من الدوال التي تظهر في الجداول القياسية لتحويل لابلاس.

في العادة يكون من الممكن (عددياً، إذا لم يكن حسابياً) أن نفكك كثيرة الحدود التي في المقام والتعبير عن الدالة في الصورة التالية :

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots . + b_1 s + b_0}}{\mathrm{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_N)}}$$

حيث الـ p's تمثل أقطاباً محددة للدالة G(s). دعنا نفترض الآن الحالة البسيطة التي لا تكون فيها أقطاب محددة مكررة وأن N>M، بحيث تكون G(s) على صورة كسرية مثالية في المتير s. بمجرد تحديد الأقطاب يجب أن نكون قادرين على كتابة الدالة في صورة مجموع الكسور الجزئية التالية :

$$G(s) = \frac{K_1}{S - p_1} + \frac{K_2}{S - p_2} + \cdots + \frac{K_N}{S - p_N}$$

إذا استطعنا إيجاد القيم الصحيحة للثوابت K's. لكي تكون هذه الصورة صحيحة فإن التعبيرالتالي يجب أن يكون محققاً لأي قيمة اختيارية للـ s :

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)} \equiv \frac{K_1}{S-p_1} + \frac{K_2}{S-p_2} + \cdots + \frac{K_N}{S-p_N}$$ المعادلة رقم (٨.٦)

يمكن إيجاد قيم الـ K's عن طريق وضع الجانب الأيمن في صورة كسر واحد بمقام واحد يكون مماثل للمقام على الجانب الأيسر، وبعد ذلك نساوي المعاملات لكل قوة من قوى ال s في البسطين ونحل هذه المعادلات في الـ K's. ولكن هناك طريقة أخرى أسهل وهي عن طريق ضرب الجانبين في المعادلة (٨.٦) في $s-p_1$ :

$$(s-p_1)\frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)} = \begin{bmatrix} (s-p_1)\frac{k_1}{s-p_1} + (s-p_1)\frac{k_2}{s-p_2} + \cdots \\ +(s-p_1)\frac{k_N}{s-p_N} \end{bmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها كما يلي:

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)} = k_1 + (s-p_1)\frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + (s-p_1)\frac{k_N}{s-p_N}$$ المعادلة رقم (٨.٧)

حيث أن المعادلة (٨.٧) يجب أن تكون محققة لأي قيمة اختيارية لـ s، فإننا سنضع $s=p_1$، وبالتالي ستصبح كل المعاملات $(s-p_1)$ على الجانب الأيمن في المعادلة (٨.٧) أصفاراً، وتصبح هذه المعادلة كما يلي:

$$K_1 = \frac{b_M p_1^M + b_{M-1}p_1^{M-1} + \cdots + b_1 p_1 + b_0}{(p_1-p_2)\ldots(p_1-p_N)}$$

وبالتالي فقد حصلنا على قيمة $K_1$. بالطريقة نفسها يمكن إيجاد قيم كل الـ K's الأخرى. وبعد ذلك باستخدام زوج تحويل لابلاس التالي:

$$-e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha},\ \sigma < -\alpha \quad \text{و} \quad e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha},\ \sigma > -\alpha$$

يمكننا إيجاد تحويل لابلاس العكسي للمعادلة الأصلية.

**مثال ٨.٣**

**تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية**

احسب تحويل لايلاس العكسي للدالة $G(s) = \frac{10s}{(s+3)(s+1)}\ ,\ \sigma > -1$

يمكننا استخدام الكسور الجزئية لنضع التعبير السابق على الصورة التالية:

$$G(s) = \frac{\left[\frac{10s}{(s+1)}\right]_{s=-3}}{s+3} + \frac{\left[\frac{10s}{(s+3)}\right]_{s=-1}}{s+1},\quad \sigma > -1$$

$$G(s) = \frac{15}{s+3} - \frac{5}{s+1},\quad \sigma > -1$$

وبالتالي باستخدام الزوج:

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}\,,\ \ \sigma > -\alpha$$

نحصل على تحويل لابلاس العكسي التالي :

$$g(t) = 5(3e^{-3t} - e^{-t})u(t)$$

الحالة الأكثر عموماً عملياً هي عندما لا يكون هناك أقطاب متكررة، ولكن دعنا نرى ماذا سيحدث إذا كان لدينا قطبان متماثلان تماماً كما في المعادلة التالية :

$$G(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots . + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2(s-p_3)\ldots(s-p_N)}$$

إذا حاولنا بالطريقة نفسها إجراء الكسور الجزئية سنحصل على ما يلي :

$$G(s) = \frac{K_{11}}{s-p_1} + \frac{K_{12}}{s-p_1} + \frac{K_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي :

$$G(s) = \frac{K_{11}+K_{12}}{s-p_1} + \frac{K_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

وكما نرى فإن مجموع أي ثابتين اختيارين $K_{11}+K_{12}$ يكون في الحقيقة ثابتاً واحداً اختيارياً. وبالتالي فإن هناك عدد N-1 من الـ K بدلاً من عدد N وعند تشكيل المقام الكلي لمجموع الكسور الجزئية، فإنه لن يكون مثل مقام الدالة الأصلية. وبالتالي يمكننا تغيير شكل مفكوك الكسور الجزئية إلى الصورة التالية :

$$G(s) = \frac{K_1}{(s-p_1)^2} + \frac{K_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

وبالتالي إذا حاولنا حل هذه المعادلة عن طريق إيجاد المقام الكلي وساوينا قوى المتغير s في الطرفين سنجد أن لدينا عدد N من المعادلات في N-1 من المجاهيل، وليس هناك حل وحيد. حل هذه المشكلة هو أن نضع مفكوك الكسور الجزئية على الصورة :

$$G(s) = \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{K_{11}}{(s-p_1)} + \frac{K_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

ويمكننا إيجاد $K_{12}$ عن طريق ضرب طرفي المعادلة التالية :

$$\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_1)^2(s-p_3)\ldots(s-p_N)} \equiv \frac{K_{11}}{(s-p_1)^2}+\frac{K_{11}}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_3}+\cdots+\frac{K_N}{s-p_N}$$ المعادلة رقم (٨.٨)

في $(s-p_1)^2$ تعطى :

$$\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_3)\ldots(s-p_N)}=\begin{bmatrix} k_{12}+(s-p_1)k_{11}+(s-p_1)\dfrac{k_{23}}{s-p_3}+\cdots \\ +(s-p_1)\dfrac{k_N}{s-p_N} \end{bmatrix}$$

وبعد ذلك ندع $s=p_1$ فنحصل على :

$$K_{12}=\frac{b_M P_1^M+b_{M-1}P_1^{M-1}+\cdots.+b_1p_1+b_0}{(p_1-p_3)\ldots(p_1-p_N)}$$

ولكن عندما نحاول إيجاد قيمة $K_{11}$ بالطريقة العادية سنواجه مشكلة أخرى :

$$(s-p_1)\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}=\begin{bmatrix} (s-p_1)\dfrac{k_{12}}{s-p_1}+(s-p_1)\dfrac{k_{11}}{s-p_2} \\ +(s-p_1)\dfrac{k_3}{s-p_3}+\cdots+(s-p_1)\dfrac{k_N}{s-p_N} \end{bmatrix}$$

أو :

$$\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_1)(s-p_3)\ldots(s-p_N)}=\frac{k_{12}}{s-p_1}k_{11}$$

الآن إذا وضعنا $s=p_1$ سيكون هناك قسمة على الصفر في كل من الطرفين ولن نستطيع حل المعادلة مباشرة لإيجاد $K_{11}$. ولكن يمكننا تجنب هذه المشكلة بضرب المعادلة (٨.٨) في $(s-p_1)^2$ كما يلي :

$$\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_3)\ldots(s-p_N)}=\begin{bmatrix} k_{12}+(s-p_1)k_{11}+ \\ (s-p_1)^2\dfrac{k_3}{s-p_3}+\cdots+(s-p_1)^2\dfrac{k_N}{s-p_N} \end{bmatrix}$$

وبالتفاضل بالنسبة ل s نحصل على :

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_3)\ldots(s-p_N)}\right]=\begin{bmatrix} k_{11}+\dfrac{(s-p_3)2(s-p_1)^2-(s-p_1)^2}{(s-p_3)^2}k_3+\cdots \\ \dfrac{(s-p_q)2(s-p_1)-(s-p_1)^2}{(s-p_N)^2}K_N \end{bmatrix}$$

وبعد ذلك نضع $s=p_1$ ونحل المعادلة للحصول على $K_{11}$ :

$$k_{11}=\frac{d}{ds}\left[\frac{b_Ms^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_3)\ldots(s-p_N)}\right]_{S\to P_1}=\frac{d}{ds}[(s-p_1)^2G(s)]_{S\to P_1}$$

إذا كان هناك أقطاب مكررة لدرجات أعلى مثل الدرجة الثالثة، أو الرابعة، وهكذا (وهذا غير عادي عملياً)، يمكننا حساب هذه المعاملات عن طريق مد فكرة التفاضل إلى التفاضل المتعدد. عموماً إذا كانت H(s) على الصورة التالية :

$$H(s)=\frac{b_Ms^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots.+b_1s+b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_{N-1})(s-p_N)^m}$$

والتي تحتوي N-1 من الأقطاب الأحادية وعدد N من الأقطاب المتكررة من الدرجة m، فإنه يمكننا كتابة ما يلي :

$$H(s)=\frac{\mathrm{k}_1}{s-p_1}+\frac{\mathrm{k}_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{N}-1}}{s-p_{N-1}}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{N,m}}}{(s-p_N)^m}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{N,m}-1}}{(s-p_N)^{m-1}}+\cdots+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{N,1}}}{s-p_N}$$

حيث الـ K's أقطاب أحادية ويتم إيجادها بالطريقة السابقة والـ K's للأقطاب المتكررة $p_q$ من الدرجة m في المقام على الصورة $(s-p_q)^{m-k}$ ستكون :

$$K_{q,k}=\frac{1}{(m-k)!}\frac{d^{m-k}}{\mathrm{ds}^{\mathrm{m-k}}}\left[(\mathrm{s}-\mathrm{p_q})\right]_{\mathrm{s}\to\mathrm{p_q}},k=1,2,\ldots,m \qquad \text{المعادلة رقم (٨.٩)}$$

ومن المفهوم أن 0!=1.

**مثال ٨.٤**

**تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية**

احسب تحويل لابلاس العكسي للدالة :

$$G(s)=\frac{s+5}{s^2(s+2)}\ ,\quad \sigma>0$$

هذه الدالة لها قطب مكرر عند s=0. ولذلك سيكون تفكيك الدالة في صورة الكسور الجزئية كالتالي :

$$G(s)=\frac{K_{12}}{s^2}+\frac{K_{11}}{s}+\frac{K_3}{s+2}\ ,\quad \sigma>0$$

يمكن إيجاد $K_{12}$ عن طريق ضرب G(s) في $s^2$، ووضع s=0 في التعبير الباقي كما يلي :

$$K_{12} = [s^2 G(s)]_{s\to 0} = 5/2$$

يمكننا إيجاد $K_{11}$ بضرب G(s) في $s^2$، والتفاضل بالنسبة لـ s ووضع s=0 في التعبير الباقي كما يلي :

$$\mathrm{K}_{11} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}[\mathrm{s}^2 \mathrm{G(s)}]_{\mathrm{s}\to 0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\frac{\mathrm{s}+5}{\mathrm{s}+2}\right]_{\mathrm{s}\to 0} = \left[\frac{(\mathrm{s}+2)-(\mathrm{s}+5)}{(\mathrm{s}+2)^2}\right]_{\mathrm{s}\to 0} = -\frac{3}{4}$$

أما $K_3$ فيمكن حسابها بالطرق العادية وسنجد أنها ستكون ¾. وبالتالي يمكن كتابة G(s) كما يلي :

$$G(s) = \frac{5}{2s^2} - \frac{3}{4s} + \frac{3}{4(s+2)} \;,\quad \sigma > 0$$

وبالتالي سيكون التحويل العكسي كما يلي :

$$g(t) = \left(\frac{5}{2}t - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t}\right)u(t) = \frac{10t - 3(1 - e^{-2t})}{4}u(t)$$

دعنا الآن نفحص تأثير مخالفة، أو انتهاك واحد من الافتراضات في الشرح الأصلي لطريقة مفكوك الكسور الجزئية، وهو افتراض أن الدالة :

$$G(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots . + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$

عبارة عن كسر مثالي في المتغير s. إذا كانت M≥N فإننا لن نستطيع إجراء الكسور الجزئية لأن الكسور الجزئية تكون على الصورة :

$$G(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

بتجميع هذه العناصر في مقام واحد نحصل على :

$$(s) = \frac{K_1 \prod_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{k=N}(s-p_k) + K_2 \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{k=N}(s-p_k) + \cdots + K_2 \prod_{\substack{k=1\\k\neq N}}^{k=N}(s-p_k)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$

أعلى أس في البسط هو N-1. ولذلك فإن أي نسبة من كثيرتي حدود في المتغير s يكون مطلوب فكها في صورة كسور جزئية يجب أن تكون درجة البسط في s ليست أعلى من N-1 مما يجعل هذه النسبة نسبة مثالية في s. إن

ذلك لا يمثل عائقاً كبيراً لأنه إذا كانت النسبة غير مثالية في المتغير s ، فإنه في العادة يتم قسمة البسط على المقام حتى نصل إلى باقي قسمة تكون درجته أقل من درجة المقام. وبالتالي سيكون لدينا تعبير يتكون من مجموع من مجموعة من العناصر التي لها أس موجب صحيح بالإضافة إلى كسر مثالي في المتغير s. العناصر المكونة من أسس صحيحة للمتغير s سيكون تحويل لابلاس لها عبارة صدمات وأحاديات ذات درجات عليا.

**مثال ٨.٥**

**تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية**

احسب تحويل لابلاس للدالة التالية : $G(s) = \frac{10s^2}{(s+1)(s+3)}\ ,\ \sigma > 0$

هذه الدالة النسبية ليست كسراً مثالياً في المتغير s. بقسمة البسط على المقام نحصل على :

$$s^2 + 4s + 3\overline{)10s^2}\quad 10 \Rightarrow \frac{10s^2}{(s+1)(s+3)} = 10 - \frac{40s+30}{s^2+4s+3}.$$

$$\frac{10s^2+40+30}{-40s-30}$$

ولذلك فإن :

$$G(s) = 10 - \frac{40s+30}{(s+1)(s+3)}\ ,\quad \sigma > 0$$

بإجراء الكسور الجزئية على الكسر المثالي نحصل على :

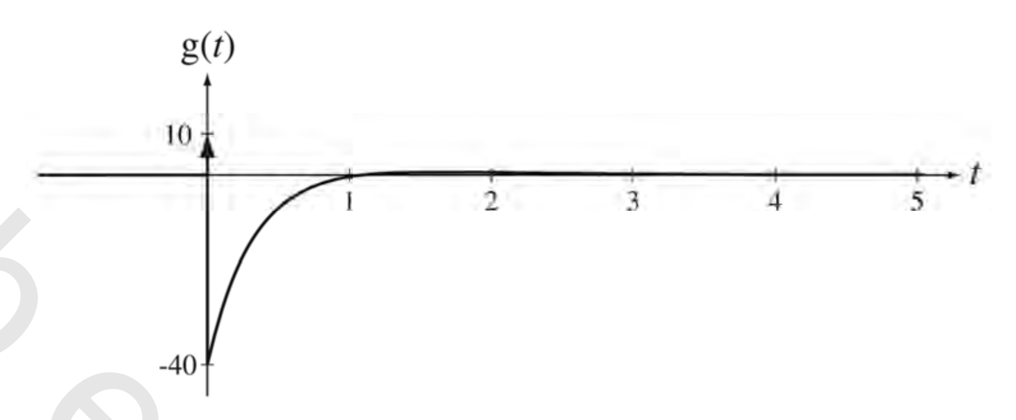
$$G(s) = 10 - 5\left(\frac{9}{s+3} - \frac{1}{s+1}\right)\ ,\quad \sigma > 0$$

وبعد ذلك باستخدام الأزواج التحويلية التالية :

$$\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1 \quad و \quad e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$

نحصل على تحويل لابلاس العكسي كما يلي ، وكما في شكل (٨.١٤) :

$$g(t) = 10\delta(t) - 5(e^{-3at} - e^{-t})u(t)$$




**شكل رقم (٨.١٤) تحويل لابلاس العكسي للدالة: $\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{10s^2}}{\mathbf{(s+1)(s+3)}}$**

**مثال ٨.٦**

**تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية**

احسب تحويل لابلاس العكسي للدالة : $G(s) = \frac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)}$ ,  $\sigma > 2$

إذا اتبعنا الطريقة العادية في إيجاد الكسور الجزئية فإن علينا أولا تحليل المقام على الصورة التالية :

$$G(s) = \frac{s}{(s-3)(s-2+j)(s-2-j)} \;,\;\; \sigma > 2$$

حيث سنجد أن هناك اثنين من الأقطاب المركبة المترافقة. طريقة التحليل بالكسور الجزئية ما زالت تعمل أيضاً في ظل هذه الأقطاب المركبة. بإجراء الكسور الجزئية نحصل على ما يلي :

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{(3+j)/4}{s-2+j} - \frac{(3-j)/4}{s-2-j} \;,\;\; \sigma < 2$$

في وجود هذه الأقطاب المركبة يكون أمامنا خيارين :

١- نستمر كما لو كانت هذه الأقطاب حقيقية ، حيث نوجد التعبير في النطاق الزمني ثم نبسطه.

٢- جمع الكسرين الأخيرين في كسر واحد بكل المعاملات الحقيقية ونوجد تحويل لابلاس العكسي له بالبحث عن هذه الصورة في الجداول القياسية.

**الطريقة ١:**

$$g(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{3+j}{4}e^{(2-j)t} + \frac{3-j}{4}e^{(2+j)t}\right)u(-t)$$

وهذا تعبيراً صحيحاً للدالة g(t) ولكنه ليس في الصورة المريحة. من الممكن تعديله إلى تعبير يحتوي دوال حقيقية القيمة فقط. بتوحيد المقام واستخدام بعض قوانين الدوال المثلثية :

$$g(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{3e^{(2-j)t} + 3e^{(2+j)t} + je^{(2-j)t} - je^{(2+j)t}}{4}\right)u(-t)$$

$$g(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{3t} + e^{2t}\frac{3(e^{-jt} + e^{jt}) + j(e^{-jt} - e^{jt})}{4}\right)u(-t)$$

$$g(t) = \left(\frac{3}{2}\right)\left\{e^{2t}\left[\cos(t) + \left(\frac{1}{3}\right)\sin(t)\right] - e^{3t}\right\}u(-t)$$

**الطريقة ٢ :**

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{1}{4}\frac{(3+j)(s-2-j) + (3-j)(s-2+j)}{s^2 - 4s + 5}\ ,\quad \sigma < 2$$

عند تبسيط البسط يكون لدينا كثيرة حدود من الدرجة الأولى مقسومة على كثيرة حدود من الدرجة الثانية في المتغير s.

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{1}{4}\frac{6s-10}{s^2-4s+5} = \frac{3/2}{s-3} - \frac{6}{4}\frac{s-5/3}{(s-2)^2+1}\ ,\quad \sigma < 2$$

في جدول تحويلات لابلاس نحصل على :

$$-e^{-\alpha t}\cos(w_0 t)\,u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + w_0^2}\ ,\quad \sigma < -\alpha$$

وأيضاً :

$$-e^{-\alpha t}\sin(w_0 t)\,u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{w_0}{(s+\alpha)^2 + w_0^2}\ ,\quad \sigma < -\alpha$$

صورة المقام في الدالة التي معنا يتوافق مع صور مقامات هذه الدالة ولكن صورة البسط لا تتوافق. ولكن يمكننا إضافة وطرح مكونات لنجعل الدالتين النسبيتين يكون بسطهما متوافقاً مع الدوال التي في الجدول.

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{3}{2}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(s-2)^2+1}\right],\ \sigma < 2 \qquad \text{المعادلة رقم (٨.١٠)}$$

نستطيع الآن أن نوجد التحويل العكسي كما يلي :

$$g(t) = \left(\frac{3}{2}\right)\left\{e^{2t}\left[\cos(t) + \left(\frac{1}{3}\right)\sin(t)\right] - e^{3t}\right\}u(-t)$$

بمعرفة أن هناك جذرين مركبين مترافقين، فإنه يمكننا تجميع العنصرين اللذين لهما جذور مركبة في عنصر واحد بمقام واحد على الصورة التالية :

$$G(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} = \frac{A}{s-3} + \frac{s(K_2+K_3) - K_3p_2 - K_2p_3}{s^2-4s+5}$$

وحيث إن كلاً من $K_2$ و $K_3$ هي ثوابت اختيارية :

$$G(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{Bs+C}{s^2-4s+5}$$

(كل من B و C سيكونان أرقاماً حقيقية لأن $K_2$ و $K_3$ مركبان مترافقان، وكذلك $p_2$ و $p_3$). وبالتالي يمكننا إيجاد مفكوك كسور جزئية في هذه الصورة. قيمة A سيتم إيجادها بالطرق العادية لتكون 3/2. حيث إن G(s) ومفكوكها في صورة الكسور الجزئية يجب أن تتساوى لأي قيمة اختيارية للمتغير s، وبالتالي :

$$G(s) = \frac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)}$$

ويمكننا كتابة :

$$\left[\frac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)}\right]_{s=0} = \left[\frac{3/2}{s-3} + \frac{Bs+C}{s^2-4s+5}\right]_{s=0}$$

أو :

$$0=-1/2+C/5 \rightarrow C=5/2$$

وبالتالي :

$$\frac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)} = \frac{3/2}{s-3} + \frac{Bs+5/2}{s^2-4s+5}$$

ويمكننا إيجاد B بأن نضع s تساوي أي رقم مريح وليكن واحداً، وبالتالي سنحصل على :

$$-\frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{B+5/2}{2} \quad \rightarrow \quad B = -\frac{3}{2}$$

وبالتالي يمكن كتابة G(s) كما يلي :

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{3}{2}\frac{s-5/3}{s^2-4s+5}$$

وهذه النتيجة مشابهة تماماً لما حصلنا عليه في المعادلة (٨.١٠) وعلى ذلك فنتيجة الحل كانت كما هي.

ماتلاب به دالة ضمنية تسمى residue يمكن استخدامها في إجراء الكسور الجزئية. الصورة العامة لهذه الدالة هي :

[r,p,k]=residue(b,a)

حيث b هي متجه معاملات قوى المتغير s في البسط مرتبة تنازلياً تبعاً لهذه القوى، و a هي متجه معاملات قوى المتغير s في المقام مرتبة تنازلياً أيضاً، و r هي متجه المتبقيات، و p هي متجه موضع الأقطاب المحددة، و k هي متجه ما يسمى العناصر المباشرة، التي تنتج عندما تكون درجة البسط تساوي أو أكبر من درجة المقام. المتجهات a و b تحتوي دائماً كل قوى المتغير s تنازلياً حتى القوة صفر. كلمة residue أو المتبقي تأتي من نظريات التكامل على المسار أو الكونتور المغلق في المستوى المركب، وهذا الموضوع خارج نطاق هذا الكتاب. ما يهمنا هنا هو أن المتبقي أو ال residue هو البسط الناتج في مفكوك الكسور الجزئية.

**مثال ٨.٧**

**الكسور الجزئية باستخدام الدالة residue في ماتلاب**

أوجد مفكوك الكسور الجزئية للدالة التالية : $H(s)=\frac{s^2+3s+1}{s^4+5s^3+2s^2+7s+3}$

في ماتلاب سيكون لدينا ما يلي :

```
»b = [1 3 1] ; a = [1 5 2 7 3] ;
»[r,p,k] = residue(b,a) ;
»r
r =
        -0.0856
        0.0496 - 0.2369i
        0.0496 + 0.2369i
        -0.0135
»p
p =
        -4.8587
        0.1441 + 1.1902i
        0.1441 - 1.1902i
        -0.4295
»k
k =
        []
»
```

هناك ٤ أقطاب وهي: 4.8587- و 0.1441+j1.902 و 0.1441-j1.902 و 0.4295- والمتبقيات عند هذه الأقطاب هي: 0.0856- و 0.0496-j0.2369 و 0.0496+j0.2369 و 0.0135- على التوالي.لا يوجد هناك عناصر مباشرة؛ لأن النسبة هي كسر مثالي في المتغير s. الآن يمكننا كتابة H(s) كما يلي:

$$H(s) = \frac{0.0496 - j0.2369}{s - 0.1441 - j1.1902} + \frac{0.0496 + j0.2369}{s - 0.1441 + j1.1902} - \frac{0.0856}{s + 4.8587} - \frac{0.0135}{s + 0.4295}$$

أو بتجميع العنصرين الذين لهما أقطاب ومتبقيات مركبة في عنصر واحد مع معاملات حقيقية كما يلي:

$$H(s) = \frac{0.0991s + 0.5495}{s^2 - 0.2883s + 1.437} - \frac{0.0856}{s + 4.8587} - \frac{0.0135}{s + 0.4295}$$

**مثال ٨.٨**

**استجابة نظام LTI**

احسب الاستجابة y(t) لنظام LTI في الأحوال التالية:

(أ) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{-4t}u(t)$ والإثارة هي x(t)=u(t)

(ب) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{-4t}u(t)$ والإثارة هي x(t)=u(-t)

(ج) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{4t}u(-t)$ والإثارة هي x(t)=u(t)

(د) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{4t}u(-t)$ والإثارة هي x(t)=u(-t)

(أ)
$$h(t) = 5e^{-4t}u(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{5}{s+4}, \quad \sigma > -4$$
$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$

ولذلك:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{5}{s(s+4)}, \quad \sigma > 0$$

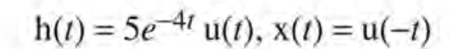
يمكن التعبير عن Y(s) باستخدام الكسور الجزئية كما يلي:

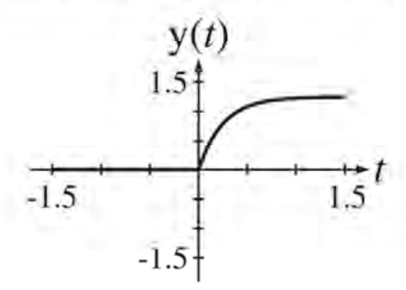
$$Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}, \sigma > 0$$

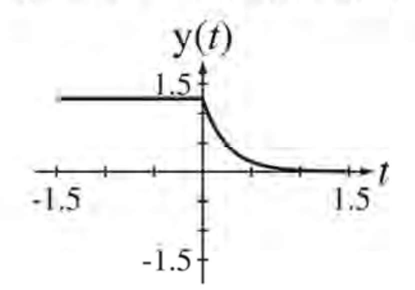
$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right)(1 - e^{-4t})u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}, \sigma > 0$$

كما في شكل (٨.١٥).

h(t) = 5e^{−4t} u(t), x(t) = u(t)

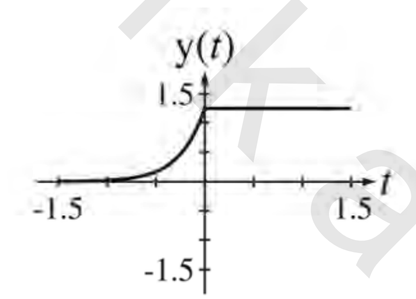


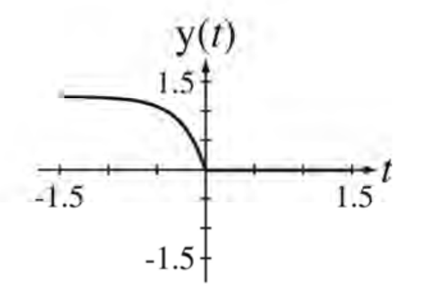




h(t) = 5e^{4t} u(−t), x(t) = u(t)

h(t) = 5e^{4t} u(−t), x(t) = u(−t)




**شكل رقم (٨.١٥) استجابة الأربعة الأنظمة**

(ب) $x(t) = u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s) = -\frac{1}{s}\ , \ \sigma < 0$

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{5}{s(s+4)}\ , \ -4 < \sigma < 0$$

$$Y(s) = -\frac{\frac{5}{4}}{s} + \frac{5/4}{s+4}\ , \ \ -4 < \sigma < 0$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right)[e^{-4t}u(t) + u(-t)] \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = -\frac{5/4}{s} + \frac{5/4}{s+4}\ , \ -4 < \sigma < 0$$

كما في شكل (٨.١٥).

(ج) $h(t) = 5e^{4t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} H(s) = -\frac{5}{s-4}\ , \ \sigma < 4$

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{5}{s(s+4)}\ , \ 0 < \sigma < 4$$

$$Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}\ , \ \ 0 < \sigma < 4$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right)[u(t) + e^{4t}u(-t)] \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}\ ,\ 0 < \sigma < 4$$

كما في شكل (٨.١٥).

(د) $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{5}{s(s+4)}\ ,\ \sigma < 0$

$$Y(s) = -\frac{5/4}{s} + \frac{5/4}{s-4}\ ,\quad \sigma < 0$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right)[u(-t) - e^{4t}u(-t)] \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = -\frac{5/4}{s} + \frac{5/4}{s-4}\ ,\ \ \sigma < 0$$

كما في شكل (٨.١٥).

## (٨.١٠) خواص تحويل فرير

افترض أن $g(t)$ و $h(t)$ لهما تحويلاً لابلاس التاليتان $G(s)$ و $H(s)$ ومنطقتا التقارب التاليتين $ROC_G$ و $ROC_H$ على التوالي، وبالتالي فإن الخواص المبينة في جدول ٨.٢ تكون مطبقة.

**جدول رقم ٨.٢ خواص تحويل لابلاس**

| | |
|---|---|
| الخطية | $\alpha g(t) + \beta h(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \alpha G(s) + \beta H(s), ROC \supset\ ROC_G \cap ROC_H$ |
| الإزاحة الزمنية | $g(t-t_0) \overset{\pounds}{\leftrightarrow} G(s)e^{-st_0}\ ,\ ROC =\ ROC_G$ |
| الإزاحة في النطاق s | $e^{s_0t}g(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s-s_0),\ ROC =\ ROC_G$ shifted by $s_0$<br>(s is in ROC if $s-s_0$ is in $ROC_G$ ) |
| التحجيم الزمني | $g(at) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/\lvert a\rvert)G(s/a),\ ROC =\ ROC_G$ scaled by a<br>(s is in ROC if $s/a$ is in $ROC_G$ ) |
| التفاضل الزمني | $\frac{d}{dt}g(t) \overset{\pounds}{\leftrightarrow} sG(s),\ ROC \supset\ ROC_G$ |
| التفاضل في النطاق s | $-t\,g(\tau) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds}G(s),\ ROC =\ ROC_G$ |
| التكامل الزمني | $\int_{0^-}^{t} g(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)/s\ ,\ ROC \supset\ ROC_G \cap ROC_H\ \ (\sigma > 0)$ |
| الالتفاف الزمني | $g(t) * h(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)H(s),\ ROC \supset\ ROC_G \cap ROC_H$ |
| نظرية القيمة الابتدائية | $g(0^+) = \lim_{s\to 0} sG(s)$ |
| نظرية القيمة التهائية | $\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$ if $\lim_{t\to\infty} g(t)$ exists |

**مثال ٨.٩**

**استخدام خاصية الإزاحة في النطاق s**

إذا كانت $X_1(s) = \frac{1}{s+5} \; , \; \sigma > -5$ و $X_2(s) = X_1(s-j4) + X_1(s+j4) \, , \, \sigma > -5$

فأوجد $x_2(t)$.

$$e^{-5t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+5} \; , \; \sigma > -5$$

باستخدام خاصية الإزاحة في النطاق s نحصل على:

$$e^{-(5-j4)t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-j4+5} \; , \; \sigma > -5$$ و

$$e^{-(5+j4)t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+j4+5} \; , \; \sigma > -5$$

ولذلك:

$$x_2(t) = e^{-(5-j4)t}u(t) + e^{-(5+j4)t}u(t) = e^{-5t}(e^{j4t} + e^{-j4t})u(t) = 2e^{-5t}\cos(4t)\,u(t)$$

تأثير الإزاحة بكميات متساوية في اتجاهين متعاكسين وموازية للمحور w في النطاق s والإضافة يقابله الضرب في جيب تمام سببي في النطاق الزمني. التأثير الكلي يكون تعديلاً بموجة حاملة مقموعة وثنائي الجانب، والتي سيتم شرحها في الفصل ١٢.

**مثال ٨.١٠**

**تحويل لابلاس لنبضتين مستطيلتين محجمتين زمنياً**

أوجد تحويل لابلاس للدالة x(t)=u(t)-u(t-a) والدالة x(2t)=u(2t)-u(2t-a).

لقد أوجدنا مسبقا تحويل لابلاس للدالة u(t)، وكان 1/s حيث σ>0. باستخدام خواص الخطية والإزاحة الزمنية،

$$u(t) - u(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1-e^{-as}}{s} , \quad \text{لكل } \sigma$$

والآن باستخدام خاصية التحجيم الزمني:

$$u(2t) - u(2t-a) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-\frac{as}{2}}}{s/2} = \frac{1-e^{-\frac{as}{2}}}{s} , \quad \text{لكل } \sigma$$

هذه النتيجة يكون لها معنى عندما نفترض أن u(2t)=u(t) و u(2t-a)=u(2(t-a/2))=u(t-a/2)

**مثال ٨.١١**

**استخدام التفاضل في النطاق s لاستنتاج أزواج التحويل**

باستخدام التفاضل في النطاق s وتحويل لابلاس الأساسي $u(t) \leftrightarrow 1/s,\ \sigma>0$، أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة $1/s^2,\ \sigma>0$.

$$u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s,\ \ \sigma>0$$

باستخدام الخاصية:

$$-tg(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds}(G(s))$$

فإن:

$$-tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} -\frac{1}{s^2},\ \ \sigma>0$$

ولذلك فإن:

$$ramp(t) = tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2},\ \ \sigma>0$$

بالطريقة نفسها يمكننا أن نمدد ذلك إلى الحالة العامة التالية:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}, \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s^3}, \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{6}{s^4}, \frac{d^4}{ds^4}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{24}{s^5}, \dots, \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

أزواج التحويل المقابلي لذلك ستكون:

$$t\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2},\ \ \sigma>0,\ \ \frac{t^2}{2}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^3},\ \ \sigma>0$$

$$\frac{t^3}{6}\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^4},\ \ \sigma>0, \dots, \qquad \frac{t^n}{n!}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^{n+1}},\ \ \sigma>0$$

**مثال ٨.١٢**

**استخدام خاصية التكامل الزمني لاستنتاج أزواج من التحويل**

في المثال ٨.١١ استخدمنا التكامل في التردد المركب لاستنتاج زوج تحويل لابلاس التالي:

$$tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2},\ \ \sigma>0$$

استنتج الزوج نفسه $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$ مستخدماً خاصية التكامل بدلا من ذلك:

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = f(x) = \left\{ \begin{matrix} \int_{-0}^{t} d\tau = t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{matrix} \right\} = tu(t)$$

ولذلك، فإن:

$$tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} x \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \;, \quad \sigma > 0$$

التكامل المتتالي لـ u(t) يعطي:

$$tu(t), \qquad \frac{t^2}{2} u(t), \qquad \frac{t^3}{6} u(t)$$

ويمكن استخدام ذلك لاستنتاج الصورة العامة التالية:

$$\frac{t^n}{n!} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^{n+1}} \;, \quad \sigma > 0$$

## (٨.١١) تحويل لابلاس أحادي الجانب

**التعريف**

في المقدمة عن تحويل لابلاس كان ظاهراً أنه إذا افترضنا المدى الكامل لكل الإشارات الممكن تحويلها، فإنه أحياناً يمكن إيجاد منطقة تقارب وأحياناً لا يمكن ذلك. إذا تركنا بعض الدوال المرضية أو الباثولوجية مثل $t^t$ و $e^{t^2}$ التي تنمو بسرعة أكبر من الدالةالأسية (والتي لا يعرف لها فائدة هندسية) وحددنا أنفسنا للدوال التي تكون صفراً قبل أو بعد الزمن t=0، فإن تحويل لابلاس ومنطقة التقارب تكون أسهل كثيراً. إن الجودة التي جعلت الدالة $g_1(t) = Ae^{at}u(t),\ a > 0$ والدالة $g_2(t) = Ae^{-at}u(-t),\ a > 0$ يمكن أن نوجد لها تحويل لابلاس هو أن كل منهما كانت محدودة بدالة الخطوة لتكون صفراً على مدى شبه لانهائي.

حتى الدالة البسيطة مثل g(t)=A المحدودة لكل قيم t، تسبب مشاكل؛ لأن معامل التقارب الذي يجعل تحويل لابلاس لهذه الدالة يتقارب لكل الأزمنة لا يمكن إيجاده. ولكن الدالة g(t)=Au(t) يمكن إيجاد تحويل لابلاس لها. إن وجود دالة وحدة الخطوة يسمح باختيار معامل تقارب للأزمنة الموجبة، مما يجعل تكامل تحويل لابلاس يتقارب. لهذا السبب (وأسباب أخرى)، فإن تعديل تحويل لابلاس بحيث يتجنب العديد من مشاكل التقارب يتم استخدامه عادة في التحليل العملي.

دعنا الآن نعيد تعريف تحويل لابلاس كالتالي: $G(s)=\int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt$. لقد غيرنا فقط الحد الأدنى للتكامل. تحويل لابلاس المعرف بالعلاقة $G(s)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt$ يسمى عادة تحويل لابلاس الثنائي الجانب. تحويل لابلاس المعرف بالدالة $G(s)=\int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt$ يسمى عادة تحويل لابلاس أحادي الجانب. التحويل الأحادي يكون محدوداً بمعنى أنه يستبعد سلوك الدالة في الزمن السالب. ولكن حيث إنه في التحليل العملي للأنظمة الحقيقية فإنه يمكن اختيار نقطة أصل زمنية بحيث تكون كل الإشارات تساوي صفراً قبل هذا الزمن، وهذا ليس فقط مشكلة عملية ولكنه له بعض المميزات. حيث إن الحد الأدنى للتكامل هو $t=0^-$، فإن أي سلوك للدالة g(t) قبل الزمن t=0 سيكون ليس له أهمية في التحويل. إن ذلك يعني أن أي دالة أخرى يكون لها السلوك نفسه عند أو بعد الزمن t=0 سيكون لها التحويل نفسه. لذلك لكي يكون التحويل وحيداً لدالة واحدة في النطاق الزمني، فإنه يجب تطبيقها فقط على الدوال التي تكون صفراً قبل الزمن t=0.

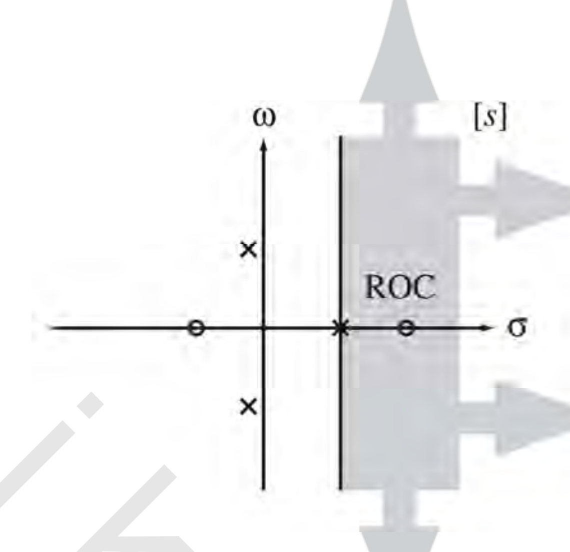
تحويل لابلاس العكسي الأحادي الجانب سيكون هو نفسه كما استنتجنا من قبل مع تحويل لابلاس ثنائي الجانب.

$$g(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)e^{+st}\,ds$$

ومن الشائع أن نرى زوج تحويل لابلاس كما في التعريف التالي:

$$\mathcal{L}\big(g(t)\big)=G(s)=\int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt,\ \ \mathcal{L}^{-1}\big(G(s)\big)=g(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)e^{+st}\,ds$$ المعادلة رقم (٨.١١)

تحويل لابلاس الأحادي الجانب تكون له منطقة تقارب ROC أبسط. إنها عادة تكون المنطقة في المستوى s على يمين كل الأقطاب المحددة للتحويل كما في شكل (٨.١٦).




**شكل رقم (٨.١٦) منطقة التقارب ROC لتحويل لابلاس الأحادي الاتجاه.**

**الخواص الفريدة الخاصة بتحويل فورير أحادي الاتجاه**

معظم خواص تحويل لابلاس الأحادي الاتجاه هي نفسها خواص التحويل الثنائي الاتجاه، ولكن هناك القليل من الاختلافات. إذا كانت g(t)=0 لكل قيم t<0 و h(t)=0 لقيم t<0 و :

$\mathcal{L}(h(t))=H(s)$ و $\mathcal{L}(g(t))=G(s)$

فإن الخواص الموضحة في الجدول ٨.٣ لتحويل لابلاس الأحادي والمختلفة عن التحويل الثنائي الاتجاه ستكون قابلة للتطبيق.

خاصية الإزاحة الزمنية الآن أصبحت محققة للإ زاحات في اتجاه اليمين (أزمنة تأخير) لأنه للإشارات المتأخرة فقط سيكون كل الجزء غير المساوي للصفر لها مازال مضموناً أن يكون ضمن حدود التكامل من $0^-$ حتى الما لانهاية. إذا تمت إزاحة إشارة ناحية اليسار (تقدم زمني)، فإن البعض منها قد يصبح قبل الزمن t=0 ولن يكون ضمن حدود تكامل تحويل لابلاس. إن ذلك قد يدمر العلاقة الفريدة بين تحويل الإشارة وتحويل الصورة المزاحة لها، مما يجعل من غير الممكن إيجاد علاقة بينهما بأي صورة عامة كما في شكل (٨.١٧).

بالطريقة نفسها، في خواص التحجيم الزمني والترددي، فإن الثابت a لا يمكن أن يكون سالباً؛ لأن ذلك قد يحول إشارة سببية إلى إشارة غير سببية، وتحويل لابلاس الأحادي يكون محققاً فقط للإشارات السببية.

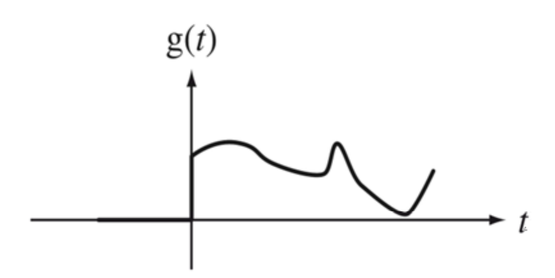
خواص التفاضل الزمني تعتبر خواص مهمة لتحويل لابلاس الأحادي. إن هذه هي الخواص التي تجعل حل المعادلات التفاضلية بالقيم الابتدائية طريقة نظامية. عند استخدام خواص التفاضل في حل المعادلات التفاضلية، فإن القيم الابتدائية يتم استدعاؤها آلياً في الصورة المناسبة كجزء ضمني في عملية التحويل. جدول ٨.٤ به العديد من تحويلات لابلاس الأحادية الشائعة الاستخدام.

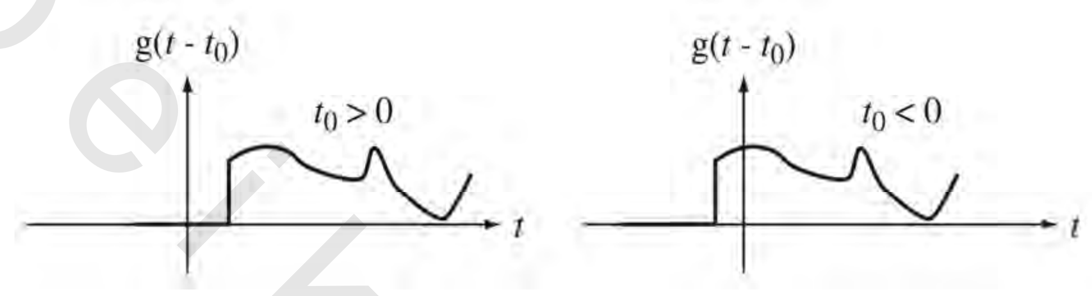
**جدول رقم ٨.٣ خواص تحويل لابلاس الأحادي الاتجاه المختلفة عن تحويل لابلاس الثنائي الاتجاه**

| | |
|---|---|
| الإزاحة الزمنية | $g(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)e^{-st_0}, \ \ t_0 > 0$ |
| التحجيم الزمني | $g(at) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/\|a\|)G(s/a), \ \ a > 0$ |
| تفاضل الدرجة الأولى | $\frac{d}{dt}g(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sG(s) - g(0^-)$ |
| التفاضل من الدرجة N | $\frac{d^N}{dt^N}(g(t)) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^N G(s) - \sum_{n=1}^{N} s^{N-n}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(g(t))\right]_{t=0^-}$ |
| التكامل الزمني | $\int_{0^-}^{t} g(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)/s$ |

**جدول رقم ٨.٤ أزواج تحويل لابلاس الأحادي الشائعة**

| |
|---|
| $\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1, \ \ \text{All } s$ |
| $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \ \ \sigma > 0$ |
| $u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \ldots u(t)}_{(n-1)\text{convolutions}} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s^n, \ \ \sigma > 0$ |
| $\text{ramp}(t) = t\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s^n, \ \ \sigma > 0$ |
| $e^{-\alpha t}\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \ \ \sigma > -\alpha$ |
| $t^n\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}, \ \ \sigma > 0$ |
| $te^{-\alpha t}\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \ \ \sigma > -\alpha$ |
| $t^n e^{-\alpha t}\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \ \ \sigma > -\alpha$ |
| $\sin(\omega_0 t)\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \ \ \sigma > 0$ |
| $\cos(\omega_0 t)\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \ \ \sigma > -\alpha$ |
| $e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}, \ \ \sigma > -\alpha$ |
| $e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\ u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}, \ \ \sigma > -\alpha$ |




**شكل رقم (٨.١٧) إزاحة الدالة السببية.**

**حل المعادلات التفاضلية مع القيم الابتدائية**

إن قوة تحويل لابلاس تكمن في استخدامه كأداة في تحليل ديناميكيات الأنظمة الخطية. لقد ذكر ذلك في هذا الموضع؛ لأن الأنظمة الخطية في الأنظمة المستمرة عادة ما يتم وصفها بمعادلات تفاضلية خطية، وباستخدام تحويل لابلاس يتم تمثيل التفاضل بالضرب في s. ولذلك فإن حل المعادلات التفاضلية تتحول إلى حل لمعادلة جبرية. تحويل لابلاس الأحادي بالذات يكون مناسبا في تحليل التوقيتات العابرة للأنظمة التي تبدأ إثارتها عند زمن البداية، الذي من الممكن أن يحدد عند $t=0$ للأنظمة غير المستقرة أو الأنظمة المدفوعة بدوال تكون غير محدودة مع زيادة الوقت.

**مثال ٨.١٣**

**حل معادلة تفاضلية بقيم ابتدائية باستخدام تحويل لابلاس الأحادي**

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x''(t)+7x'(t)+12x(t)=0$$

لقيم $t>0$ وعرضة للشروط الابتدائية التالية:

$$\frac{d}{dt}(x(t))_{t=0^-} = -4 \text{ و } x(0^-) = 2$$

بإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة نحصل على:

$$s^2X(s) - sx(0^-) - \frac{d}{dt}(x(t))_{t=0^-} + 7[sX(s) - x(0^-)] + 12X(s) = 0$$

ومن هذه المعادلة نوجد X(s) كما يلي :

$$X(s) = \frac{sx(0^-) + 7x(0^-) + \frac{d}{dt}(x(t))_{t=0^-}}{s^2 + 7s + 12}$$

ومنها :

$$X(s) = \frac{2s + 10}{s^2 + 7s + 12}$$

وبإجراء الكسور الجزئية :

$$X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{2}{s+4}$$

ومن جدول تحويلات لابلاس نعرف أن :

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$

وبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي سيكون :

$$x(t) = (4e^{-3t} - 2e^{-4t})u(t)$$

بالتعويض بهذه النتيجة في المعادلة التفاضلية الأصلية عندما $t \geq 0$ نحصل على :

$$\frac{d^2}{dt^2}[4e^{-3t} - 2e^{-4t}] + 7\frac{d}{dt}[4e^{-3t} - 2e^{-4t}] + 12[4e^{-3t} - 2e^{-4t}] = 0$$

$$36e^{-3t} - 32e^{-4t} - 84e^{-3t} + 56e^{-4t} + 48e^{-3t} - 24e^{-4t} = 0$$

$$0 = 0$$

مما يثبت أن x(t) التي حصلنا عليها تحل المعادلة التفاضلية فعلاً. وأيضاً :

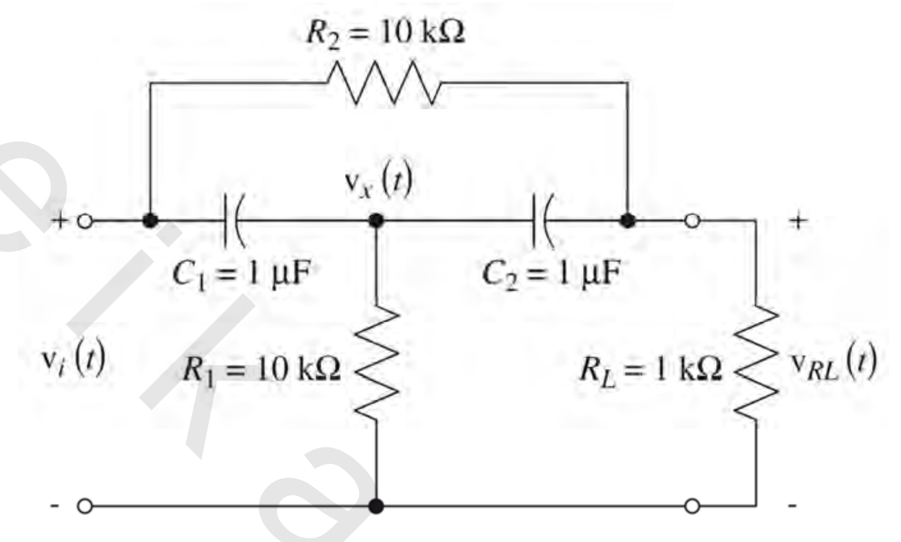
$$\frac{d}{dx}(x(t))_{t=0^-} = -12 + 8 = -4 \quad \text{و} \quad x(0^-) = 4 - 2 = 2$$

مما يثبت أن هذا الحل يحقق أيضاً الشروط الابتدائية.

**مثال ٨.١٤**

**إستجابة الدائرة T ذات الجسر**

في شكل (٨.١٨) كانت الإثارة تساوي $v_i(t)=10u(t)$ فولت. احسب استجابة الحالة صفر $v_{RL}(t)$.




**شكل رقم (٨.١٨) الدائرة T ذات الكوبري**

من الدائرة يمكننا كتابة معادلات العقد كما يلي :

$$C_1\frac{d}{dt}[v_x(t)-v_i(t)]+C_2\frac{d}{dt}[v_x(t)-v_{RL}(t)]+C_1v_x(t)=0$$

$$C_2\frac{d}{dt}[v_{RL}(t)-v_x(t)]+C_Lv_{RL}(t)+C_2[v_{RL}(t)-v_i(t)]=0$$

حيث $G_1=1/R_1=10^{-4}S$ و $G_2=1/R_2=10^{-4}S$ و $G_L=10^{-3}S$. بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة :

$$C_1\{sv_x(s)-v_x(0^-)-[sv_i(s)-v_i(0^-)]\}+C_2\{sv_x(s)-v_x(0^-)-[sv_{RL}(s)-v_{RL}(0^-)]\}+C_1v_x(s)=0$$

$$C_2\{sv_{RL}(s)-v_{RL}(0^-)-[sv_x(s)-v_x(0^-)]\}+C_Lv_{RL}(s)+C_2[v_{RL}(s)-v_i(s)]=0$$

حيث إننا نبحث أن استجابة الحالة صفر، فإن كل الشروط الابتدائية ستكون أصفاراً، وبالتالي يمكن تبسيط المعادلة كما يلي :

$$sC_1[v_x(s)-v_i(s)]+sC_2\frac{d}{dt}[v_x(s)-v_{RL}(s)]+C_1v_x(s)=0$$
$$sC_2[v_{RL}(s)-v_x(s)]+C_Lv_{RL}(s)+C_2[v_{RL}(s)-v_i(s)]=0$$

تحويل لابلاس للإثارة هو $V_i(s)=10/s$ ، وبالتالي فإن :

$$\begin{bmatrix} s(C_1+C_2)+C_1 & -sC_2 \\ -sC_2 & sC_2+(G_L+G_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x(s) \\ v_{RL}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10C_1 \\ 10C_{2/s} \end{bmatrix}$$

المحددة ذات الأبعاد 2x2 للمصفوفة هي :

$$\Delta= \left[s\left(C_1+C_2\right)+C_1\right]\left[sC_2+\left(C_L+C_2\right)\right]-s^2C_2^2$$
$$=s^2C_1C_2+s\left[C_1C_2+\left[(C_L+G_2)(C_1+C_2)\right]\right]+C_1(C_L+G_2)$$

وباستخدام قانون كرامر Cramer ، فإن حل استجابة تحويل لابلاس يمكن كتابتها كما يلي :

$$v_{RL}(s)=\frac{\begin{vmatrix} s(C_1+C_2)+C_1 & -sC_2 \\ -sC_2 & sC_2+(C_L+G_2) \end{vmatrix}}{s^2C_1C_2+s\left[C_1C_2+\left[(G_L+G_2)(C_1+C_2)\right]\right]+G_1(G_L+G_2)}$$

$$v_{RL}(s)=10\frac{s^2C_1C_2+sC_2+(C_L+C_2)+C_1C_2}{s\left\{s^2C_1C_2+s\left[C_1C_2+\left[(G_L+G_2)(C_1+C_2)\right]\right]+G_1(G_L+G_2)\right\}}$$

وبالتالي :

$$v_{RL}(s)=10\frac{s^2+sG_2(C_1+C_2)/C_1C_2+G_1G_2/C_1C_2}{s\{s^2+s[G_1/C_1+(G_L+G_2)(C_1+C_2)/C_1C_2]+G_1(G_L+G_2)/C_1C_2\}}$$

وباستخدام القيم العددية للمكونات نحصل على :

$$v_{RL}(s)=10\frac{s^2+200s+10{,}000}{s(s^2+2300s+110{,}000)}$$

وبإجراء الكسور الجزئية نحصل على :

$$v_{RL}(s)=\frac{0.9091}{s}-\frac{0.243}{s+48.86}+\frac{9.334}{s+2251}$$

بإجراء تحويل لابلاس العكسي :

$$v_{RL}(t)[0.9091-0.243e^{-48.86t}+9.334e^{-225t}]u(t)$$

كاختبار جزئي على صحة هذه الاستجابة ، فإن الاستجابة تقترب من 0.9091 مع اقتراب الزمن t من الما لانهاية. وهذا هو تماماً الجهد الذي سيخرج عند عمل القسمة الجهدية بين المقاومتين بافتراض أن المكثف مفتوح. وبالتالي ، فإن القيمة النهائية تبدو صحيحة. الاستجابة الابتدائية عند الزمن $t=0^+$ ستكون١٠ فولت. في البداية يكون

المكثفات غير مشحونة ، وبالتالي عند الزمن $t=0^+$ سيكون جهدا المكثفين مساويين للصفر ، وسيكون جهدا الإثارة والاستجابة الشيء نفسه. وبالتالي فإن القيمة الابتدائية تبدو صحيحة أيضاً. هذان الاختبارين على الحل لا يضمنان بأن الحل سيكون صحيحاً عند كل الأزمنة ، ولكنهما اختباران جيدان على معقولية الحل الناتج ويمكن استخدامهما في اكتشاف أي خطأ.

## (٨.١٢) مخططات الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

عمليا ، فإن أكثر أنواع دوال العبور شيوعاً هي الدوال التي يمكن التعبير عنها كنسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s كالتالي :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

هذا النوع من دوال العبور يمكن تحليلة إلى الصورة التالية :

$$I(s) = A\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_M)}$$

وبالتالي يمكن كتابة الاستجابة الترددية للنظام كالتالي :

$$H(j\omega) = A\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\dots(j\omega-z_M)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\dots(j\omega-p_M)}$$

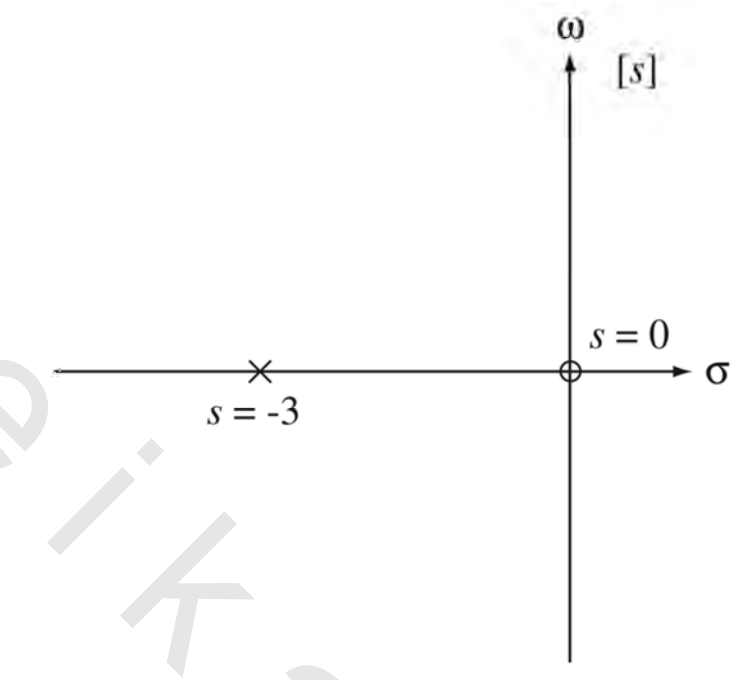
لكي نبين التفسير التخطيطي لهذه النتيجة بمثال ، افترض أن دالة العبور ستكون :

$$H(s) = \frac{3s}{s+3}$$

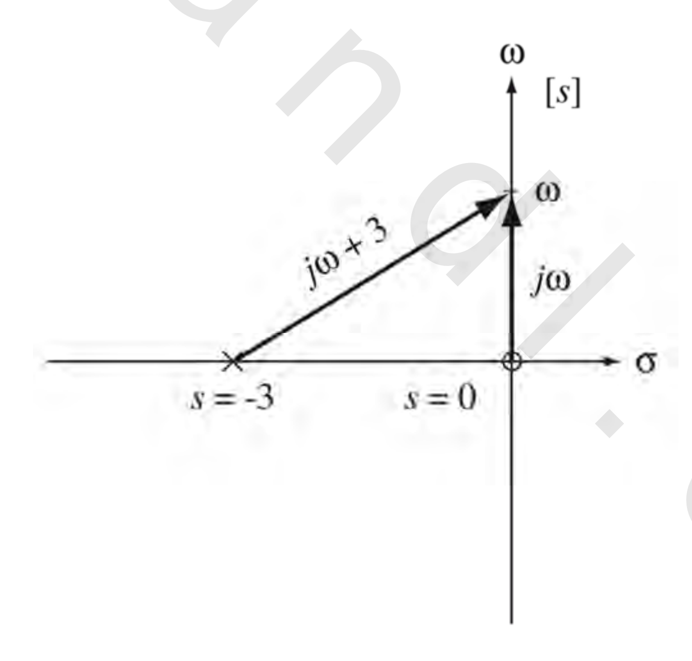
دالة العبور هذه لها صفر عند $s=0$ وقطب عند $s=-3$ كما في شكل (٨.١٩). بتحويل دالة العبور إلى استجابة ترددية ستكون :

$$H(j\omega) = 3\frac{j\omega}{j\omega+3}$$

الاستجابة الترددية ثلاث مرات من نسبة $j\omega$ إلى $j\omega+3$. يمكن التفكير في كل من البسط والمقام كمتجهات في المستوى s كما في شكل (٨.٢٠) لأي قيمة اختيارية للمتغير w.




**شكل رقم (٨.١٩) مخطط الأقطاب والأصفار للدالة H(s)=3s/(s+3).**




**شكل رقم (٨.٢٠) مخطط يوضح المتجهات jω و jω+3.**

مع تغير التردد w، فإن المتجهات ستتغير أيضاً. مقدار الاستجابة الترددية عند أي تردد يكون ثلاثة أمثال نسبة مقدار متجه البسط مقسوماً على مقدار متجه المقام كما يلي:

$$|H(j\omega)| = 3\frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|}$$

زاوية الاستجابة الترددية عند أي تردد تساوي زاوية الثابت 3+ (وهي صفر) مجموعة مع زاوية البسط $j\omega$ (تساوي مقدار ثابت $\pi/2$ بالتقدير الدائري بالنسبة للترددات الموجبة ومقدار ثابت $-\pi/2$ للترددات السالبة)، ناقص زاوية المقام $j\omega+3$.

$$\measuredangle H(j\omega)= \measuredangle 3 + \measuredangle j\omega - \measuredangle (j\omega+3)$$

عند الترددات التي تقترب من الصفر من الناحية الموجبة، فإن طول متجه البسط يقترب من الصفر وطول متجه المقام يقترب من قيمة صغرى تساوي 3، مما يجعل مقدار متجه الاستجابة الترددية الكلية تقترب من الصفر. في هذه الحدود نفسها تكون زاوية المتجه $j\omega$ هي $\pi/2$ بالتقدير الدائري وزاوية المتجه $j\omega+3$ تقترب من الصفر بحيث أن زاوية الاستجابة الكلية ستقترب من $\pi/2$ بالتقدير الدائري:

$$\lim_{\omega\to 0^+} |H(j\omega)| = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{|j\omega)|}{|j\omega + 3|} = 0$$

وأيضاً:

$$\lim_{\omega\to 0^+}\measuredangle H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0^+}\measuredangle j\omega - \lim_{\omega\to 0^+}\measuredangle(j\omega + 3) = \frac{\pi}{2} - 0 = \pi/2$$

عندما تتقارب الترددات من الصفر من الجانب السالب، فإن طول متجه البسط يقترب من الصفر وطول متجه المقام يقترب من قيمة صغرى تساوي 3، مما يجعل مقدار الاستجابة الترددية الكلية يقترب من الصفر كما سبق. في هذه الحدود نفسها، فإن زاوية الـ $j\omega$ ستكون $-\pi/2$ بالتقدير الدائري، وزاوية الـ $j\omega+3$ تقترب من الصفر بحيث أن الزاوية الكلية للاستجابة الترددية ستقترب من $-\pi/2$ بالتقدير الدائري،

$$\lim_{\omega\to 0^-} |H(j\omega)| = \lim_{\omega\to 0^-} \frac{|j\omega)|}{|j\omega + 3|} = 0$$

وأيضاً:

$$\lim_{\omega\to 0^-}\measuredangle H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0^-}\measuredangle j\omega - \lim_{\omega\to 0^-}\measuredangle(j\omega + 3) = -\frac{\pi}{2} - 0 = \pi/2$$

مع اقتراب التردد من الما لانهاية الموجبة فإن طول كل من المتجهين يقترب من القيمة والاستجابة الترددية الكلية تقترب من 3. في نفس هذه الحدود فإن زاوية الـ $j\omega$ ستكون $\pi/2$ بالتقدير الدائري وزاوية الـ jw+3 تقترب أيضاً من $\pi/2$ بالتقدير الدائري بحيث أن الزاوية الكلية للاستجابة الترددية ستقترب من الصفر ،

$$\lim_{\omega\to+\infty}|H(j\omega)| = \lim_{\omega\to+\infty} 3\frac{|j\omega)|}{|j\omega+3|} = 3$$

وأيضاً :

$$\lim_{\omega\to+\infty}\measuredangle\,\mathrm{H}(j\omega) = \lim_{\omega\to+\infty}\measuredangle j\omega - \lim_{\omega\to+\infty}\measuredangle(j\omega+3) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 0$$

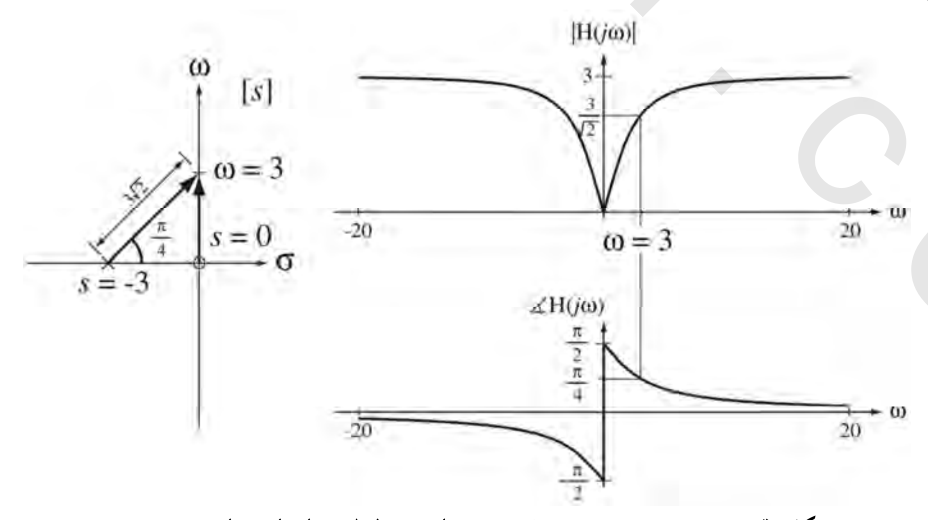
مع اقتراب التردد من ناقص ما لانهاية فإن طول المتجهين يقترب من القيمة ا ومقدار الاستجابة الترددية الكلية نفسه الذي يقترب من الصفر، كما سبق. في النهاية نفسها ، فإن زاوية الـ $j\omega$ ستكون $-\pi/2$ بالتقدير الدائري وزاوية الـ $j\omega+3$ تقترب من $-\pi/2$ بالتقدير الدائري وبالتالي ، فإن زاوية الاستجابة الترددية الكلية ستكون صفراً ،

$$\lim_{\omega\to-\infty}|H(j\omega)| = \lim_{\omega\to-\infty} 3\frac{|j\omega)|}{|j\omega+3|} = 3$$

وأيضاً :

$$\lim_{\omega\to-\infty}\measuredangle\mathrm{H}(j\omega) = \lim_{\omega\to-\infty}\measuredangle j\omega - \lim_{\omega\to-\infty}\measuredangle\,(j\omega+3) = -\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

هذه المعاملات التي تم استنتاجها من مخطط الأقطاب والأصفار يتولد عنها مخطط لمقدار وزاوية الاستجابة الترددية كما في شكل (٨.٢١). هذا النظام يكبح الترددات المنخفضة نسبة إلى الترددات المرتفعة. إن أي نظام بهذا الشكل من الاستجابة الترددية يسمى عادة بمرشح منفذ للترددات المرتفعة ؛ لأنه عامة يسمح بمرور الترددات المرتفعة ويمنع أو يكبح الترددات المنخفضة.




**شكل رقم (٨.٢١) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام دالة العبور له هي H(s)=3s/(s+3).**

**مثال ٨.١٥**

**الاستجابة الترددية لنظام من مخطط الأقطاب والأصفار**

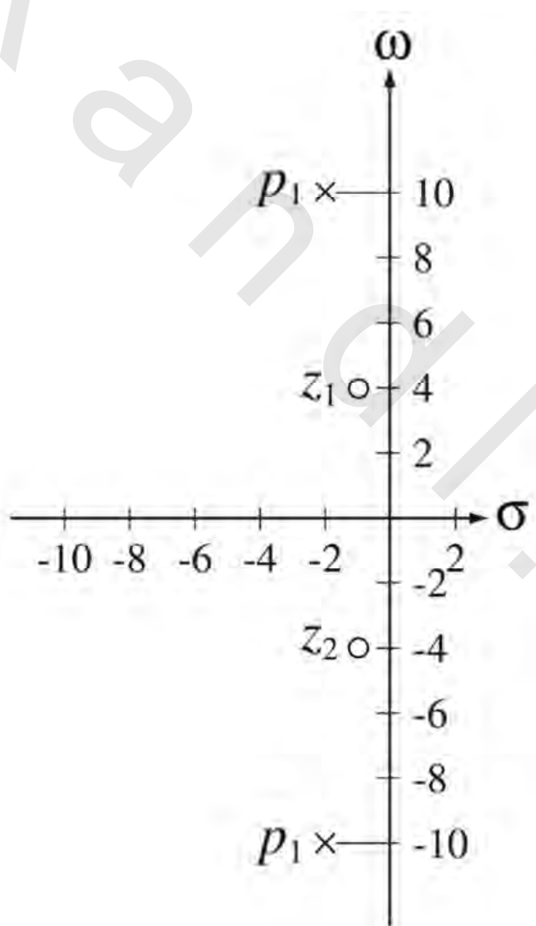
احسب مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام دالة العبور له هي :

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 4s + 104}$$

هذه الدالة يمكن تحليلها إلى :

$$H(s) = \frac{(s + 1 - j4)(s + 1 + j4)}{(s + 2 - j10)(s + 2 + j10)}$$

وعلى ذلك فالأقطاب والأصفر لهذه الدالة هي : z1=-1+j4 و z2=-1-j4 وp1=-2+j10 و p2=-2-j10 كما هو موضح في شكل (٨.٢٢).




**شكل (٨.٢٢) مخطط الأقطاب والأصفار للدالة** $H(s) = \frac{(s+1-j4)(s+1+j4)}{(s+2-j10)(s+2+j10)}$.

بتحويل دالة العبور إلى استجابة ترددية نحصل على :

$$H(J\omega) = \frac{(j\omega + 1 - j4)(j\omega + 1 + j4)}{(j\omega + 2 - j10)(j\omega + 2 + j10)}$$

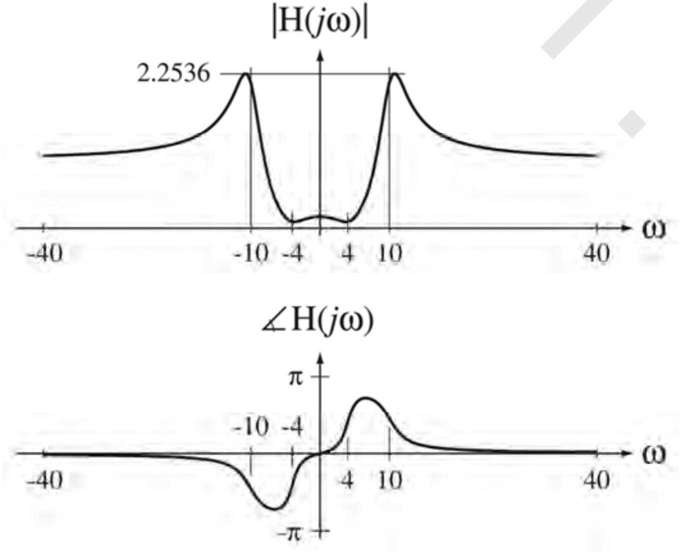
مقدار الاستجابة الترددية عند أي تردد يساوي حاصل ضرب مقدار متجهات البسط مقسوماً على حاصل ضرب متجهات المقام كما يلي :

$$|H(J\omega)| = \frac{|j\omega + 1 - j4||(j\omega + 1 + j4)|}{|(j\omega + 2 - j10)||(j\omega + 2 + j10)|}$$

زاوية الاستجابة الترددية عند أي تردد تساوي مجموع زوايا متجهات البسط مطروحاً منها مجموع زوايا متجهات المقام كما يلي :

$$\measuredangle H(j\omega)= \measuredangle (j\omega+1-j4) + \measuredangle (j\omega+1+j4) -[ \measuredangle (j\omega+2-j10)+ \measuredangle (j\omega+2+j10)]$$

هذه الدالة ليس لها أصفار أو أقطاب على المحور $\omega$. ولذلك فإن استجابتها لن تكون لا صفراً ولا ما لانهاية عند أي تردد حقيقي. ولكن هذه الأقطاب والأصفار المحددة قريبة من المحور الحقيقي، ونتيجة لهذا القرب، فإنها ستؤثر بقوة على الاستجابة الترددية بالقرب من هذه الأقطاب والأصفار. عندما يكون التردد $\omega$ بالقرب من $p_1$ فإن المقام $j\omega+2-j10$ يصبح صغيرا جدا وهذا يجعل المقدار الكلي للاستجابة الترددية كبيراً جداً. وبالعكس عندما يكون التردد $\omega$ بالقرب من الصفر $z_1$ فإن معامل البسط $j\omega+1-j4$ يصبح صغيراً جداً وهذا يجعل مقدار الاستجابة الترددية الكلية صغيراً جداً. وبالتالي فإنه ليس فقط مقدار الاستجابة الترددية هو الذي يذهب إلى الصفر عند الصفر وإلى الما لانهاية عند القطب، ولكنها تصبح صغيرة بالقرب من الصفر، وتصبح كبيرة بالقرب من القطب. مقدار الاستجابة الترددية وزاويتها موضحان في شكل (٨.٢٣).

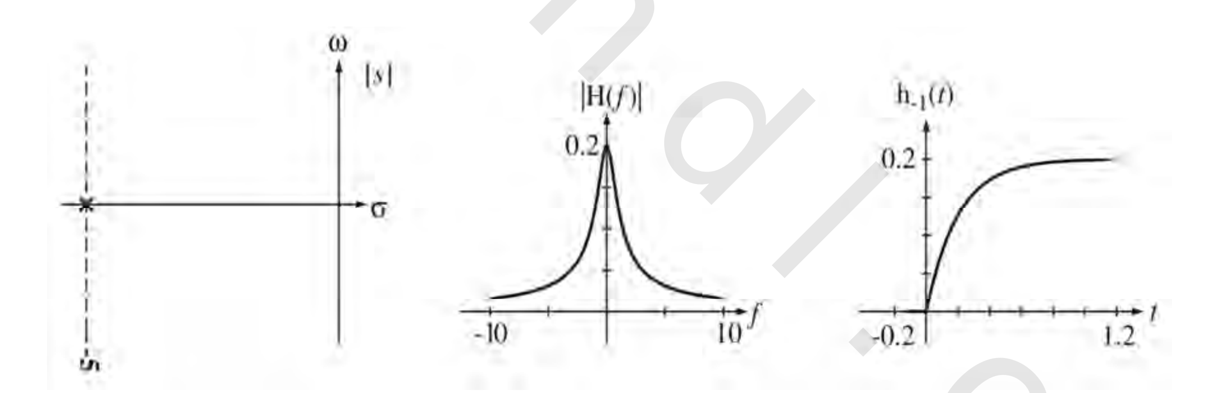



**شكل (٨.٢٣) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام دالة العبور له هي:** $H(s) = \frac{s^2+2s+17}{s^2+4s+104}$.

يمكن رسم الاستجابة الترددية باستخدام دالة ماتلاب الضمنية bode في صندوق أدوات التحكم ويمكن رسم مخطط الأقطاب والأصفار باستخدام الدالة pzmap.

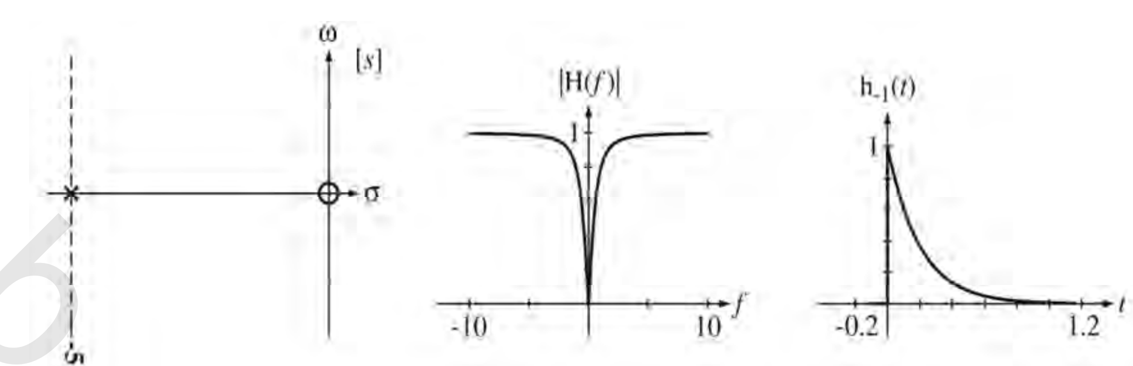
باستخدام هذه المفاهيم التخطيطية لتفسير مخطط الأقطاب والأصفار، يمكن مع التدريب، الاستنتاج التقريبي لكيف سيكون شكل الاستجابة الترددية. هناك معامل واحد في دالة العبور لم يحدد في مخطط الأقطاب والأصفار. المعامل A الذي لا يعتمد على التردد ليس له أي تأثير على شكل مخطط الأقطاب والأصفار، ولذلك لا يمكن تحديده من مجرد الملاحظة. ولكن كل السلوك الديناميكي يمكن تحديده من مخطط الأقطاب والأصفار في حدود ثابت تكبيري معين.

فيما يلي سنرى تتابع من الأشكال عن كيفية تأثر كل من الاستجابة الترددية واستجابة الخطوة مع تغير عدد ومواضع الأقطاب والأصفار لأي نظام. في شكل (٨.٢٤) مخطط أقطاب وأصفار لنظام له قطب واحد بدون أصفار محددة. استجابته الترددية تؤكد أو تدعم الترددات المنخفضة بالنسبة للترددات المرتفعة مما يجعله مرشحاً منفذاً للترددات المنخفضة، واستجابة الخطوة له تعكس هذه الحقيقة حيث إنها لا تقفز بصورة منقطعة عند الزمن t=0 وتقترب من قيمة نهائية لا تساوي الصفر. إن استمرارية استجابة الخطوة عند الزمن t=0 هي نتيجة أن الترددات العالية لاستجابة الخطوة تم كبحها، ولذلك فإن الاستجابة لا يمكن أن تتغير بصورة مفاجئة، أو منقطعة.



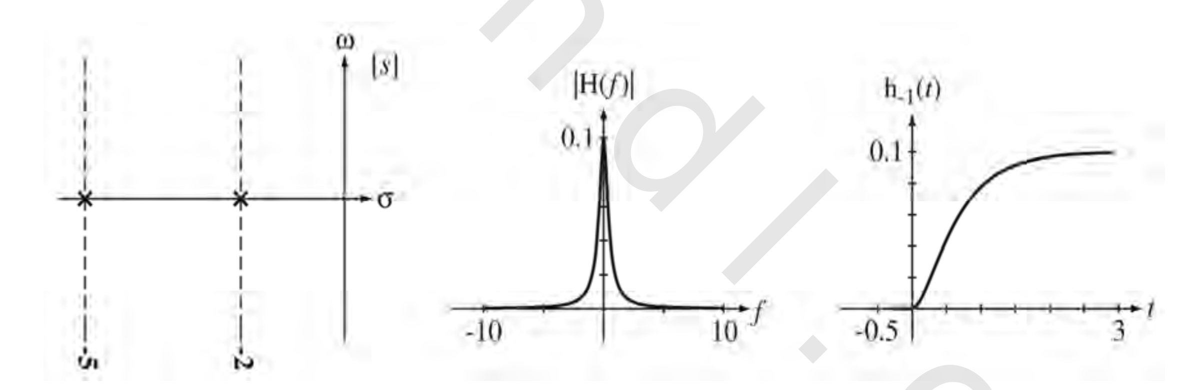

**شكل رقم (٨.٢٤) مرشح منفذ للترددات المنخفضة من قطب واحد محدد.**

في شكل (٨.٢٥) تمت إضافة صفر عند نقطة الأصل للنظام السابق في شكل (٨.٢٤). يغير ذلك الاستجابة الترددية إلى إستجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة. وهذا ينعكس في استجابة الصدمة من حقيقة أنه يقفز فجأة عند الزمن t=0 ويقترب من قيمة نهائية تساوي صفراً. القيمة النهائية لاستجابة الصدمة يجب أن تكون صفراً لأن المرشح يمنع تماماً التردد المساوي للصفر لإشارة الدخل. القفزة عند الزمن t=0 هي نتيجة أن محتويات استجابة الخطوة عند الترددات المرتفعة قد تمت إعادتها أو الاحتفاظ بها.



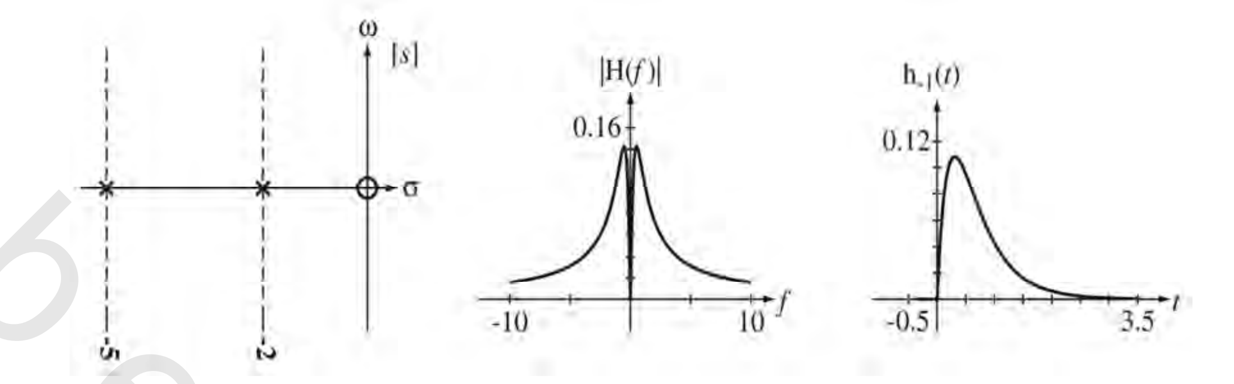

**شكل رقم (٨.٢٥) مرشح منفذ للترددات المرتفعة من قطب واحد محدد وصفر واحد محدد.**

شكل (٨.٢٦) يوضح مرشح منفذ للترددات المنخفضة من قطبين وبدون أصفار. استجابة الخطوة لا تقفز فجأة عند الزمن t=0 وتقترب من قيمة نهائية لا تساوي الصفر. الاستجابة مماثلة للاستجابة الموضحة في شكل (٨.٢٤) ولكن الكبح للترددات المرتفعة يكون أقوى في هذه الحالة، كما هو واضح من حقيقة أن الاستجابة الترددية تتناقص بمعدل أكبر مع زيادة التردد عن الحالة التي في شكل (٨.٢٤). إستجابة الخطوة تختلف قليلا أيضاً، حيث مع البدء عند الزمن t=0 يبدأ بميل يساوي صفر بدلا من ميل لا يساوي الصفر في حالة الشكل (٨.٢٤).



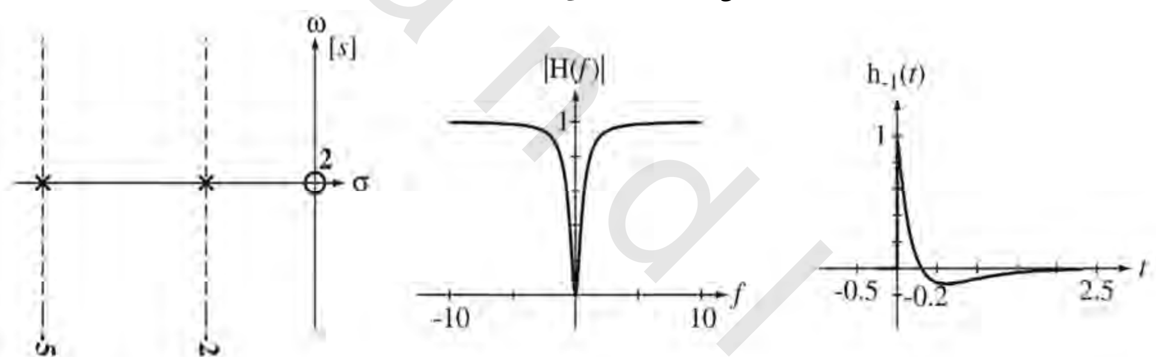

**شكل رقم (٨.٢٦) نظام مكون من قطبين محددين.**

في شكل (٨.٢٧) تم إضافة صفر عند نقطة الأصل للنظام الموجود في شكل (٨.٢٦). استجابة الصدمة لا تقفز فجأة عند الزمن t=0 وتقترب من قيمة نهائية تساوي الصفر، لأن النظام يكبح كلاً من الترددات المرتفعة والترددات المنخفضة نسبة إلى ترددات المدى المتوسط. أي نظام بهذا الشكل من الاستجابة الترددية يسمى مرشحاً منفذاً لمدى من الترددات. كبح الترددات المرتفعة يجعل استجابة الخطوة مستمرة وكبح الترددات المنخفضة يجعل القيمة النهائية لاستجابة الخطوة تساوي صفر.



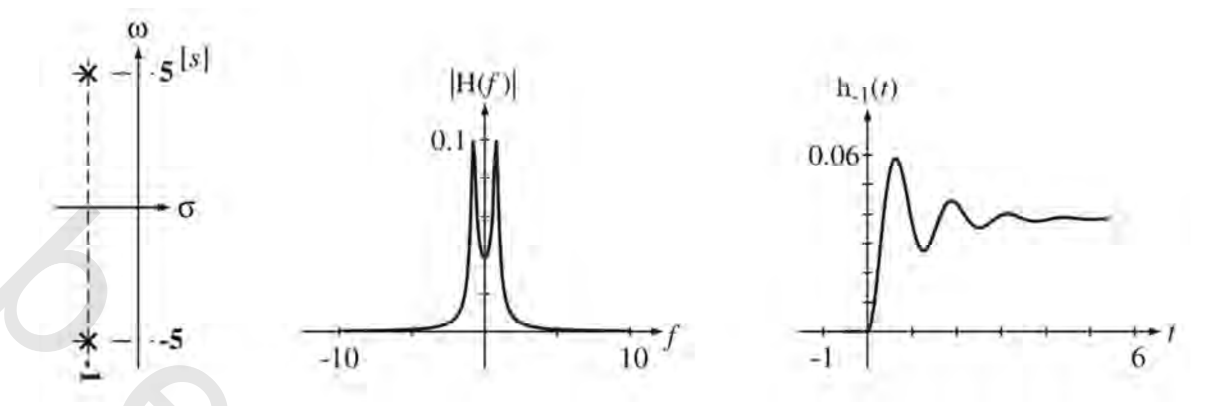

شكل رقم (٨.٢٧) مرشح منفذ لمدى من الترددات باستخدام قطبين وصفر واحد.

في شكل (٨.٢٨) تمت إضافة صفر آخر عند نقطة الأصل للمرشح الموجود في شكل (٨.٢٧) مما يجعله مرشحاً منفذاً للترددات العالية. استجابة الصدمة تقفز فجأة عند الزمن t=0 وتقترب الاستجابة من قيمة نهائية تساوي الصفر. الكبح عند الترددات المنخفضة أصبح أقوى من الشكل (٨.٢٥) وهذا أيضاً قد أثر على استجابة الصدمة مما يجعلها تتجاوز تحت الصفر قبل أن تستقر على الصفر.



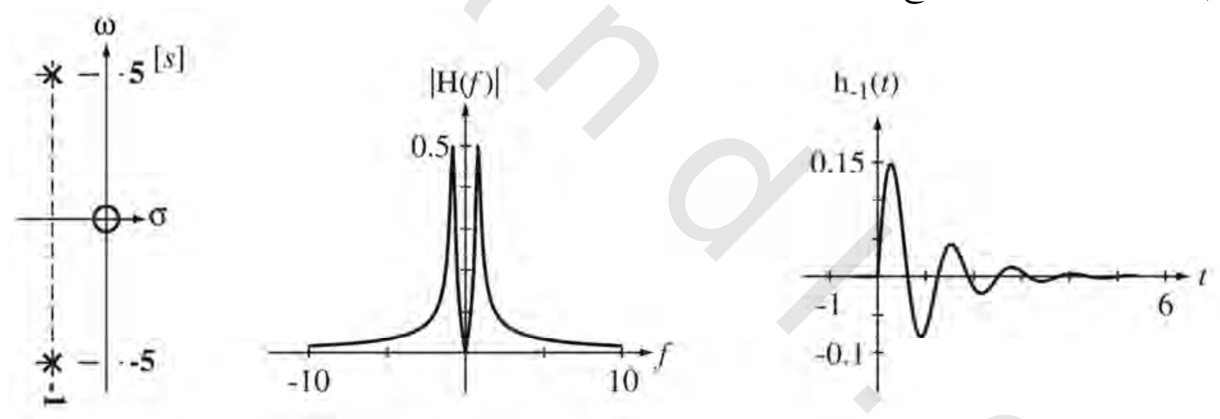

شكل رقم (٨.٢٨) مرشح منفذ للترددات العالية بقطبين وصفرين محددين.

في شكل (٨.٢٩) مرشح آخر منفذ للترددات المنخفضة، ولكن باستجابة ترددية مختلفة عن النظام الموضح في شكل (٨.٢٦) لأن الأقطاب الآن مركبة ومترافقة بدلاً من كونها حقيقية. الاستجابة الترددية تزداد وتصل إلى قمة عند ترددات قريبة من القطبين قبل أن تسقط عند الترددات العالية. أي نظام بهذا الشكل من الاستجابة الترددية يسمى نظام تحتي الكبح underdamped. في النظام تحت الكبح، فإن استجابة الصدمة تتجاوز قيمتها النهائية overshoot، وتتردد حولها قبل أن تستقر. استجابة الخطوة ما زالت مستمرة في كل مكان ولا زالت تقترب من قيمة نهائية مختلفة عن الصفر ولكن بطريقة مختلفة عن شكل (٨.٢٦).



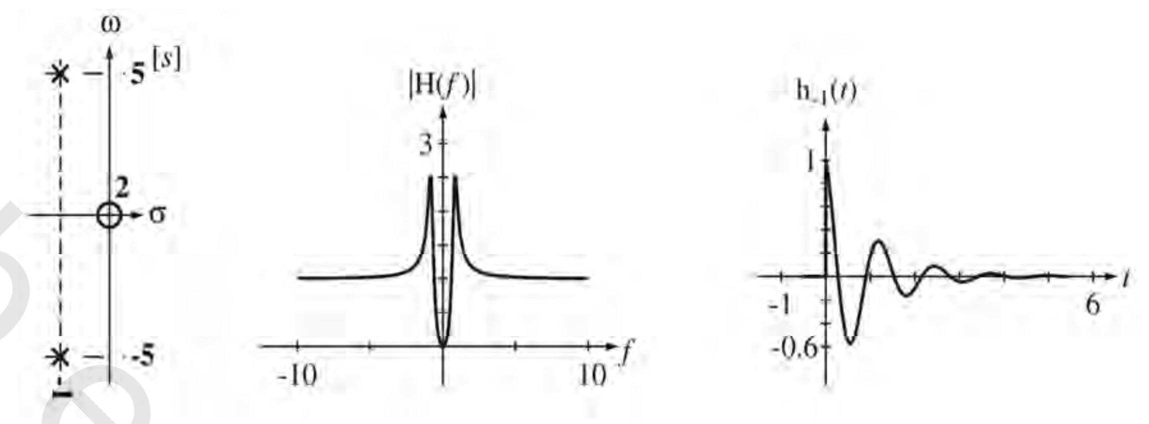

**شكل رقم (٨.٢٩) مرشح منفذ للترددات المنخفضة تحتي الكبح بقطبين .**

في شكل (٨.٣٠) تمت إضافة صفر عند نقطة الأصل للنظام الموجود في شكل (٨.٢٩). لقد تسبب ذلك في تغيير النظام من مرشحاً منفذ للترددات المنخفضة إلى مرشحاً منفذ لمجال من الترددات، ولكن الآن نتيجة موضع القطبين المركبين المترافقين، فإن الاستجابة تكون تحتية الكبح كما هو واضح من القمم في الاستجابة الترددية والتردد في استجابة الخطوة بالمقارنة مع شكل (٨.٢٧).




**شكل (٨.٣٠) مرشح منفذ لمجال من الترددات تحتي الكبح مكون من قطبين محددين وصفر واحد.**

في شكل (٨.٣١) تمت إضافة صفر آخر عند نقطة الأصل للنظام الموجود في شكل (٨.٣٠) مما يجعله مرشحاً منفذاً للترددات العالية. إنه مازال تحت كبحي كما هو واضح من القمم في الاستجابة الترددية والتردد في استجابة الخطوة.




شكل رقم (٨.٣١) مرشح منفذ للترددات المرتفعة تحتي الكبح بقطبين وصفرين محددين.

لقد رأينا في هذه الأمثلة أن تحريك القطب ليقترب من المحور $\omega$ يقلل من الكبح، ويجعل استجابة الخطوة تتردد لزمن أطول ويجعل قمة الاستجابة الترددية ترتفع لقيمة أعلى. ماذا سيحدث إذا كانت الأقطاب ستكون على المحور $\omega$ ؟ في وجود قطبين محددين على المحور $\omega$ (وعدم وجود أصفار) يعني أن هناك أقطاباً عند $s=\pm j\omega_0$ وستكون دالة العبور على الصورة $H(s)=\frac{K\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ وستكون استجابة الصدمة على الصورة التالية: $h(t)=K\sin(\omega_0 t)u(t)$. الاستجابة لأي صدمة تساوي دالة جيبية بعد الزمن t=0 وتتردد بمقدار ثابت وإلى ما لانهاية. الاستجابة الترددية ستكون: $H(j\omega)=\frac{K\omega_0}{(j\omega)^2-\omega_0^2}$. ولذلك فإذا تمت إثارة النظام بدالة جيبية $x(t)=A\sin(\omega_0 t)$، فإن الاستجابة لن تكون محدودة ولا محددة لهذه الإثارة المحددة. إذا تمت إثارة النظام بدالة جيبية عند الزمن t=0، $x(t)=A\sin(\omega_0 t)u(t)$، فإن الاستجابة ستكون:

$$y(t)=\frac{KA}{2}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}-t\cos(\omega_0 t)\right]u(t)$$

وهذه تحتوي دالة جيبية تبدأ عند الزمن t=0 وينمو مقدارها خطيا إلى المالانهاية في الزمن الموجب. مرة ثانية فإن هذه الاستجابة تكون غير محدودة لأي إثارة محدودة مما يبين أن النظام يكون غير مستقر. الاستجابة غير المكبحة لا يمكن الوصول إليها في الحقيقية في الأنظمة غير الفعالة، ولكنها يمكن الوصول إليها في أي نظام باستخدام المكونات الفعالة التي يمكنها تعويض الفقد في الطاقة وتدفع نسبة الكبح لأن تساوي الصفر.

## (٨.١٣) أهداف نظام ماتلاب

صندوق أدوات ماتلاب الخاص بالتحكم يحتوي العديد من الأوامر المفيدة في تحليل الأنظمة. إنها تعتمد على فكرة هدف النظام، وهو نوع خاص من المتغيرات في ماتلاب لوصف الأنظمة. أحد الطرق لتوليد وصف

للنظام في ماتلاب تكون من خلال الأمر tf ، أو بمعنى transfer function أو دالة العبور. الصورة العامة لتوليد هدف نظام باستخدام الدالة tf هي :

sys= tf(num, den).

هذه الدالة تولد هدف نظام sys من متجهين هما num و den. المتجهان يكونان كلهما معاملات للمتغير s (بما في ذلك أي أصفار)، في ترتيب تنازلي في البسط والمقام في دالة العبور. فمثلاً، دعنا نفترض أن دالة العبور ستكون على الصورة :

$$H_1(s) = \frac{s^2 + 4}{s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 31s + 75}$$

يمكننا تكوين $H_1(s)$ في ماتلاب كما يلي :

```
»num = [1 0 4] ;
»den = [1 4 7 15 31 75] ;
»H1 = tf(num,den) ;
»H1
Transfer function:

           s^2+4
 -------------------------------
 s^5+4s^4+7s^3+15s^2+31s+75
```

بدلاً من ذلك يمكننا تكوين وصف للنظام عن طريق استخدام الأصفار المحددة والأقطاب، وثابت التكبير لأي نظام باستخدام الدالة الضمنية zpk والتي صورتها العامة كما يلي :

sys=zpk(z,p,k)

حيث z هو متجه الأصفار للنظام، و p هو متجه الأقطاب، و k هو ثابت معامل التكبير. فمثلاً دعنا نفترض أن نظاماً له دالة العبور التالية :

$$H_2(s) = 20\frac{s+4}{(s+3)(s+10)}$$

يمكننا تكوين وصف النظام كما يلي :

```
»z = [-4] ;
»p = [-3 -10] ;
»k = 20 ;
»H2 = zpk(z,p,k) ;
»H2
Zero/pole/gain:

   20 (s+4)
 ------------
 (s+3) (s+10)
```

طريقة أخرى لتكوين وصف النظام في ماتلاب هي عن طريق تعريف s كمتغير مستقل لتحويل لابلاس بالأمر :

```
»s = tf('s') ;
```

وبالتالي يمكننا كتابة أي دالة عبور مثل $H_3(s) = \frac{s(s+3)}{s^2+2s+8}$ بالطريقة نفسها التي نستخدمها في الكتابة على الورق كما يلي :

```
»H3 = s*(s+3)/(s^2+2*s+8)
Transfer function:
```

$$\frac{s^{\wedge 2} + 3s}{s^{\wedge 2} + 2s + 8}$$

يمكننا تغيير نوع من وصف الأنظمة إلى نوع آخر كالتالي :

```
»tf(H2)
Transfer function:
```

$$\frac{20\ \ s + 80}{s^{\wedge 2} + 13s + 30}$$

```
»zpk(H1)
Zero/pole/gain:
```

$$\frac{(s^{\wedge 2} + 4)}{(s + 3.081)\ \ (s^{\wedge 2} + 2.901s + 5.45)\ \ (s^{\wedge 2} - 1.982s + 4.467)}$$

يمكننا الحصول على معلومات عن الأنظمة من وصفها باستخدام الأمرين tfdata و zpkdata ، كما يلي :

```
»[num,den] = tfdata(H2,'v') ;
»num
num =
        0 20 80
»den
den =
        1 13 30
»[z,p,k] = zpkdata(H1,'v') ;
»z
z =
        0 + 2.0000i
        0 - 2.0000i
»p
p =
        -3.0807
        -1.4505 + 1.8291i
        -1.4505 - 1.8291i
        0.9909 + 1.8669i
        0.9909 - 1.8669i
k =
        1
```

(المعامل 'v' في الأوامر السابقة يعني أن الإجابة يجب أن تكون في صورة متجه). هذه الإجابة الأخيرة توضح أن دالة العبور $H_1(s)$ لها أصفار عند ±j2 وأقطاب عند 3.0807- و 1.4505±j1.829- و 0.9909±j1.8669.

ماتلاب به بعض الدوال المساعدة لإجراء تحليل الاستجابة الترددية في صندوق أدوات التحكم. مثل الأمر:

H=freq(num, den, ω)

الذي يقبل متجهين num و den ونفسرها على أنها معاملات قوى المتغير s في البسط والمقام لدالة العبور H(s)، بدءا بأعلى قوة حتى القوة صفر، بدون إهمال أي قوة. إنها ترجع في H الاستجابة الترددية المركبة بالترددات الزاوية في المتجه $\omega$.

## (٨.١٤) ملخص النقاط المهمة

١- يمكن استخدام تحويل لابلاس لتحديد دالة العبور لأي نظام LTI، ودالة العبور يمكن استخدامها في إيجاد استجابة هذا النظام لأي إثارة اختيارية.

٢- يوجد تحويل لابلاس للإشارات التي لا يتنامى مقدارها أسرع من الإشارات الأسية في كل من الزمن الموجب أو السالب.

٣- تعتمد منطقة التقارب لتحويل لابلاس لأي إشارة على كون هذه الإشارة يمينية أو يسارية الجانب.

٤- الأنظمة الموصوفة بمعادلات تفاضلية خطية، ذات معاملات ثابتة لها دوال عبور على صورة نسبة من كثيرتي حدود في المتغير s.

٥- مخطط الأقطاب والأصفار لدالة عبور أي نظام تجمع معظم خواص هذا النظام ويمكن استخدامها لإيجاد الاستجابة الترددية لهذا النظام في حدود ثابت التكبير.

٦- توجد دالة هدف في ماتلاب محددة للتعبير عن دالة العبور لأي نظام والعديد من الدوال التي تعمل على هذه الأهداف من هذا النوع.

٧- يمكن إيجاد زوج تحويل لابلاس وخواص تحويل لابلاس الأمامية والعكسية للعديد من الإشارات التي لها أهمية هندسية.

٨- تحويل لابلاس الأحادي يتم استخدامه عادة في حل المشاكل العملية؛ لأنه لا يتطلب أي افتراض لمنطقة التقارب ولذلك فإنه يستخدم ببساطة عن التحويل الثنائي الاتجاه.

**تمارين مع الإجابة**

(في كل تمرين ، تم ترتيب الإجابات بطريقة عشوائية)

**تعريف تحويل لابلاس**

١- بدءا من تحويل لابلاس المعرف كالتالي :

$$\mathcal{L}(g(t)) = G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt$$

وبدون استخدام الجداول ، أوجد تحويل لابلاس لهذه الإشارات :

(أ) $x(t) = e^{t}u(t)$

(ب) $x(t) = e^{2t}\cos(200\pi t)\,u(-t)$

(ج) $x(t) = ramp(t)$

(د) $x(t) = te^{t}u(t)$

**الإجابة :** $\frac{1}{s-1},\ \sigma > 1,\ \frac{1}{s^2},\ \sigma > 0\ ,\ \frac{s-2}{(s-2)^2+(200\pi)^2},\ \ \sigma < 2,\ \frac{1}{(s-1)^2},\sigma > 1$

**وجود تحويل لابلاس**

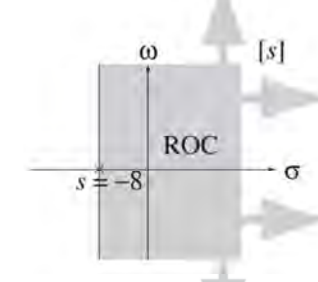
٢- ارسم مخطط الأقطاب والأصفار ومنطقة التقارب (إذا كانت موجودة) للإشارات التالية :

(أ) $x(t) = e^{-8t}u(t)$

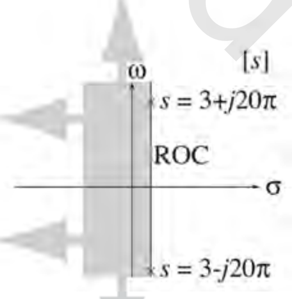
(ب) $x(t) = e^{3t}\cos(20\pi t)u(-t)$

(ج) $x(t) = e^{2t}u(-t) - e^{-5t}u(t)$؟

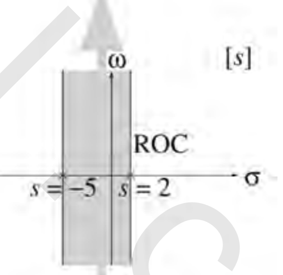
**الإجابة :**




,




,




**شكل رقم** (ج.ت-٢)

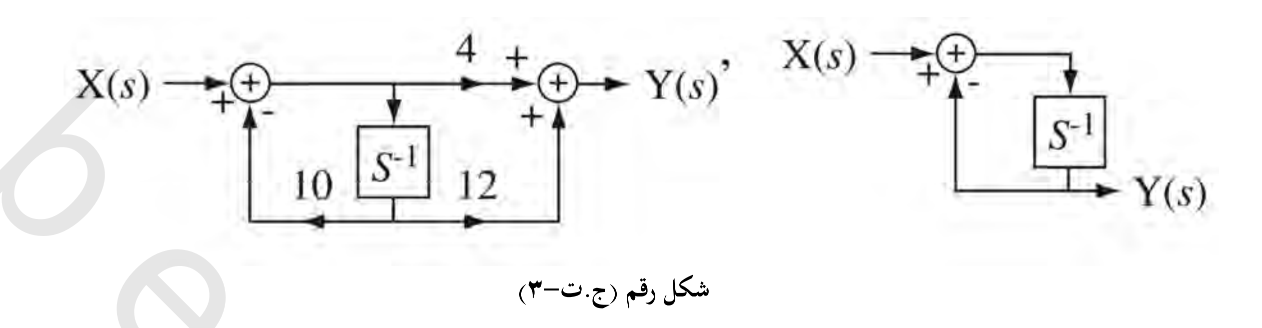
**الصورة المباشرة II لتحقيق النظام**

٣- ارسم مخططات الأنظمة بالطريقة المباشرة II للأنظمة التي دوال عبورها كما يلي :

(أ) $H(s) = \frac{1}{s+1}$

(ب) $H(s) = 4\frac{s+3}{s+10}$؟

**الإجابة :**




**شكل رقم (ج.ت-٣)**

## تحويل لابلاس الأمامي والعكسي

٤- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية ، أوجد تحويل لابلاس للإشارات التالية :

(أ) x(t)=u(t)-u(t-1)

(ب) $x(t) = 3e^{-3(t+2)}u(t+2)$

(ج) $x(t) = 3e^{-3t}u(t-2)$

(د) $x(t) = 5\sin(\pi(t-1))\,u(t-1)$

**الإجابة :** $\frac{3e^{-2s-6}}{s+3}$, $\frac{1-e^{-s}}{s}$, $\frac{5\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}$, $\frac{3e^{2s}}{s+3}$

٥- باستخدام خاصية الإزاحة الترددية المركبة ، أوجد وارسم تحويل لابلاس للدالة :

$$X(s) = \frac{1}{(s+j4)+3} + \frac{1}{(s-j4)+3}, \ \sigma > -3$$

**شكل رقم (ج.ت-٥)**

٦- باستخدام خاصية التحجيم الزمني ، أوجد تحويل لابلاس لهذه الإشارات :

(أ) x(t)=δ(4t)

(ب) x(t)=u(4t)؟

**الإجابة :** σ>0 , 1/s و , ¼ ، كل قيم s.

٧- باستخدام خاصية التفاضل الزمني، أوجد تحويل لابلاس للإشارات التالية :

(أ) $x(t) = \frac{d}{dt}(u(t))$

(ب) $x(t) = \frac{d}{dt}(e^{-10t}u(t))$

(ج) $x(t) = \frac{d}{dt}(4\sin(10\pi t)u(t))$

(د) $x(t) = \frac{d}{dt}(10\cos(15\pi t)u(t))$ ؟

**الإجابة :**

$$\frac{40\pi s}{s^2+(10\pi)^2}, Re(s) > 0, \frac{10s^2}{s^2+(15\pi)^2}, \quad Re(s) > 0, 1, all\ s, \frac{s}{s+10}, Re(s) > -10$$

٨- باستخدام خاصية الالتفاف الزمني، احسب تحويلات لابلاس للإشارات التالية وارسم هذه الإشارات مع الزمن :

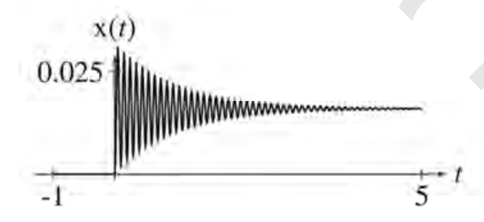
(أ) $x(t) = e^{-t}u(t) * u(t)$

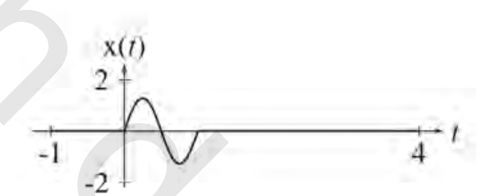
(ب) $x(t) = e^{-t}\sin(20\pi t)u(t) * u(-t)$

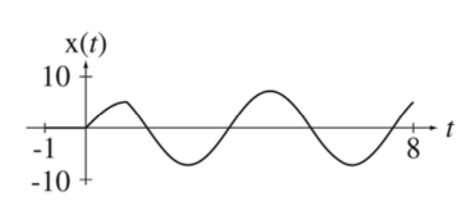
(ج) $x(t) = 8\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)u(t) * [u(t) - u(t-1)]$

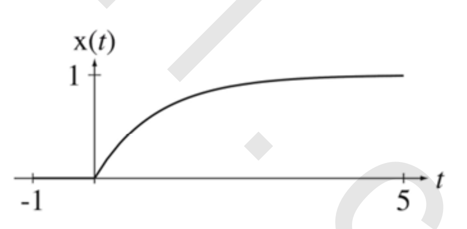
(د) $x(t) = 8\cos(2\pi t)\,u(t) * [u(t) - u(t-1)]$

**الإجابة :**




**شكل رقم** (ج.ت-٨)

٩- باستخدام نظريات القيمة الابتدائية والنهائية، احسب القيم الابتدائية والنهائية (إذا أمكن) للإشارات التي تحويل لابلاس لها ممثل في الدوال التالية :

(أ) $X(s) = \frac{10}{s+8}, \sigma > -8$

(ب) $X(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4}, \sigma > -3$

(ج) $X(s) = \frac{s}{s^2+4}, \sigma > 0$

(د) $X(s) = \frac{10s}{s^2+10s+300}, \sigma < -5$

(ه) $X(s) = \frac{8}{s(s+20)}, \sigma > 0$

(و) $X(s) = \frac{8}{s^2(s+20)}, \sigma > 0$ ؟

**الإجابة:** 10، لا يمكن التطبيق، 0، 1، ٠ ، لا يمكن التطبيق، 2/5، 1، لا يمكن التطبيق، 0، لا يمكن التطبيق.

١٠- احسب تحويل لابلاس العكسي للدوال التالية:

(أ) $X(s) = \frac{24}{s(s+8)}, \sigma > 0$

(ب) $X(s) = \frac{20}{s^2+4s+3}, \sigma < -3$

(ج) $X(s) = \frac{5}{s^2+6s+73}, \sigma > -3$

(د) $X(s) = \frac{10}{s(s^2+6s+73)}, \sigma > 0$

(ه) $X(s) = \frac{4}{s(s^2+6s+73)}, \sigma > 0$

(و) $X(s) = \frac{2s}{s^2+2s+13)}, \sigma < -1$

(ز) $X(s) = \frac{s}{(s+3)}, \sigma > -3$

(ح) $X(s) = \frac{s}{s^4+4s+4}, \sigma > -2$

(ط) $X(s) = \frac{s^2}{s^4-4s+4}, \sigma < 2$

(ي) $X(s) = \frac{10s}{s^4+4s^2+4}, \sigma > -2$ ؟

**الإجابة:**

$$2e^{-t}\left[(1/\sqrt{12})sin(\sqrt{12t}) - cos(\sqrt{12t})\right]u(t), 10(e^{-3t} - e^{-t})u(-t)$$

$$e^{-2t}(1-2\text{t})u(t), \frac{10}{73}\left[1 - \sqrt{73/64}\, e^{-3t}\, cos(8t - 0.3588)\right]u(t), \delta(t) - 4e^{2t}(t+1)u(-t)$$

$$\frac{A}{(73)^2}\left[292\text{t} - 24 + 24e^{-3t}\left(cos(8t) - (55/48)sin(8t)\right)\right]u, (5/8)e^{-3t}\, sin(8t)u(t)$$

$$\delta(t) - 3e^{-3t}u(t), 3(1 - e^{-3t})u(t), (5/\sqrt{2})t\, sin(\sqrt{2t})u(t)$$

١١- افترض الدالة x(t) معرفة كما يلي: $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s(s+5)}{s^2+16}, \sigma > 0$ ، وأن x(t) يمكن كتابتها كمجموع ثلاث دوال، اثنتان منها دوال جيبية سببية.

(أ) ما هي الدالة الثالثة ؟

(ب) ما هو التردد الدوري للدالة الجيبية السببية ؟

**الإجابة:** دالة صدمة، 0.637Hz

## تحويل لابلاس الأحادي

١٢- بدءا بتعريف تحويل لابلاس الأحادي التالي:

$$\mathcal{L}(g(t)) = G(s) = \int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt$$

وبدون استخدام الجداول، احسب تحويل لابلاس الأحادي للدوال التالية:

(أ) $x(t) = e^{-t}u(t)$

(ب) $x(t) = e^{2t}\cos(200\pi t)u(t)$

(ج) $x(t) = u(t+4)$

(د) $x(t) = u(t-4)$

**الإجابة:**

$$\frac{1}{s+1}, \sigma > 0, \frac{s-2}{(s-2)^2(200\pi)^2}\sigma > 2, \frac{e^{-4s}}{s}, \sigma > 0$$

## حل المعادلات التفاضلية

١٣- باستخدام تحويل لابلاس الأحادي، حل المعادلات التفاضلية التالية عندما $t \geq 0$:

(أ) $x'(t)+10x(t)=u(t)$ حيث $x(0^-)=1$

(ب) $x''(t)-2x'(t)+4x(t)=u(t)$ حيث $x(0^-)=0$ و $\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]_{t=0^-} = 4$

(ج) $x'(t)+2x(t)=\sin(2\pi t)u(t)$ حيث $x(0^-)=-4$

**الإجابة:**

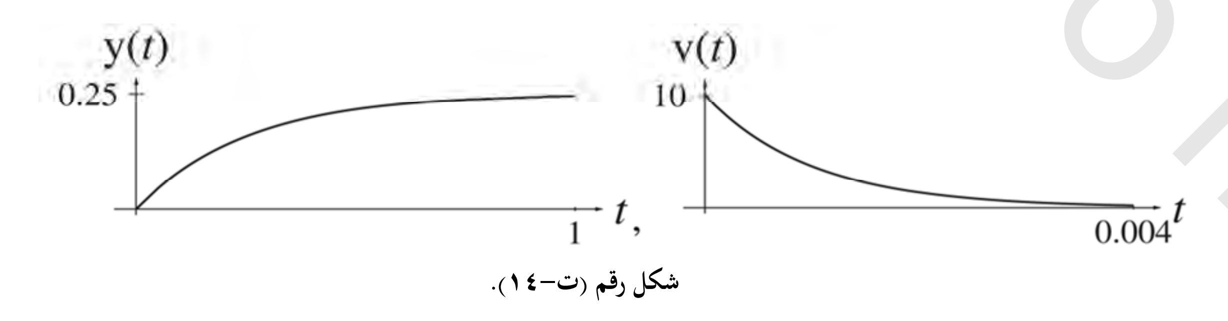
$$(1/4)\left(1 - e^t\cos(\sqrt{3}t) + (17/\sqrt{3})e^t\sin(\sqrt{3}t)\right)u(t), \frac{1+9e^{-10t}}{10}u(t)$$

$$x(t) = \left[\frac{2\pi e^{-2t} - 2\pi\cos(2\pi t) + 2\sin(2\pi t)}{4+(2\pi t)^2} - 4e^{-2t}\right]u(t$$

١٤- أكتب المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الموضحة في شكل (ت- ١٤) واحسب وارسم الاستجابات الموضحة:

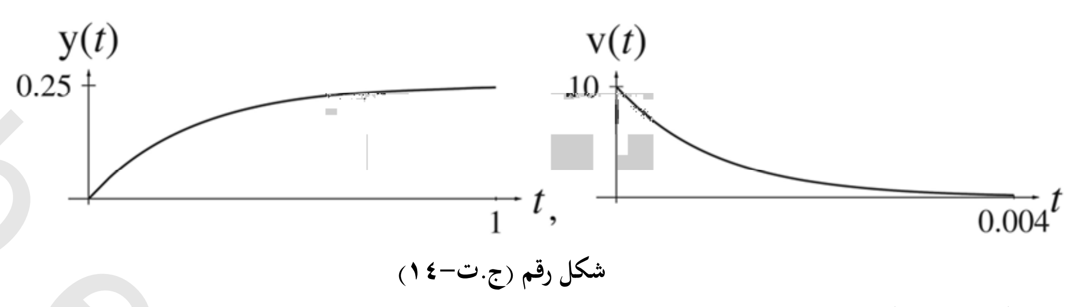
(أ) $x(t)=u(t)$ و $y(t)$ هي الاستجابة و $y(0^-)=0$

(ب) $v(0^-)=10$ و $v(t)$ هي الاستجابة.




شكل رقم (ت-١٤).

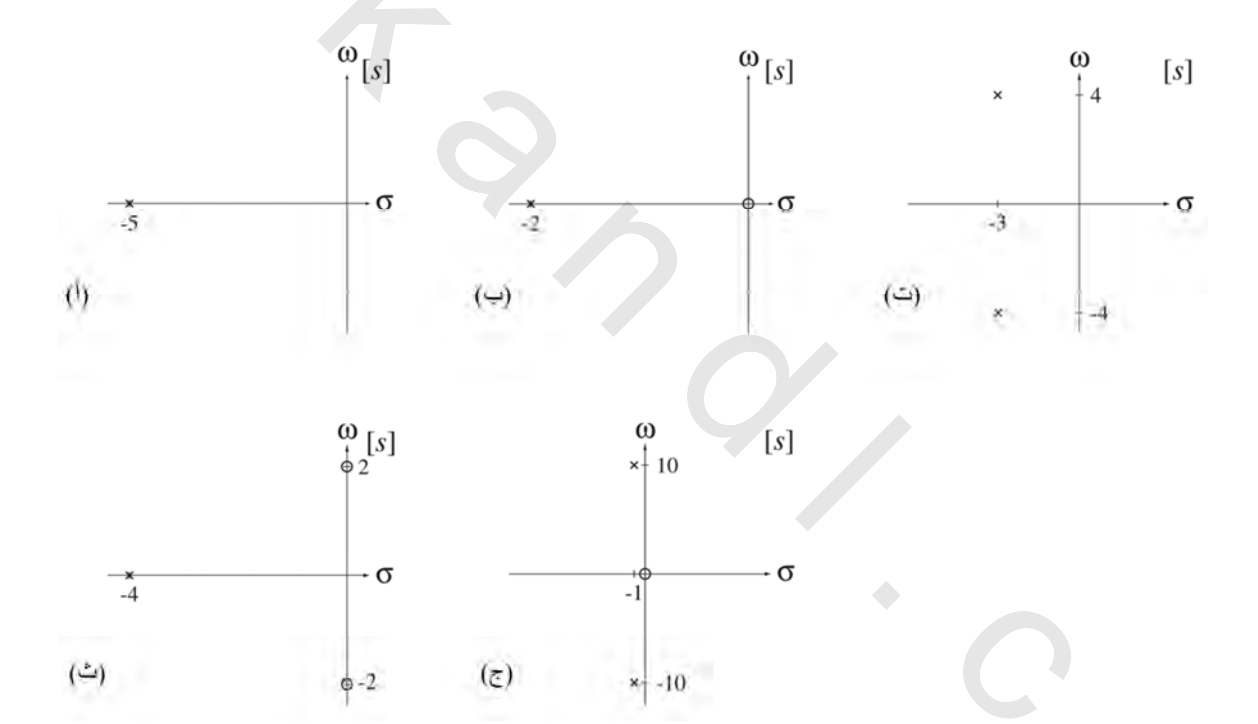
**الإجابة:**



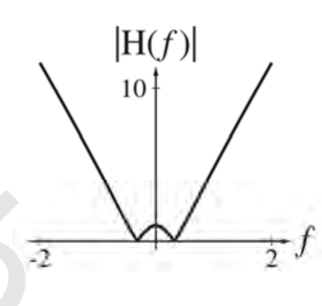

**شكل رقم (ج.ت-١٤)**

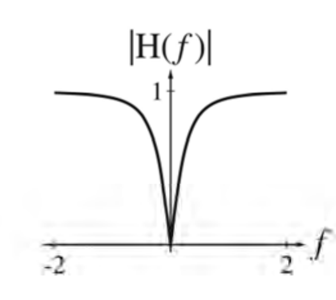
**مخططات الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية**

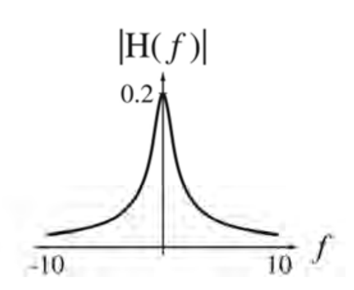
١٥- لكل مخطط للأقطاب والأصفار موضح في شكل (ت- ١٥) ارسم بالتقريب مقدار الاستجابة الترددية:

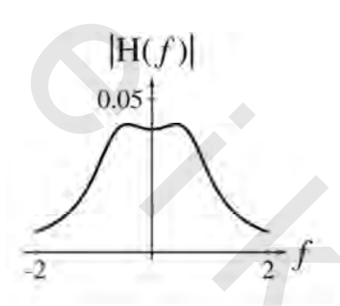


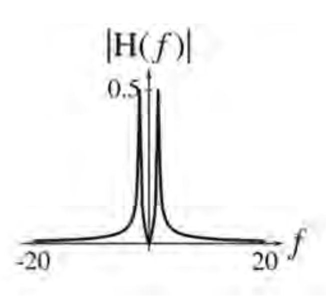

**شكل رقم (ت-١٥)**




**شكل رقم (ج.ت-١٥)**

**تمارين بدون إجابات**

**تعريف تحويل لابلاس**

١٦- باستخدام التعريف التكاملي احسب تحويل لابلاس للدوال الزمنية التالية :

(أ) $g(t) = e^{-at}u(t)$

(ب) $g(t) = e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)$

(ج) $g(t) = \sin(w_0 t)u(t)$

(د) $g(t) = rect(t)$

(ه) $g(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$

**وجود تحويل لابلاس**

١٧- ارسم مخطط الأصفار والأقطاب ومنطقة التقارب (إذا كانت موجودة) للإشارات التالية :

(أ) $x(t) = e^{-t}u(-t) - e^{-4t}u(t)$

(ب) $x(t) = e^{-2t}u(-t) - e^{t}u(t)$

**بناء الأنظمة بالصورة المباشرة II**

١٨- ارسم مخطط تنفيذ النظام بالطريقة المباشرة II للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(s) = 10\frac{s^2+8}{s^3+3s^2+7s+22}$

(ب) $H(s) = 10\frac{s+20}{(s+4)(s+8)(s+14)}$

**تحويل لابلاس الأمامي والعكسي**

١٩- باستخدام جدول تحويلات لابلاس وخواصه أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية :

(أ) g(t)=5sin(2π(t-1))u(t-1)

(ب) g(t)=5sin(2πt)u(t-1)

(ج) g(t)=2cos(10πt)cos(100πt)u(t)

(د) $g(t) = \frac{d}{dt}\left(u(t-2)\right)$

(ه) $g(t) = \int_{0^+}^{t} u(\tau)\, d\tau$

(و) $g(t) = \frac{d}{dt}\left(5e^{-(t-\tau)/2}u(t-\tau)\right), \quad \tau > 0$

(ز) $g(t) = 2e^{-5t}\cos(10\pi t)\, u(t)$

(ح) x(t)=5sin(πt-π/8)u(-t)

٢٠- بفرض زوج التحويل التالي:

$$g(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+1}{s(s+4)}, \quad \sigma > 1$$

أوجد تحويل لابلاس لما يأتي:

(أ) g(2t)

(ب) $\frac{d}{dt}(g(t))$

(ج) $g(t-4)$

(د) $g(t) * g(t)$

٢١- أوجد دوال النطاق الزمني التي تمثل تحويل لابلاس العكسي للدوال التالية. بعد ذلك باستخدام نظرية القيمة الابتدائية والنهائية، اثبت أنها تتوافق مع دوال النطاق الزمني.

(أ) $G(s) = \frac{4s}{(s+3)(s+8)}, \quad \sigma > -3$

(ب) $G(s) = \frac{4}{(s+3)(s+8)}, \quad \sigma > -3$

(ج) $G(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}, \quad \sigma > -1$

(د) $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+2s+2}, \quad \sigma > -1$

٢٢- بفرض زوج التحويل التالي:

$$e^{4t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)$$

أوجد تحويل لابلاس العكسي لما يأتي:

(أ) G(s/3), σ<4

(ب) G(s-2)+G(s+2), σ<4

(ج) G(s)/s , σ<4

٢٣- أوجد القيم العددية للثوابت التالية $K_0$ و $K_1$ و $K_2$ و $p_1$ و $p_2$:

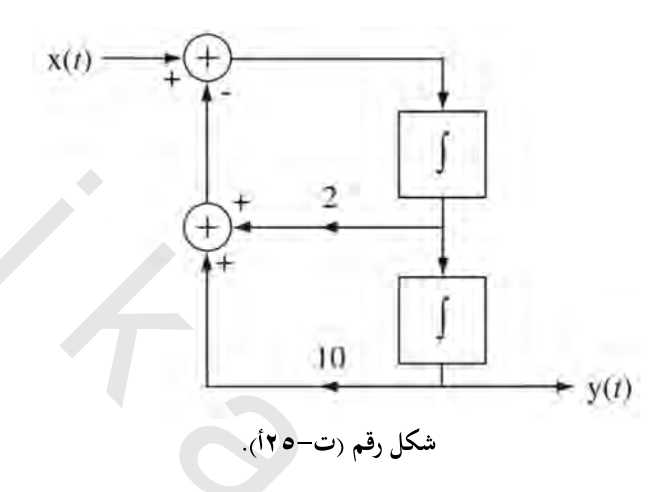
$$\frac{s^2+3}{3s^2+s+9} = K_0 + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2}$$

٢٤- نظام له دالة العبور التالية: $H(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+a)}$، والتي يمكن حلها بالكسور الجزئية على الصورة: $H(s) = A + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-a}$: إذا كانت a≠2 و B=3/2، فأوجد القيم العددية للثوابت a و A و C.

**حل المعادلات التفاضلية**

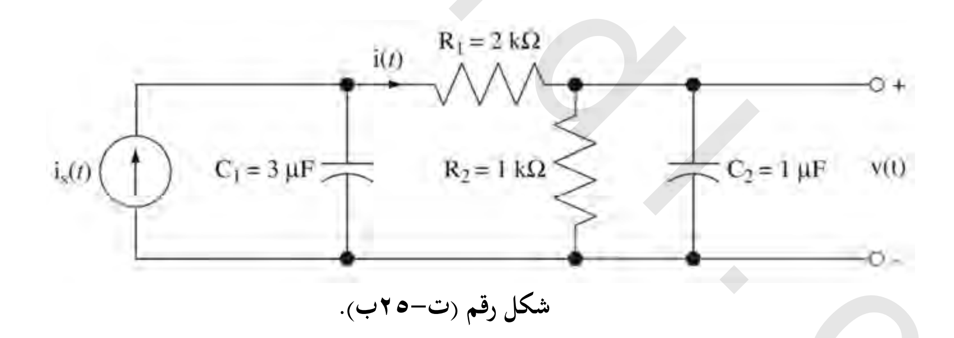
٢٥- اكتب المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٢٥) وأوجد وارسم الاستجابات المبينة :

(أ) x(t)=u(t) ، والاستجابة هي y(t) ، و $y(0^+) = -5,\ \left[\frac{d}{dt}\left(y(t)\right)\right]_{t=0^-} = 10$



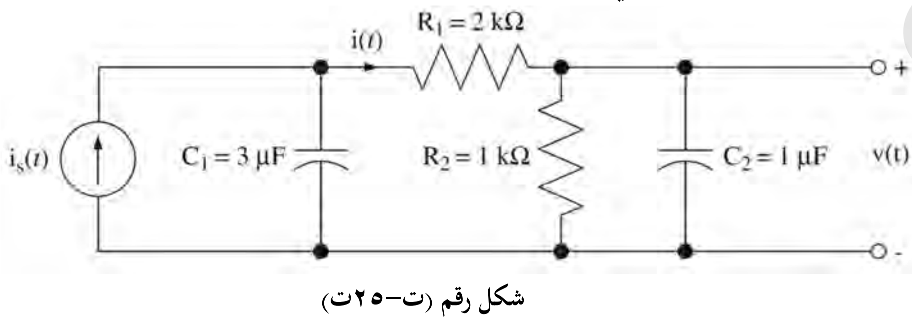

**شكل رقم (ت–٢٥أ).**

(ب) $i_s(t)=u(t)$ و v(t) هي الاستجابة ، لا توجد طاقة ابتدائية مخزنة.




**شكل رقم (ت–٢٥ب).**

(ج) $i_s(t)=\cos(2000\pi t)u(t)$ و v(t) هي الاستجابة ، لايوجد طاقة ابتدائية مخزنة




**شكل رقم (ت–٢٥ت)**

**مخططات الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية**

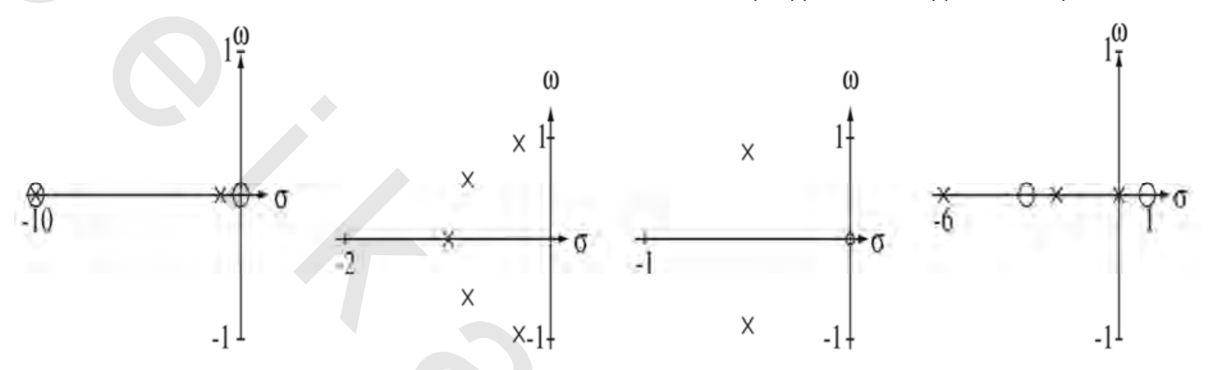
٢٦- ارسم مخططات الأقطاب والأصفار لدوال العبور التالية :

(أ) $H(s) = \frac{(s+3)(s-1)}{s(s+2)(s+6)}$

(ب) $H(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$

(ج) $H(s) = \frac{s(s+10)}{s^2+11s+10}$

(د) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.618s+1)}$؟




**شكل رقم** (ج.ت-٢٦)

٢٧- شكل (ت- ٢٧) يبين مخطط الأقطاب والأصفار لبعض دوال العبور لأنظمة على الصورة العامة التالية : $H(s) = A\frac{(s-z_1)\dots(s-z_N)}{(s-p_1)\dots(s-p_N)}$ والتي بها A=1 وال z's هي الأصفار والـ p's هي الأقطاب. أجب على هذه الأسئلة :

(أ) أي هذه المخططات يكون لها مقدار استجابة ترددية مختلف عن الصفر عند $\omega=0$ ؟

(ب) أي هذه المخططات يكون لها مقدار استجابة ترددية مختلف عن الصفر عند $\omega=\infty$ ؟

(ج) هناك مخططان لهما استجابة ترددية منفذة لمجال من الترددات (تساوي صفراً عند الصفر وتساوي الصفر عند الما لانهاية)، أي واحد فيها تحت كبحي underdamped أكثر من الآخر ؟

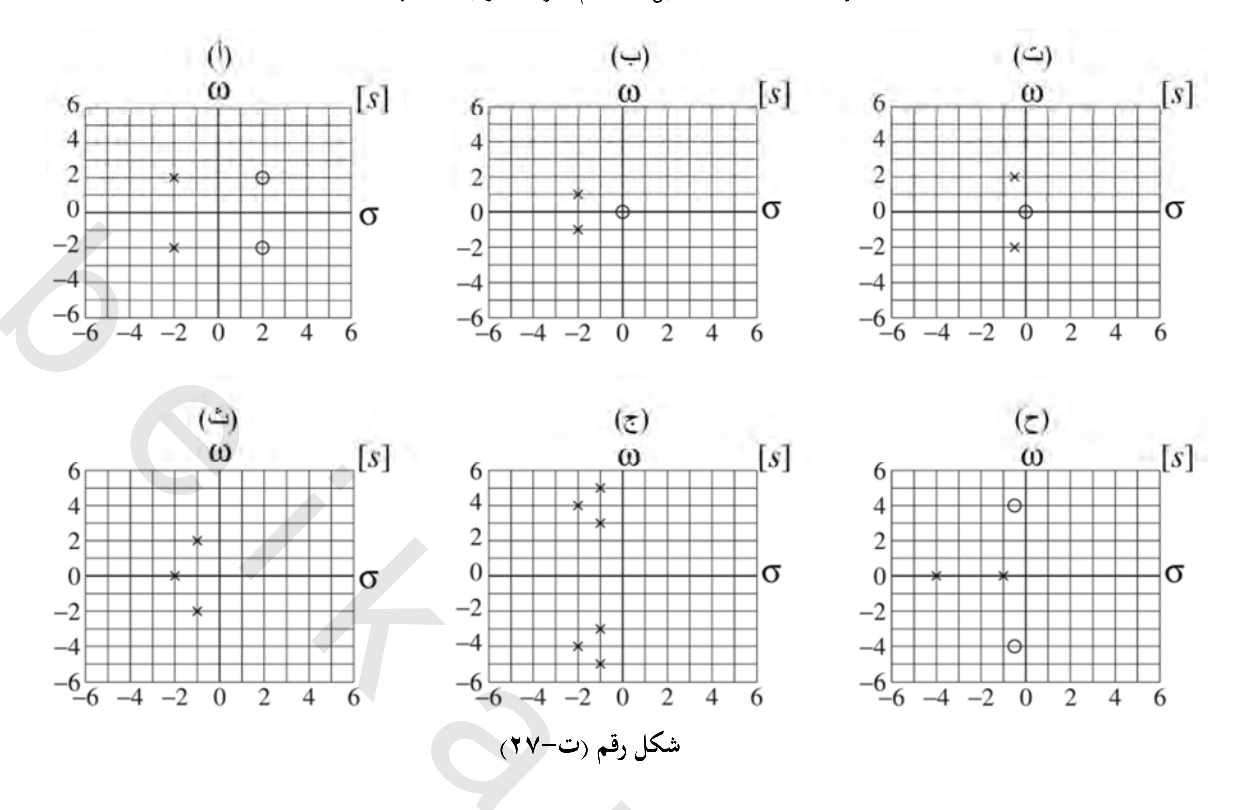
(د) أي واحد فيها يكون له مقدار استجابة ترددية شكله أقرب ما يمكن لأن يكون مرشحاً مانعاً لمجال معين من الترددات ؟

(ه) أي واحد من هذه المخططات يكون له مقدار استجابة ترددية تقترب $K/\omega^6$ عند الترددات العالية جداً (K ثابت) ؟

(و) أي واحد من هذه المخططات يكون له مقدار استجابة ترددية ثابت ؟

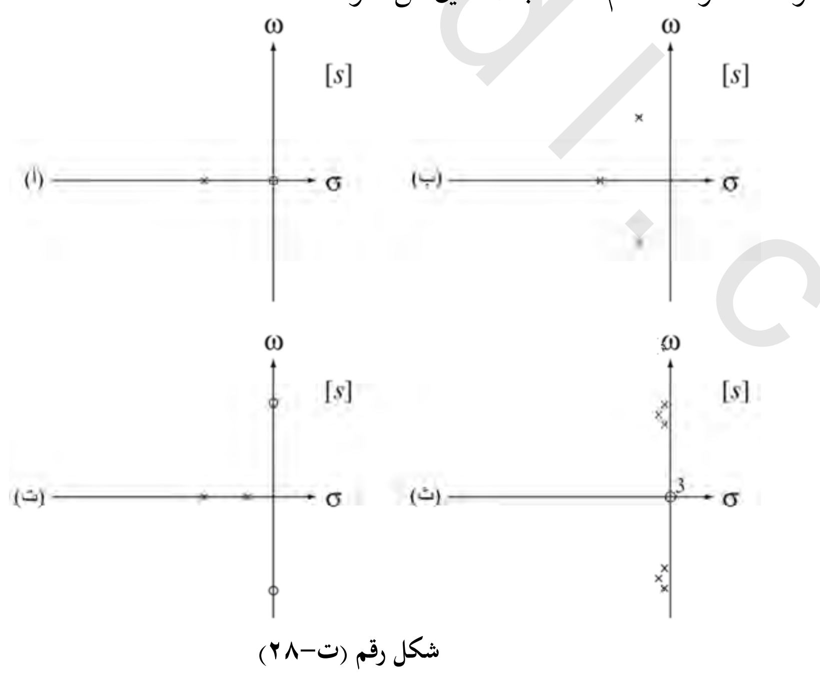
(ز) أي واحد من هذه المخططات يكون له مقدار استجابة ترددية لها شكل أقرب ما يمكن لمرشح منفذ للترددات المنخفضة ؟

(ح) أي واحد من هذه المخططات يكون له زاوية استجابة ترددية تكون غير متصلة عند $\omega=0$ ؟




**شكل رقم (ت-٢٧)**

٢٨- لكل واحد من مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة في شكل (ت- ٢٨)، حدد إذا كانت الاستجابة الترددية تمثل مرشحاً فعلياً منفذاً للترددات المنخفضة، أم منفذ لمجال معين من الترددات، أم منفذاً للترددات المرتفعة، أم كابحاً لمجال معين من الترددات؟




**شكل رقم (ت-٢٨)**